第 42 卷 第 11 期/2022 年 6 月/光学学报 研究论文

光学学报

基于求导-希尔伯特变换-反投影的源直线扫描计算机断层成像解析重建

戈文杰[1]，余海军[2]，陈杰[2]，倪松[1]，刘丰林[1,2,3*]

[1]重庆大学机械与运载工程学院，重庆 400044；

[2]重庆大学光电技术及系统教育部重点实验室，重庆 400044；

[3]重庆大学工业 CT 无损检测教育部工程研究中心，重庆 400044

摘要 针对较大视场高分辨率微焦点计算机断层成像(micro-CT)提出了一种射线源平移 CT(STCT)成像方法，该方法采用基于图像全变差最小化的联合迭代(SIRT-TV)图像重建算法，存在图像重建时间较长、计算量大等问题。对斜坡滤波器进行分解，且基于傅里叶变换性质，推导了一种基于求导-希尔伯特变换-反投影(DHB)的 STCT 解析重建算法(STCT-DHB)。仿真和实际实验结果表明，STCT-DHB 算法能有效抑制图像的高频噪声，在保证重建图像的质量的同时可提高图像重建效率。

关键词 X 射线光学；计算机断层成像；源直线扫描；解析重建；希尔伯特变换

中图分类号 TP391 **文献标志码** A **DOI**：10.3788/AOS202242.1134025

Analytical Reconstruction for Source Translation Scanning Computed Tomography Based on Derivative-Hilbert Transform-Back projection

Ge Wenjie[1], Yu Haijun[2], Chen jie[2], Ni Song[1], Liu Fenglin[1,2,3*]

[1] *College of Mechanical and Vehicle Engineering, Chongqing University, Chongqing* 400044, *China*;

[2] *Key Laboratory of Optoelectronic Technology and Systems, Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing* 400044, *China*;

[3] *Engineering Research Center of Industrial Computed Tomography Nondestructive Testing, Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing* 400044, *China*

Abstract Aiming at large field of view and high-resolution microfocus computed tomography (micro-CT), a source translation based CT (STCT) imaging method is proposed. This scanning method adopts the simultaneous iterative reconstruction algorithm based on the minimization of image total variation (SIRT-TV), which has problems such as long image reconstruction time and large amount of calculation. The ramp filter is divided and based on the properties of Fourier transform to derive a STCT analytical reconstruction algorithm (STCT-DHB) based on derivative-Hilbert transform-back projection (DHB). Simulation and practical experiment results show that the STCT-DHB algorithm can effectively suppress high-frequency noise of the image, and improve the efficiency of image reconstruction while maintaining the quality of the reconstructed image.

Key words X-ray optics; computed tomography; source translation scanning; analytical reconstruction; Hilbert transform

收稿日期：2021-11-19；**修回日期**：2021-12-14；**录用日期**：2022-01-13

基金项目：国家自然科学基金(62171067)

通信作者：*liufl@cqu.edu.cn

1 引 言

微焦点计算机断层成像(micro-CT)技术能够以具有微米分辨率的无损方式对物体进行三维成像[1-2],被广泛应用于工业生产、材料科学、地球物理、生物科学和古生物学等领域中[3]。通常,micro-CT 成像系统中成像视场与成像分辨率参数相互制约,在进行高分辨率成像时,检测对象尺寸受限,且将样品制备到合适的尺寸存在困难,如生物样本、化石和矿石等[4-6],即对大尺寸物体进行高分辨率成像存在困难。

一些学者研究了不同的 CT 扫描方式和相关理论[7],如通过偏置探测器[8]或者多次旋转平移扫描的方式[9]来增大成像视场。探测器偏置扫描是通过移动的方式或者使用较长的探测器,让探测器能探测到穿过感兴趣区域的射线,该方法最多可将视场范围扩展到原来的两倍[10]。在多次旋转平移扫描 CT(RTCT)数据采集过程中,射线源和平板探测器保持固定,被扫描试件依次绕与探测器平行的多个旋转中心旋转一周,以获取多组不完整投影,再重排为完整投影。采用多段 RTCT 需要设计特定的扫描模式[11],或者对采集到的投影数据进行重排,该过程增加了计算量,且会降低图像的分辨率[12]。

最近,Yu 等[13]提出了一种射线源平移扫描 CT(STCT)成像方法,其扫描方式为将微焦点射线源和平板探测器布置在检测物体两侧,物体靠近射线源一侧以获得尽可能高的放大比和空间分辨率,射线源平行于探测器进行直线平移运动以采集物体在不同角度下的投影数据。相比偏置扫描与 RTCT,STCT 可以通过射线源平移的方式方便地调整成像视场,可较好满足较大尺寸待测物体高分辨 CT 成像需求。

STCT 类似于直线扫描 CT,其重建算法可分为解析和迭代两大类。其中,解析类算法的优点是计算量小、重建速度快[14]。Smith 和 Singh[15]针对射线源直线扫描轨迹,证明了其在无限长轨迹条件下可以实现完全重建,同时开发了相应的滤波反投影(FBP)重建算法。结果表明,该算法重建的图像的质量可达到与圆周扫描轨迹接近的图像质量。伍伟文等[16]针对相对平行直线扫描 CT(PTCT),基于傅里叶积分定理推导了一种新的滤波反投影重建算法(PTCT-FBP),提高了成像效率。李雷等[17]在此基础上提出了一种基于 Radon 逆变换的解析重建算法,该算法对高频噪声有一定的抑制作用,同时能够保证较高的重建速度。

在 STCT 扫描中,射线束未能包含整个物体,投影数据被截断。由于射线穿过物体的衰减系数的线积分只与路径有关,与方向无关,故在之前研究中[13],通过反转积分路径对投影数据进行重组,将所有收敛到一个探测器单元的 X 射线组成一个投影角度,这样重组后的 X 射线可覆盖整个物体,实现全局投影,解决了投影数据截断的问题。因此,可以进行一系列解析分析,包括傅里叶切片定理、FBP 型算法等。前期研究[13]中采用的是基于图像全变差(TV)最小化的联合迭代重建(SIRT)算法对物体进行成像,存在图像重建时间长、计算量大等问题。

为此,本文提出了一种基于求导-希尔伯特变换-反投影(DHB)的 STCT 解析重建算法(STCT-DHB)。该算法的频域特性使其能够抑制一部分高频噪声[18],能够在提高图像重建速度的同时保证成像质量。

本文第 2 节建立了 STCT 平面几何模型,基于傅里叶变换性质,推导了 STCT 的 DHB 重建公式。针对单段 STCT 扫描获取的投影数据不完备问题,采用了多段 STCT 扫描(mSTCT)方案,并给出了冗余数据加权方案。第 3 节进行了仿真实验和实际实验以分析重建算法的性能。最后一节进行了总结。

2 理 论

2.1 STCT 几何模型

STