

基于圆锥曲线和直线融合特征的长焦相机标定方法

孙聪^{1,2*}, 杨正磊^{1,2}, 贾萌娜³, 于起峰⁴¹ 宇航动力学国家重点实验室, 陕西 西安 710043;² 西安卫星测控中心, 陕西 西安 710043;³ 中国空间技术研究院西安分院, 陕西 西安 710000;⁴ 国防科技大学空天科学学院, 湖南 长沙 410073

摘要 针对长焦相机标定技术瓶颈,提出了基于圆锥曲线和直线融合特征的长焦相机标定方法。揭示了长焦相机标定方程病态性的形成机理,基于射影变换交比不变、切点不变等特有性质设计了同心半圆弧平面模板,并结合归一化直线单应估计方法和分部正则估计理论,实现了长焦相机内外参数初值的高精度鲁棒求解。进一步考虑镜头畸变的影响,引入直线段积分距离测度,以模型直线至投影平面距离最小为目标函数,采用非线性迭代优化算法进行标定参数求解。仿真及实际实验结果显示,所提出的长焦相机标定方法正确有效,且相较于传统标定方法,标定精度和鲁棒性更优。

关键词 测量;长焦相机;相机标定;圆锥曲线;直线;分部正则估计

中图分类号 TP391.4

文献标志码 A

DOI: 10.3788/AOS202242.1212003

Conics and Line Fusion Features Based Calibration of Telephoto Camera

Sun Cong^{1,2*}, Yang Zhenglei^{1,2}, Jia Mengna³, Yu Qifeng⁴¹ State Key Laboratory of Astronautic Dynamics, Xi'an 710043, Shaanxi, China;² Xi'an Satellite Control Center, Xi'an 710043, Shaanxi, China;³ China Academy of Space Technology (Xi'an), Xi'an 710000, Shaanxi, China;⁴ College of Aeronautics and Astronautics, National University of Defense Technology, Changsha 410073, Hunan, China

Abstract Aiming at the bottleneck of telephoto camera calibration, a novel calibration method based on conics and line fusion features is proposed. The article reveals the formation mechanism of ill-conditioned calibration equation of the telephoto camera. Given that the cross ratio and tangent point are basic projective invariants, a concentric semi-circular template is designed. Combined with the normalized line homography estimation method and the partitioned regularization estimation algorithm, the high-precision solution of initial values of intrinsic and extrinsic parameters of the telephoto camera is obtained. Further, considering the lens distortion, the integral distance between line segments is introduced, taking the minimum distance from the model line to the projection plane as the cost function, and a nonlinear optimization algorithm is adopted to refine the calibration parameters. Simulation and actual experimental results show that the proposed calibration method of the telephoto camera is effective, and has higher accuracy and robustness compared with the traditional method.

Key words measurement; telephoto camera; camera calibration; conics; line; partitioned regularization estimation

收稿日期: 2021-12-06; 修回日期: 2021-12-23; 录用日期: 2022-02-18

基金项目: 国家自然科学基金重大科研仪器研制项目(11727804)、国家自然科学基金(11872070)

通信作者: *suncong@whu.edu.cn

1 引言

长焦相机通常具有较高的空间分辨率,可获取更加丰富的目标细节信息,广泛用于战时空中侦察、战场毁伤评估、特定区域巡逻监视等军事领域和工业精密加工、航空摄影测量、变形监测、交通监视等民用领域^[1]。然而,长焦相机高精度定向和相机参数标定的潜在困难制约了其在实际摄像测量领域中的应用^[2]。随着焦距的增大,长焦成像系统的视场角减小,成像光束不断向光轴靠近,常规透视投影模型愈加趋向于产生旁轴成像效应,像点提取、成像模型和控制点等误差导致的标定误差也将会更加显著^[3-4]。

针对常规短焦或中等焦距的相机标定方法已较为成熟且应用广泛^[5-7],但随着成像系统焦距的增大,现有常规相机标定方法的适用性逐渐降低^[8]。Yang 等^[3]从成像透视变形物理模型出发,指出当且仅当像点噪声反比于成像系统焦距,才能在焦距增大的条件下获得同精度的相机标定参数,而 Percoco 等^[9]进一步揭示基于传统透视成像模型相机标定方法的成像系统的视场角应用下界为 10° 。分析可知,长焦小视场相机标定精度下降的主要原因有两点:一是视场角随着焦距的增大而急剧减小,成像过程趋于平行投影,待测目标可观测区域减小;二是采用常规透视投影模型对长焦相机的建模存在过参数化问题,成像模型的病态性随焦距的增大而愈加显著。

针对第一点,Xie 等^[10]提出消影点和直线段融合特征的长焦相机标定方法,而 Luhmann 等^[11]基于多站长焦相机并利用全景影像拼接技术合成较大视场的待测目标图像,在实际测量任务中难以保证全局影像拼接的运动约束^[3];王欢等^[12]则通过建立较大范围的高精度三维控制场来完成长焦相机标定。高昂的成本以及复杂的标定步骤制约了以上方

法的应用场景,而更多的方法从降低长焦小视场相机模型病态性出发,如 Stamatopoulos 等^[2]提出了改进透视投影模型,Liang 等^[4]采用正则化最小二乘平差提高长焦相机标定鲁棒性,另有学者采用仿射投影模型^[13]或多项式成像模型^[14]描述长焦相机成像过程。总的来说,长焦相机标定仍旧是一个亟待解决的研究难题。

基于此,本文就数字近景摄影测量环境下长焦相机标定技术瓶颈进行针对性改进,在深入分析长焦相机标定方程病态性形成机理的基础上,设计实现了基于圆锥曲线和直线段融合特征的长焦相机标定方法。该方法充分利用归一化直线单应求解方法和分部正则估计理论,进一步提高了标定方法的精度和鲁棒性。仿真和实际实验检验了提出方法的综合性能。

2 长焦相机标定原理

2.1 长焦相机标定病态性分析

以摄像机画幅对角线为参考,通常将焦距等于画幅对角线的镜头称为标准镜头,焦距长于标准镜头的镜头称为长焦镜头。文献^[2]指出,随着焦距进一步增大,长焦相机内外参数间的相关性逐渐增大,采用透视投影模型的成像方程病态性愈加显著,但文献中并未给出相关证明。实际上,迄今为止,相机标定领域关于焦距误差分析的相关研究仍然较少。Yang 等^[3]从透视变形角度出发,给出了长焦小视场相机标定精度下降的几何解释,而 Liang 等^[4]深入研究了焦距和相机参数不确定性的一阶误差模型。本节则从长焦相机内外参数间的复相关性角度出发,进一步揭示长焦小视场相机标定模型病态的形成机理。

考虑图 1 所示的经典中心透视成像模型,摄像机坐标系原点为摄像机光心 O_c , Z_c 轴与摄像机光

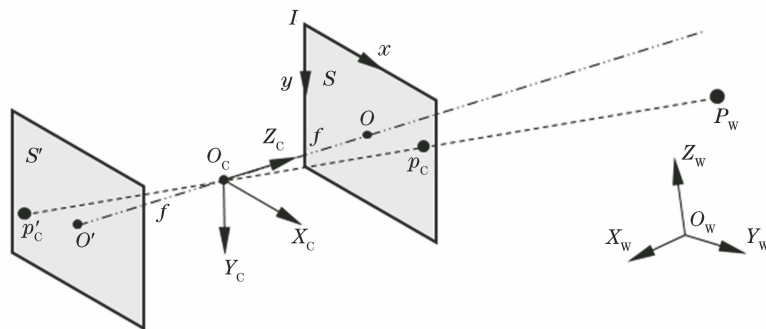


图 1 中心透视投影成像模型

Fig. 1 Imaging model of central perspective projection

轴重合。 S' 平面为实际成像靶面,称为反片, S 平面与 S' 平面关于光心 O_C 呈中心对称,称为正片。为了便于像点和对应物点空间位置的相互换算,图像 I 的坐标系通常都建立在正片平面 S 中, f 为中心透视投影焦距,光轴与像平面的交点 O 为像主点。三维世界点 $P_w(X_w, Y_w, Z_w)$ 在摄像机坐标系下的坐标为 $P_c(X_c, Y_c, Z_c)$,设相机在世界坐标系的外参数为 (\mathbf{R}, \mathbf{T}) ,则有

$$Z_c \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x & 0 & C_x & 0 \\ 0 & F_y & C_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中: p_c 为 P_c 的像面投影点,其坐标为 (u, v) ; p'_c

为实际成像靶面上像点; $[C_x, C_y]^T$ 是光轴与像面交点的主点像面坐标; F_x, F_y 分别是实际焦距长度与感光像元横、纵长度的比值; \mathbf{K} 为内参数矩阵。若令 $r_i (i=0, 1, \dots, 8)$ 表示姿态矩阵 \mathbf{R} 的元素, $\mathbf{T} = [t_x, t_y, t_z]^T$,则关于像点和世界点的共线方程可显式表达为

$$\begin{cases} \frac{u - C_x}{F_x} = \frac{r_0 X_w + r_1 Y_w + r_2 Z_w + t_x}{r_6 X_w + r_7 Y_w + r_8 Z_w + t_z} \\ \frac{v - C_y}{F_y} = \frac{r_3 X_w + r_4 Y_w + r_5 Z_w + t_y}{r_6 X_w + r_7 Y_w + r_8 Z_w + t_z} \end{cases}. \quad (2)$$

至此建立了理想的中心透视投影成像模型,而由于镜头设计、制造和组装等因素的影响,实际成像模型不可避免地存在镜头畸变,因此实际测量任务中还需要考虑镜头畸变模型^[15]。

将式(2)共线方程转化为像点关于相机内外参数以及世界点的函数形式 $p(x, y) = g(\mathbf{K}, \mathbf{R}, \mathbf{T}, P_w)$,则像点 i 关于内外参数的雅可比矩阵 \mathbf{J}_i 可以表示为

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial A_x} & \frac{\partial x}{\partial A_y} & \frac{\partial x}{\partial A_z} & \frac{\partial x}{\partial t_x} & \frac{\partial x}{\partial t_y} & \frac{\partial x}{\partial t_z} & \frac{\partial x}{\partial F_x} & \frac{\partial x}{\partial F_y} & \frac{\partial x}{\partial C_x} & \frac{\partial x}{\partial C_y} \\ \frac{\partial y}{\partial A_x} & \frac{\partial y}{\partial A_y} & \frac{\partial y}{\partial A_z} & \frac{\partial y}{\partial t_x} & \frac{\partial y}{\partial t_y} & \frac{\partial y}{\partial t_z} & \frac{\partial y}{\partial F_x} & \frac{\partial y}{\partial F_y} & \frac{\partial y}{\partial C_x} & \frac{\partial y}{\partial C_y} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

式中: A_x, A_y, A_z 分别表示组成姿态矩阵的绕 x, y, z 轴的旋转欧拉角。

像点关于相机内外参数以及三维控制点的法方程系数阵可表示为

$$\mathbf{N}_k = \mathbf{J}_\Lambda \left(\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{I} \right) \mathbf{J}_\Lambda^T, \quad (4)$$

式中: $\mathbf{J}_\Lambda = [\mathbf{J}_1^T \quad \mathbf{J}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{J}_n^T]^T$; σ 为单位权中误差; \mathbf{I} 为单位矩阵。为简化分析,假定同精度独立观测,则对应的协方差矩阵为

$$\mathbf{D}_k = \sigma^2 \mathbf{N}_k^{-1}. \quad (5)$$

随机变量 X, Y 的相关性可采用变量间的相关系数描述,相关系数定义如下:

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}, \quad -1 \leq \rho \leq 1, \quad (6)$$

式中: σ_X, σ_Y 分别为随机变量 X, Y 的标准差; σ_{XY} 为随机变量 X, Y 的协方差; $D(X), D(Y)$ 分别为变量 X, Y 的方差。综合式(5)、(6)即可计算得到相机内外参数间的相关系数。采用数值仿真显式观察内外参数相关性随焦距变化的趋势。

假定相机分辨率为 $1024 \text{ pixel} \times 1024 \text{ pixel}$,像

元尺寸为 $5 \mu\text{m}$,给定相机位姿并随机生成视场内均匀分布的20个三维点,成像焦距以间隔 10 mm 从 20 mm 增加至 150 mm ,根据理想透视投影成像模型生成理想像点,并叠加服从高斯分布的像点噪声。计算相机内外参数间的相关系数,并在每个焦距水平下重复200次实验。图2给出了有代表性的相机平移分量与等效焦距的相关系数随焦距增大的变化趋势。

由图2可知,相机内参数等效焦距与外参数平移分量强相关,且随着焦距的增大,二者的相关性更加显著,说明在焦距较大时,采用透视投影模型描述成像过程存在过参数化,而这也导致标定求解过程中法方程条件数过大,方程求解病态,解算鲁棒性和精度均有不同幅度的下降。

2.2 圆锥曲线和直线融合特征

相较于点特征,直线或曲线特征因其更强的鲁棒性以及更丰富的结构信息越来越受到研究者的重视。Agarwal等^[16]通过大量的实验得出,在充足的特征且足够多视图的前提下,基于点、线或圆锥曲线特征的平面单应估计精度基本一致,但圆锥曲线特

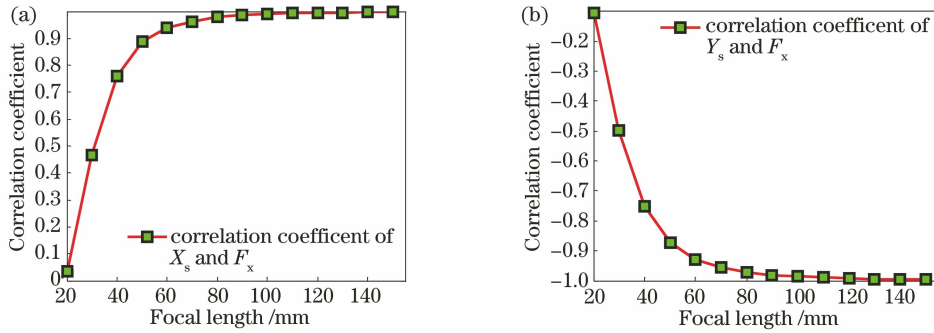


图 2 相机平移分量与等效焦距的相关系数随焦距的变化。(a) x 方向平移分量;(b) y 方向平移分量
Fig. 2 Correlation coefficient between translation component and equivalent focal length of camera varying with focal length. (a) Translation component in x direction; (b) translation component in y direction

征的鲁棒性更好;而 Kim 等^[17]进一步指出,圆锥曲线特征更易检测且鲁棒性更强,特别是在有遮挡的条件下,其优势更加突出。由此可见,针对本文长焦相机小视场应用场景,选择圆锥曲线和直线段融合特征将更有可能获取高精度鲁棒的相机标定结果。

基于此,本节设计了如图 3 所示的同心半圆弧

合作标志。以圆心坐标 O 为原点建立平面坐标系,两圆弧半径分别为 R_1, R_2 , 直径所在直线 L_0 。与两半圆依次相交于点 A, B, C, D 。选定直线 L_0 上外环外一点 E_1 , 任选定 A, B, C, D 中三点, 如 A, B, C , 定义直线交比为

$$\text{Cross}(E_1, A, B, C) = \frac{|E_1 A| |BC|}{|E_1 B| |AC|} \quad (7)$$

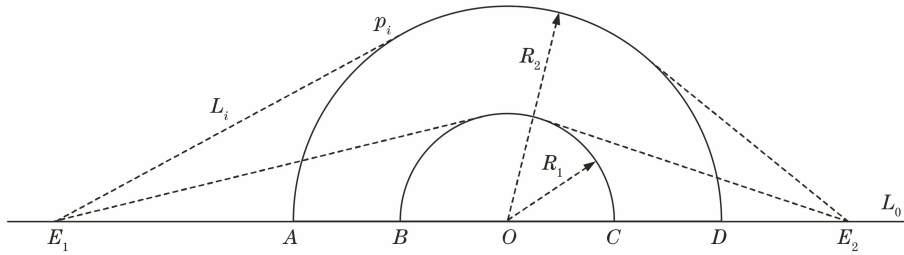


图 3 标准同心半圆弧合作标志

Fig. 3 Standard concentric semi-circular cooperative template

根据二次曲线的极点-极线关系,可确定 E_1 点至同心半圆弧的切线 $L_i (i = 1, 2)$, 即过直线 L_0 上圆弧外任一点可得到关于同心圆弧的两条切线, p_i 为切点。

标准同心圆弧经过相机射影变换后的典型视图如图 4 所示,同心圆弧退化为椭圆弧。根据直线交比射影变换不变的特性,存在约束 $\text{Cross}(E_1, A, B,$

$C) = \text{Cross}(E'_1, A', B', C')$ 。根据椭圆和直线提取结果并结合直线交比值,可确定 E_1 经过射影变换后的位置 E'_1 。

实际上,可选取 A, B, C, D 中的任意三点与点 E_1 计算交比值,同理在射影变换后根据 4 个不同交比值计算 4 个 E'_1 的坐标值,可采取加权平均方法提高点 E'_1 的定位精度。根据射影变换切点不变性质,标准模板上的切点经射影变换后仍应为椭圆弧的切点。

2.3 基于归一化直线的单应求解

令标定板所在平面为世界坐标系 XY 平面,则根据式(1)透视成像模型^[5],存在

$$\eta \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} [\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{T}] \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

式中: $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 为姿态矩阵前两列的列向量; \mathbf{H} 表示像

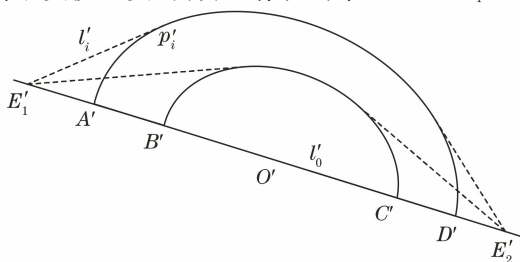


图 4 射影变换后同心半椭圆弧合作标志

Fig. 4 Cooperative concentric semi-elliptical template after projective transformation

面与标定板面的单应矩阵; η 为投影尺度因子。则代表直线的向量 L_i 经射影变换后变为 L'_i , 满足

$$H^T L'_i = \lambda L_i I, \quad (9)$$

式中: λ 为投影尺度因子。

当给定直线 L_0 上圆弧外 n 个点, 可得 $2n$ 条切线, 即可建立 $2n$ 个方程。由于单应矩阵有 8 个自由度, 当有多条直线时可采用最小二乘平差进行解算。鉴于常规的直线单应估计方法依赖于图像坐标系的选取, 当直线靠近坐标原点时, 单应求解将极度不稳定。本节引入归一化直线单应估计方法^[18], 进一步提高单应解算精度和鲁棒性。

给定一组像面直线 $l_i = [a_i, b_i, c_i]^T (i = 1, 2, \dots, n)$, 令 $t_1 = \sum_{i=1}^n a_i, t_2 = \sum_{i=1}^n b_i, t_3 = \sum_{i=1}^n c_i$, 定义变换 T_1 :

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_1/t_3 \\ 0 & 1 & -t_2/t_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

l_i 经变换 T_1 后变为 $l'_i = [a'_i, b'_i, c'_i]^T$, 且满足 $\sum_{i=1}^n a'_i = \sum_{i=1}^n b'_i = 0$, 变换 T_1 使得直线束坐标关于第三轴的相对分布更加均匀。进一步定义 $s =$

$\sqrt{[\sum_{i=1}^n (a_i'^2 + b_i'^2) / 2] \cdot \sum_{i=1}^n c_i'^2}$, 建立如下变换 T_2 :

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}. \quad (11)$$

分析易知, 存在退化情形, 如所有直线均通过坐标原点, 此时 $s \rightarrow \infty$ 。但在本文设计的同心圆弧模板中不存在这一退化情形。经变换 T_2 后 $l''_i = [a''_i, b''_i, c''_i]^T$ 满足约束 $\sum_{i=1}^n (a_i''^2 + b_i''^2) = 2 \sum_{i=1}^n c_i''^2$, 即所有直线至它们原点的平均距离等于 $\sqrt{2}$ 。最后进行归一化, 令 $l'''_i = l''_i / \|l''_i\|$ (将一个向量除以该向量的模, 进行归一化, 再将归一化结果赋值于这个变量), 则最终直线束坐标位于单位球上。

基于归一化直线的单应求解步骤具体如下, 给定直线 L_0 上圆弧外 $n (n \geq 2)$ 个点, 建立 $2n$ 个直线对应集合 $\{L_i \leftrightarrow l_i\}$ 。

1) 针对代表像面直线的向量 l_i 和代表模板直线的向量 L_i , 按照式(10)和(11)分别建立变换矩阵 T_1, T_2 与 T'_1, T'_2 ;

2) 将原始像面直线与模板直线分别进行变换, $l''_i = T_2 T_1 l_i, L''_i = T'_2 T'_1 L_i$, 并令变换后的直线模为 1, 进而得到新的直线对应集合 $\{L''_i \leftrightarrow l''_i\}$, 利用最小

二乘算法计算单应变换矩阵 H' ;

3) 解除归一化, 对应于原始图像的单应矩阵 $H = T_1^T T_2^T H' T'^{-T} T'^{-T}$ 。

2.4 直线段积分距离度量

本文相机标定中采用的平面模板直线和像面直线本质上是有限三维直线和有限二维直线段。如图 5 所示, 坐标系与相机内外参数定义同 2.1 节。 L 为目标平面直线段长度, 端点分别为 P_S, P_E 。直线段投影至像面二维直线段 l , 端点坐标为 p_s, p_e 。 π 为光心与直线段 l 确定的平面, N 代表平面单位法向量。假定相机内参数已知, 则所有直线提取结果可认为在归一化像面上。则模型直线段端点 P_S, P_E 至投影平面 π 的距离可表示为

$$s' = N \cdot (RP + T), \quad (12)$$

式中: P 为模板直线段任意一点位于坐标系 $O_w X_w Y_w Z_w$ 的坐标向量。

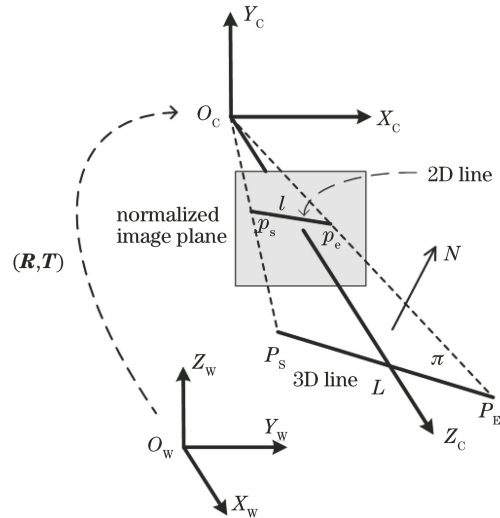


图 5 模板直线透视投影成像模型

Fig. 5 Perspective projection imaging model of 3D lines

传统的直线距离度量仅考虑直线段端点至对应直线的距离, 未考虑线段间夹角; 而若采用直线段的直线误差与中点误差和作为评价, 则忽略了直线段长度因素。基于此, 为进一步提高标定算法的精度和鲁棒性, 本文引入包含直线段端点与中点信息的积分距离度量^[19]。

定义直线段 \tilde{l} 上任意一点 \tilde{p} 至二维直线段 l 的距离为

$$s(\lambda) = s_s + \lambda'(s_e - s_s), \lambda' \in [0, 1], \quad (13)$$

式中: s_e, s_s 分别表示直线段首、尾端点至直线 l 的距离。将该距离的平方在其定义域内进行积分, 进而得到新的直线段间距离测度:

$$d^2(\tilde{l}, l) = \int_0^1 s^2(\lambda) d\lambda = \frac{1}{3} \cdot (s_s^2 + s_s s_e + s_e^2). \quad (14)$$

考虑 p_m 为 p_s 和 p_e 的中点, 容易得到

$$d^2(\tilde{l}, l) = \frac{1}{6} \cdot (s_s^2 + 4s_m^2 + s_e^2), \quad (15)$$

式中: s_m 表示直线段中点至直线 l 的距离。

当直线退化为点时, 式(15)定义的距离恰好为对应点间的欧氏距离。直线段积分距离度量综合考虑了两直线段的端点及中点距离、夹角、长度等因素, 更加符合直观理解, 形式简洁且更加鲁棒。

2.5 分部正则估计

基于平面模板相机标定的关键步骤之一就是高精度鲁棒求解模板平面与像面的单应矩阵, 而单应矩阵求解又可归结为参数最小二乘估计问题。随着焦距的增大, 相机内外参数的复共线性增强, 这极易导致法方程系数矩阵病态, 虽然此时线性最小二乘方法仍具有无偏性和最小方差等特性, 但较小奇异值影响方差的效应被剧烈放大, 难以得到期望的合理解^[20]。

基于此, 本节综合有偏估计中截断奇异值法和广义岭估计的优势, 引入分部正则估计方法^[20-21]。该方法的基本思想是采用截断参数将呈阶梯形分布的奇异值划分为相对较大和较小的两部分, 对较大的奇异值不进行修正, 采用广义岭估计仅对较小的部分奇异值进行修正。分部正则估计方法相较于截断奇异值法拥有更高的精度, 且比广义岭估计方法的鲁棒性更好。

考虑如下 Gauss-Markov 模型:

$$\begin{cases} \mathbf{L} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{\Delta} \\ E(\mathbf{\Delta}) = 0, D(\mathbf{\Delta}) = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1} \end{cases}, \quad (16)$$

式中: \mathbf{L} 、 \mathbf{A} 、 \mathbf{X} 分别是 $n \times 1$ 观测向量、 $n \times m$ 系数矩阵和 $m \times 1$ 未知参数向量; $\mathbf{\Delta}$ 为 $n \times 1$ 误差向量; σ_0^2 、 \mathbf{P} 分别表示单位权方差和权矩阵; 系数矩阵 \mathbf{A} 的秩为 m ; $E(\mathbf{\Delta})$ 、 $D(\mathbf{\Delta})$ 分别表示误差向量的均值和方差。

区别于岭估计直接在法系数矩阵对角线上附加较小正数, 广义岭估计可定义为

$$X_{\text{Greg}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{Q}\mathbf{K}'\mathbf{Q}^T)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{L}, \quad (17)$$

式中: \mathbf{Q} 为正交矩阵; $\mathbf{K}' = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_l)$, k_l 为广义岭估计的岭参数。易知 k_l 均为零时, 广义岭估计即退化为最小二乘估计; 当 k_l 均为相同的较小正数时, 广义岭估计退化为岭估计。对系数矩阵 \mathbf{A} 进行奇异值分解, 得到

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T, \quad (18)$$

式中: $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n]$ 、 $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$ 分别为矩阵 \mathbf{A} 的左、右奇异值向量; $\mathbf{\Lambda}$ 为奇异值按降序排列的对角矩阵; λ_i 为矩阵 \mathbf{A} 的奇异值。则对应的截断奇异值法的解的基本形式为

$$\mathbf{X}_{\text{TSVD}} = \sum_{i=1}^n \tau_i \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{L}}{\lambda_i} \mathbf{v}_i, \quad (19)$$

式中: τ_i 为滤波因子, $\tau_i = \begin{cases} 1 & 1 \leq i \leq k \\ 0 & k < i \leq n \end{cases}$ 。

分部正则估计方法^[20-21]结合截断奇异值法和岭估计方法的优势, 设计新的滤波因子 $\bar{\tau}_i$:

$$\bar{\tau}_i = \begin{cases} 1 & 1 \leq i \leq k \\ \lambda_i / (\lambda_i + \alpha_i) & k < i \leq n \end{cases}, \quad (20)$$

式中: α_i 为广义岭参数, 则分部正则估计解为

$$\hat{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^k \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{L}}{\lambda_i} \mathbf{v}_i + \sum_{i=k+1}^n \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{L}}{\lambda_i} \mathbf{v}_i. \quad (21)$$

截断参数和岭参数可采用 L 曲线法进行选取,

L 曲线法将 $\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{L}\|^2$ 和 $\|\hat{\mathbf{X}}\|^2$ 均看作岭参数 λ 的函数, 选取多个不同 α 值, 并分别以 $\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{L}\|^2$ 和 $\|\hat{\mathbf{X}}\|^2$ 作为横、纵坐标画图, 拟合得到关于 $(\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{L}\|^2, \|\hat{\mathbf{X}}\|^2)$ 的 L 形曲线, 而 L 形曲线上曲率最大点所对应的岭参数 α 即作为岭估计值^[20]。 L 曲线法综合权衡中误差 $\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{L}\|^2$ 和估值 $\|\hat{\mathbf{X}}\|^2$ 的影响, 对于奇异值呈阶梯形排列的岭参数选取效果显著。

至此, 便可将原病态方程阶梯形奇异值进行分割, 这样既保留了代表主成分信息的较大奇异值, 同时也能够采用岭估计对代表高频误差的小奇异值进行修正。该方法既能够保证解的分辨率, 又可大幅降低额外误差的引入。

2.6 标定算法流程

标定算法流程图如图 6 所示, 具体标定步骤如下:

1) 控制长焦相机采集不同方位下同心半圆平面靶板的足够视图, 采用 ELSDC(Ellipse and Line Segment Detector with Continuous formulation)算法^[22]进行椭圆和直线联合特征检测, 获取大小椭圆 Q_1 、 Q_2 , 直径方程 L'_0 , 以及交点 A, B, C, D ;

2) 选取平面靶板中直径两端延长线上至少两点 E_1 、 E_2 , 并根据式(7)分别计算 E_1 、 E_2 点至 A 、 B 、 C 、 D 4 点的交比值, 同理根据相同交比值获取射

影变换后的像面坐标 E'_1, E'_2 ;

3) 由 E'_1, E'_2 可得到关于同心圆弧的 4 条切线, 分别将像面特征直线与模板平面直线进行归一化变换, 并构造单应求解方程[式(9)];

4) 条件数判断, 若法方程系数矩阵 N 条件数 $\text{Cond}(N) < 100$, 直接采用线性最小二乘估计方法进行求解, 否则采用分部正则估计, 求解单应性变换矩阵 H' ;

5) 解除单应变换矩阵 H' 的归一化, 获取单应矩阵 H , 并分解得到相机内外参数初值^[5];

6) 基于直线段积分距离度量^[19], 以模板平面直线至投影平面的距离最小为目标函数:

$$J(\mathbf{K}, \mathbf{R}, \mathbf{T}) = \sum_{i=1}^n d^2(\tilde{l}_i, l_i), \quad (22)$$

综合考虑镜头畸变参数, 采用非线性迭代算法对相机参数进行优化求解。

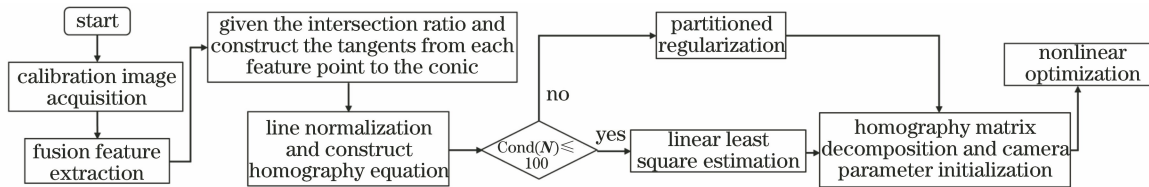


图 6 标定算法流程图

Fig. 6 Flow chart of calibration algorithm

3 长焦相机标定实验及分析

3.1 数值仿真

为验证提出的基于圆锥曲线和直线融合特征标定方法的有效性, 仿真中将其与现有典型标定算法进行比较, 检验提出算法在不同标定视图数目、焦距长度和噪声水平下的性能。

仿真配置如下: 摄像机分辨率为 $1024 \text{ pixel} \times 1024 \text{ pixel}$, 主点为图像中心, 像元尺寸为 $5 \mu\text{m}$, 镜头焦距从 20 mm 以步长 10 mm 增长至 110 mm 。根据文献[23], 同心圆弧大小半径比为 2 时可取得最优标定结果, 设置大小圆弧半径为 10 cm 和 5 cm 。在不作具体说明处采用默认仿真配置, 即图像噪声为 0.3 pixel , 标定视图数为 12, 在不同的误差水平进行 200 次独立仿真。数值仿真采用的主要对比算法如下:

1) Zhang^[5]方法, 采用经典张氏标定法, 以半同心圆弧与直径交点(A、B、C、D)、给定交比值确定的直径所在直线上的 E_i 、大小圆弧上的切点 p_i 作为合作特征点。

2) Concentric(ConC), 即基于同心圆的线性标定方法^[24], 仅以同心圆弧作为特征。

3) Multiple Lines(ML), 即基于多条切线的标定方法, 未对直线进行归一化处理, 且未采用分部正则估计求解。

4) Normalized Multiple Lines(NML), 即基于归一化多条切线的标定方法, 但未采用分部正则估计求解。

5) Multiple Lines with Ridge Estimation

(RML), 即基于多条切线的标定方法, 未对直线进行归一化处理, 但采用分部正则估计单应。

6) Normalized Multiple Lines with Ridge Estimation(RNML), 即基于归一化多条切线的标定方法, 并采用改进分部正则估计求解单应。

3.1.1 20 mm 焦距下视图数影响

首先检验在常规焦距(20 mm)条件下, 标定视图数目对于标定算法性能的影响。平面模板的法向量方向在单位视球内随机采样, 并在空间点 $[x, y, z]^T = [10, 20, 200]^T$ 周围(x 的变化范围为 ± 5 , y 的变化范围为 ± 10 , z 的变化范围为 ± 20) 随机采样, 获取合作模板面位置, 视图数目从 3 增至 12, 统计不同标定算法内参数相对标定误差的均方根(RMS), 如图 7 所示。鉴于相机内参数主点与等效焦距在横、纵方向分量的变化趋势基本一致, 本文仿真中仅给出 C_x, F_x 结果。

由图 7 所示, 随着标定视图数目的增加, 不同标定算法的标定误差均迅速下降, 且在视图数目增加至 8 时, 标定算法的相机内参数的相对误差趋于平稳。其中, ConC 方法的相对误差较大, 且相较于 Zhang 方法, 本文标定方法的误差曲线下降更为明显, 随着标定视图增加, 本文提出方法的内参数相对误差较小且鲁棒性更好。

3.1.2 20 mm 焦距下噪声影响

仿真中检验了不同噪声水平下采用不同标定算法对于 20 mm 焦距相机的标定效果。对像面像点施加零均值高斯白噪声, 噪声水平从 0.1 pixel 以间隔 0.1 pixel 增加至 1 pixel , 统计得到不同标定算法的相对标定误差 RMS 如图 8 所示。

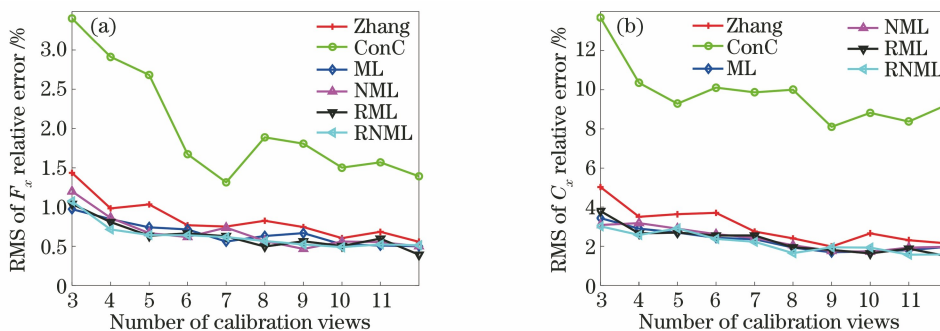


图 7 不同标定视图数下 20 mm 焦距(f)相机标定参数相对误差 RMS。(a) F_x ；(b) C_x

Fig. 7 RMS of relative error of calibration parameters of camera ($f=20$ mm) under different number of calibration views. (a) F_x ；(b) C_x

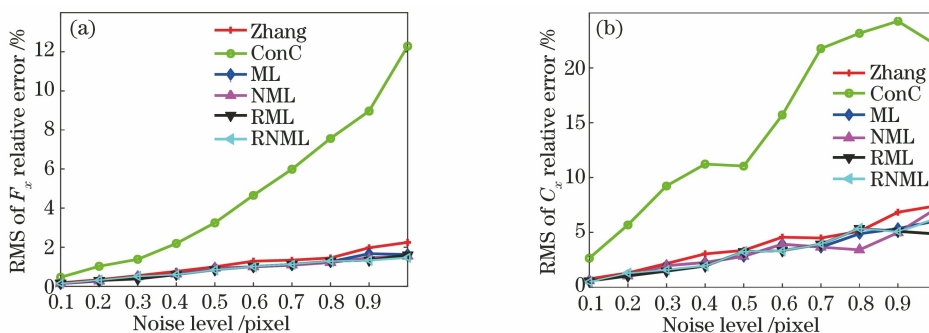


图 8 不同噪声水平下 20 mm 焦距相机标定参数相对误差 RMS。(a) F_x ；(b) C_x

Fig. 8 RMS of relative error of calibration parameters of camera ($f=20$ mm) under different noise level. (a) F_x ；(b) C_x

由图 8 可以看出,相机内参数的相对误差 RMS 随图像噪声水平的增加而近似线性增大,且相较于 ConC 和 Zhang 方法,本文方法的相对误差 RMS 随噪声水平的增加而近似线性增大的曲线相对较缓,说明所提出的标定算法的鲁棒性更高。此外,结合 3.1.1 节结果可知,在 20 mm 焦距条件下,ML、NML、RML、RNML 4 种算法的结果无明显区别,这也从侧面反映了在常规焦距条件下标定求解病态性不明显或不存在病态性。

3.1.3 100 mm 焦距下视图数影响

进一步检验在典型长焦(100 mm)条件下,标定视图数目对于不同标定算法性能的影响。在空间点 $[x, y, z]^T = [10, 20, 1100]^T$ 周围(x 的变化范围为 ± 5 , y 的变化范围为 ± 10 , z 的变化范围为 ± 30)随机采样,获取合作标定板位置,视图数目从 3 增至 12,统计得到不同标定算法的相对标定误差 RMS 如图 9 所示。

如图 9 所示,在 100 mm 焦距条件下,随着标定

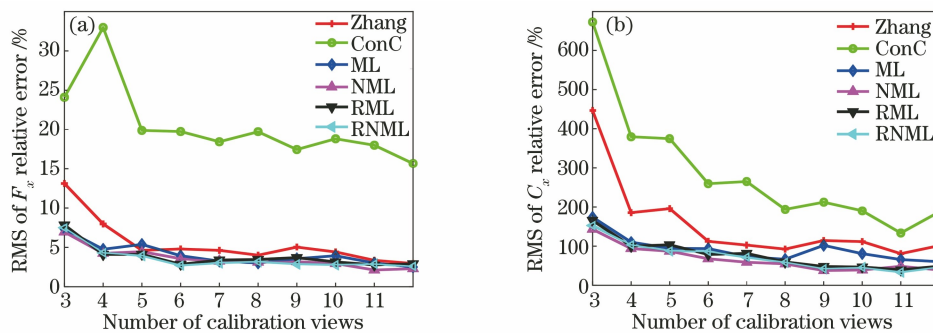
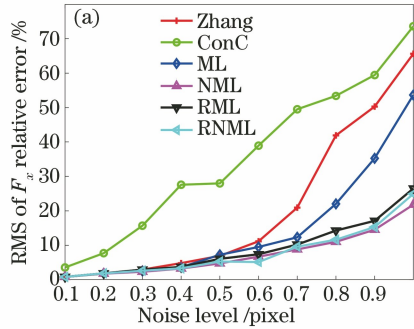


图 9 不同标定视图数下 100 mm 焦距相机标定参数相对误差 RMS。(a) F_x ；(b) C_x

Fig. 9 RMS of relative error of calibration parameters of camera ($f=100$ mm) under different number of calibration views. (a) F_x ；(b) C_x

视图的增加,不同标定算法的相对误差同样迅速下降,相较于 20 mm 焦距条件下标定结果误差明显增大,其中等效焦距 F_x 增加相对较小,而主点 C_x 相对误差剧烈增大。即便如此,标定误差在视图数目增至 8 时便趋于稳定。



3.1.4 100 mm 焦距下噪声影响

类似地,检验不同噪声水平下不同标定算法对于 100 mm 焦距相机的标定效果的影响。像点噪声水平从 0.1 pixel 以间隔 0.1 pixel 增加至 1 pixel,统计不同算法相对标定误差 RMS 如图 10 所示。

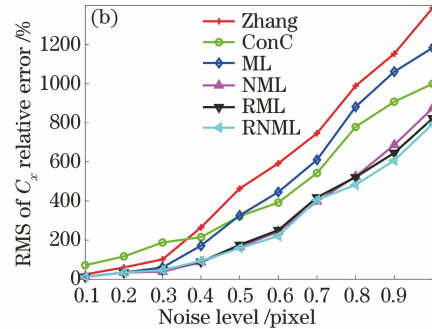


图 10 不同噪声水平下 100 mm 焦距相机标定参数相对误差 RMS。(a) F_x ; (b) C_x

Fig. 10 RMS of relative error of calibration parameters of camera ($f=100$ mm) under different noise level. (a) F_x ; (b) C_x

由图 10 可知,相机内参数相对误差 RMS 随噪声的增大而剧烈增大,且增大趋势相较于焦距为 20 mm 的情况更加显著。对于等效焦距 F_x ,ConC 方法的相对误差最为显著,Zhang 方法次之,本文方法的相对误差较小;而对于主点 C_x ,Zhang 方法和 ML 方法的相对误差甚至大于 ConC 方法,说明在 100 mm 焦距下,该标定模型已高度病态,采用非线性优化不能提高精度,反而使得结果进一步偏离真值。

此外可观察到采用了归一化处理的方法,即

NML 和 RNML 方法,略优于 ML 和 RML 方法,且 RML 方法优于 ML 方法。这说明归一化直线单应求解以及分部正则估计方法可有效改善长焦相机病态性,获得精度更高、鲁棒性更好的结果。

3.1.5 不同焦距影响

进一步检验不同焦距条件下不同标定方法的性能。相机焦距从 20 mm 以步长 10 mm 增加至 110 mm,移动标定板使得其尽量充满相机视场,不同方法的相对误差 RMS 如图 11 所示。

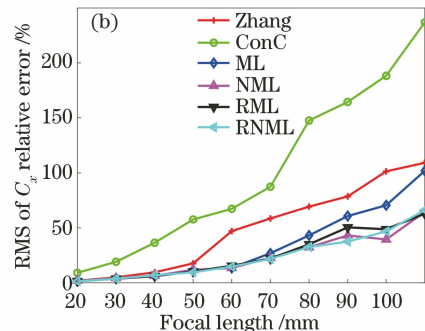
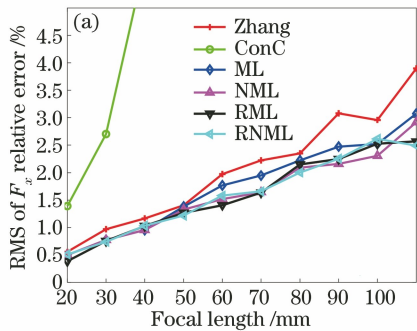


图 11 不同焦距下相机标定参数相对误差 RMS。(a) F_x ; (b) C_x

Fig. 11 RMS of relative error of camera calibration parameters under different focal lengths. (a) F_x ; (b) C_x

由图 11 可知,随着相机焦距的增大,各标定方法的相对误差 RMS 大体呈线性增大,ConC 方法的相对误差 RMS 增加最为显著,Zhang 标定方法次之,本文所提出方法的增长趋势相对较缓。其中,ML 方法的相对误差较大,而 NML 和 RNML 方法的标定误差相对较小,且该类方法随焦距的增大变化趋势平缓,说明直线归一化变换可有效提高标定

算法的鲁棒性。

3.2 实际标定实验

3.2.1 实验配置

为进一步检验本文所提出标定方法的性能,在实验室条件下进行了一系列实验。采用 Imperx CCD 相机(型号 IGV-B2520M-SC000,分辨率为 2456 pixel \times 2058 pixel,像元尺寸为 3.45 μ m),选

用典型常规焦距(35 mm)和长焦(75 mm) Kowa 镜头,同心半圆弧标定模板的半径分别为 2.5 cm 和 5 cm。平面标定模板在视场内灵活放置,每组实验均采集 24 幅不同方位下的标定模板图像。

3.2.2 椭圆以及直线特征检测

基于 ELSDc 算法^[22]对获取的平面模板进行椭圆和直线联合特征检测,典型检测结果如图 12 所示。可见,ELSDc 算法检测椭圆和直线段的效果较

好,可正确检测所有椭圆弧和直线段,几乎不存在虚检和漏检。特别地,针对仅部分可观测椭圆弧以及直线段,ELSDc 算法亦能取得比较理想的检测结果,这对于长焦相机较小的观测视场检测具有重要意义。考虑到圆弧和直线段特征自身的宽度以及图像噪声,ELSDc 算法实际检测到多个圆弧以及多条直线段。

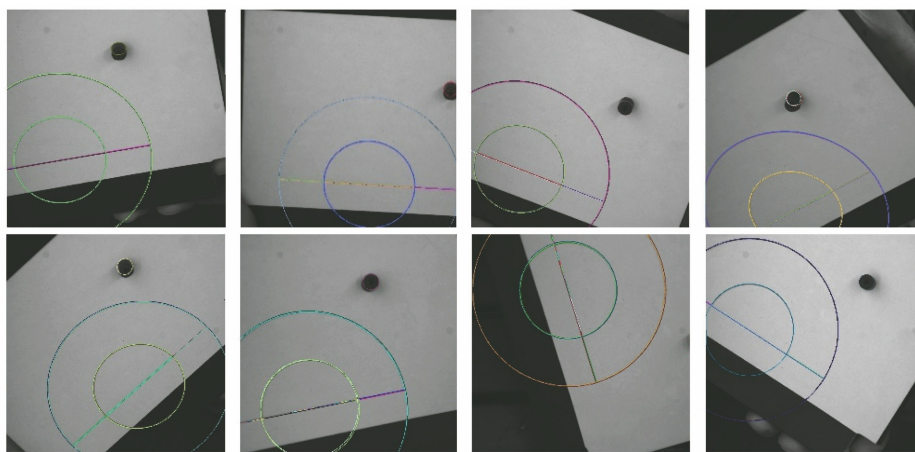


图 12 同心椭圆弧识别结果

Fig. 12 Detection results of concentric elliptical template

为进一步提高检测精度,将 ELSDc 算法输出的初始检测结果对应于同一圆弧的多个椭圆并进行加权平均,对对应于同一直线段的多条直线段进行拟合,将处理后的圆锥曲线和直线段特征作为标定算法输入。

3.2.3 标定结果及精度评价

标定实验主要分为两组,一组采用常规 35 mm 焦距镜头,另一组采用 75 mm 长焦镜头,每组实验均采集 24 个不同方位标定模板图像,采用仿真中典型标定算法对两组相机进行标定。此处需要说明的

是,实际实验中将 ML、NML、RML、RNML 4 种算法合并为两种(ML-RML 和 NML-RNML),即在算法中加入条件数判断:在条件数较大 [$\text{Cond}(N) > 1000$] 时,采用分部正则估计算法;当条件数较小时,直接进行解算。同时,考虑到张氏棋盘格标定法在近景常规镜头标定问题中的优良表现,本实验设计额外适宜的棋盘格标志(使其尽量充满相机视场),采用张氏棋盘格标定法作为参照,各方法标定结果如表 1 和表 2 所示,其中 (k_1, k_2) 、 (k_3, k_4) 分别表示径向和切向畸变的前两阶系数。

表 1 35 mm 焦距条件下不同标定算法的结果

Table 1 Results of different calibration algorithms under condition of 35 mm focal length

Method	Zhang's checkerboards	Zhang	ConC	ML-RML	NML-RNML
Cond	24.4512	27.8839	31.5621	25.7813	24.3749
F_x	10201.9479	10278.1560	9878.3110	10277.8873	10214.9767
F_y	10152.2879	10237.8088	9844.5762	10242.7139	10163.7846
C_x	1212.2449	1188.0651	1239.5327	1255.4521	1212.6460
C_y	1071.7819	999.1277	1274.9569	1057.1832	1094.4985
k_1	-0.2650	-0.2380		-0.2760	-0.2698
k_2	-0.9880	-2.2153		0.3085	-1.3301
k_3	0.0046	0.0040		0.0041	0.0050
k_4	-0.0022	-0.0018		-0.0019	-0.0028
RMS / pixel	0.1875	0.2071		0.2064	0.1793

表 2 75 mm 焦距条件下不同标定算法的结果

Table 2 Results of different calibration algorithms under the condition of 75 mm focal length

Methods	Zhang's checkerborads	Zhang	ConC	ML-RML	NML-RNML
Cond	24352.7465	26486.3694	25456.2581	89.7586	28.1650
F_x	22506.5159	20634.8147	28410.4990	21131.5526	20981.3379
F_y	22471.8806	20544.4192	28374.5081	21128.8873	20867.2976
C_x	1055.5585	1213.2326	1693.0702	1284.2126	1267.5908
C_y	494.1133	467.6265	595.6751	380.3522	428.9498
k_1	0.2890	0.2366		0.0469	0.1575
k_2	25.8882	-14.4427		-3.4698	8.7873
RMS /pixel	0.1594	0.1651		0.1628	0.1605

通过条件数法判定可知,在 35 mm 焦距条件下,该标定方程不存在严重病态性(条件数为 25.7813),以经典张氏棋盘格标定结果为参照评估各标定方法的性能。如表 1 所示,除 ConC 方法外,其他方法的标定结果与张氏棋盘格标定方法的基本一致,说明标定结果正确可靠。此外可观察到采用 RML 和 RNML 方法得到的结果更接近于参考值,且 RNML 方法的重投影误差更小,这说明 ConC 方法的标定精度较低,RML 和 RNML 方法的标定精度优于 Zhang 方法,采用直线归一化有助于获取更高精度的标定结果。

鉴于长焦镜头畸变较小,为进一步减少优化参数、提高长焦相机标定算法的鲁棒性,在进行长焦相机标定时,实验中只考虑前两项径向畸变系数(k_1 , k_2)。类似地,通过条件数法可判定 75 mm 焦距条

件下该标定方程存在严重病态(条件数为 26531.3679),张氏棋盘格方法虽然仍能输出最小的重投影误差,其标定结果已不再可信。相较之下,采用归一化直线单应求解并结合分部正则估计的 RNML 方法的条件数(28.1650)明显降低,说明该方法的求解更加鲁棒,可信度更高。

为进一步验证标定结果的精度,采取前文标定方法标定均装备有 75 mm Kowa 镜头的立体视觉系统,利用标定参数和同步获得的图像对,重建 10 个视场内任意放置的平面棋盘格结构,并将重建后的特征点坐标拟合为平面,计算重建点与拟合平面的离面误差。采用不同标定方法输出标定参数的典型重建结果如图 13 所示,并统计采用不同标定参数重建的 10 个不同姿态下所有重建三维点离面中误差,如表 3 所示。

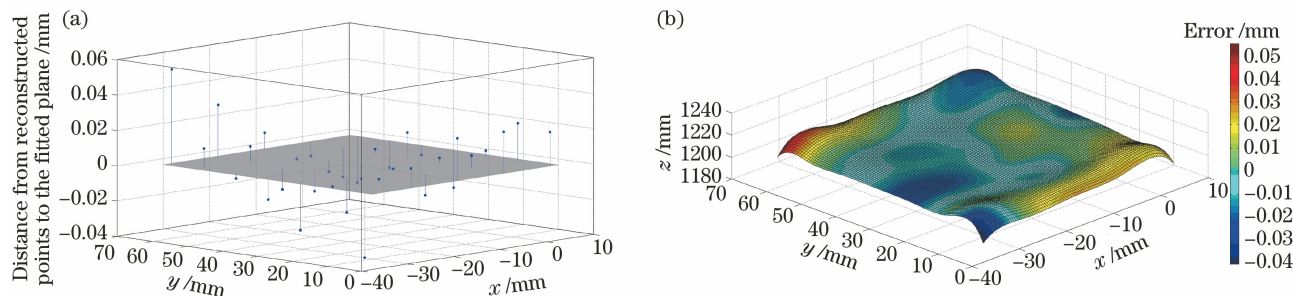


图 13 立体长焦相机平面模板典型重建结果。(a)重建的三维点集及拟合平面;(b)重建平面误差分布

Fig. 13 Typical reconstruction results of stereo telephoto camera plane template. (a) Reconstructed 3D checkerboard points and fitted plane; (b) error distribution of reconstructed plane

图 13(a)为重建的三维点集及对应的拟合平面,尽管二者存在细微偏差,不同标定参数所对应的重建三维点集均能较好地与拟合平面吻合。图 13(b)为重建平面的误差分布,色坐标表征的是三维

点集重建平面的离面误差(单位为 mm)。易观察到重建平面误差在面内大体呈中心对称,平面模板边缘处的误差相对较大。

表 3 采用不同标定方法输出参数重建的离面位移中误差 RMS

Table 3 RMS of off-plane displacements reconstructed by output parameters of different calibration methods

Method	Zhang's checkerborads	Zhang	RML	RNML
RMS /mm	0.0243	0.0239	0.0191	0.0190

进一步由表 3 可知,采用不同标定方法的输出参数得到的离面中误差 RMS 均相对较小,最大仅为 0.0243 mm。其中 RML、RNML 两种方法的平面重建精度略优于张氏标定方法,说明本文提出的长焦相机标定方法正确有效,精度可靠。张氏棋盘格标定方法虽然拥有最小的重投影误差,但并不意味着有最高的测量精度。此外,也可观察到,尽管标定参数中的主点参数已大幅偏离图像中心,取值不在合理范围内,但重建得到的测量精度仍相对较高,究其原因是在标定参数中的径向畸变系数极大地补偿了主点偏移,这也进一步说明在成像过程中相机内参数是协同作用的。

4 结 论

研究了长焦相机标定方程病态性的形成机理,研究发现随着焦距增大,相机内参数不确定度以及内外参数间相关性均随之增大。在此基础上,设计了同心半圆弧平面标志,提出了基于圆锥曲线和直线段融合特征的长焦相机标定方法。为进一步提高标定方法的精度和鲁棒性,采用了基于归一化直线单应估计方法,并引入分部正则估计理论。仿真和实际实验结果显示,所提出的长焦相机标定方法操作灵活、正确有效,且相较于传统标定方法,其标定精度和鲁棒性更高。

参 考 文 献

- [1] Percoco G, Guerra M G, Salmeron A J S, et al. Experimental investigation on camera calibration for 3D photogrammetric scanning of micro-features for micrometric resolution[J]. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2017, 91(9/10/11/12): 2935-2947.
- [2] Stamatopoulos C, Fraser C S, Cronk S. On the self-calibration of long focal length lenses [EB/OL]. [2021-05-03]. <https://www.isprs.org/proceedings/XXXVIII/part5/papers/110.pdf>.
- [3] Yang X L, Fang S P. Effect of field of view on the accuracy of camera calibration[J]. *Optik*, 2014, 125(2): 844-849.
- [4] Liang M P, Huang X Y, Chen C H, et al. Robust calibration of cameras with telephoto lens using regularized least squares[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, 2014: 689429.
- [5] Zhang Z. A flexible new technique for camera calibration [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2000, 22(11): 1330-1334.
- [6] Zhang B, Zhu D L. Improved camera calibration method and accuracy analysis for binocular vision[J]. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2021, 35(9): 2155010.
- [7] Su S, Luo Y, Yang K K, et al. A novel camera calibration method based on multilevel-edge-fitting ellipse-shaped analytical model [J]. *IEEE Sensors Journal*, 2020, 20(11): 5818-5826.
- [8] Labe T, Forstner W. Geometric stability of low-cost digital consumer cameras [EB/OL]. [2021-05-06]. <https://www.isprs.org/proceedings/XXXV/congress/comm1/papers/95.pdf>.
- [9] Percoco G, Salmerón A J S. Photogrammetric measurement of 3D freeform millimetre-sized objects with micro features: an experimental validation of the close-range camera calibration model for narrow angles of view [J]. *Measurement Science and Technology*, 2015, 26(9): 095203.
- [10] Xie W H, Xue Y C, Zhai L, et al. Camera calibration with long focal length using building natural features [J]. *Proceedings of SPIE*, 2011, 8006: 800614.
- [11] Luhmann T, Tecklenburg W. 3-D object reconstruction from multiple-station panorama imagery [EB/OL]. [2021-05-06]. https://www.isprs.org/proceedings/XXXIV/5-W16/papers/PanoWS_Dresden2004_Luhmann_b.pdf.
- [12] 王欢, 周凌, 张鑫, 等. 检校场标定长焦航测相机参数[J]. *光学精密工程*, 2018, 26(2): 435-441. Wang H, Zhou L, Zhang X, et al. Calibration parameters of long focal aerial mapping camera by means of calibration field [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2018, 26(2): 435-441.
- [13] Fraser C S, Yamakawa T. Insights into the affine model for high-resolution satellite sensor orientation [J]. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 2004, 58(5/6): 275-288.
- [14] Luber A, Reulke R. Validation of a polynomial camera model for generic cameras: calibration of catadioptric, fish-eye, short- and long focal length cameras [C] // 2009 24th International Conference Image and Vision Computing New Zealand, November 23-25, 2009. Wellington, New Zealand. New York: IEEE Press, 2009: 11060053.
- [15] Weng J, Cohen P, Herniou M. Camera calibration with distortion models and accuracy evaluation [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1992, 14(10): 965-980.
- [16] Agarwal A, Jawahar C V, Narayanan P J. A survey of planar homography estimation techniques [EB/OL]. [2021-05-06]. <https://cdn.iiit.ac.in/cdn/cvit>.

- iiii. ac. in/images/JournalPublications/2005/A _ survey_of_planar_homography_estimation.pdf.
- [17] Kim J S, Gurdjos P, Kweon I S. Euclidean structure from confocal conics: theory and application to camera calibration[J]. *Computer Vision and Image Understanding*, 2010, 114(7): 803-812.
- [18] Zeng H, Deng X M, Hu Z Y. A new normalized method on line-based homography estimation [J]. *Pattern Recognition Letters*, 2008, 29(9): 1236-1244.
- [19] Zhang Y Q, Li X, Liu H B, et al. Pose optimization based on integral of the distance between line segments[J]. *Science China Technological Sciences*, 2016, 59(1): 135-148.
- [20] 冯壮壮, 徐工. 大地测量病态线性问题解算的奇异值修正[J]. *山东理工大学学报(自然科学版)*, 2019, 33(3): 51-54.
Feng Z Z, Xu G. An improved singular value decomposition method for solving ill-linear problem in geodesy [J]. *Journal of Shandong University of Technology (Natural Science Edition)*, 2019, 33(3): 51-54.
- [21] 吴太旗, 邓凯亮, 黄谟涛, 等. 一种改进的不适定问题奇异值分解法[J]. *武汉大学学报·信息科学版*, 2011, 36(8): 900-903, 880.
Wu T Q, Deng K L, Huang M T, et al. An improved singular values decomposition method for ill-posed problem [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2011, 36(8): 900-903, 880.
- [22] Patraucean V, Gurdjos P, von Gioi R G. Joint a contrario ellipse and line detection [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2017, 39(4): 788-802.
- [23] Kim J S, Gurdjos P, Kweon I S. Geometric and algebraic constraints of projected concentric circles and their applications to camera calibration[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2005, 27(4): 637-642.
- [24] Zhang B W, Li Y F, Chen S Y. Concentric-circle-based camera calibration[J]. *IET Image Processing*, 2012, 6(7): 870-876.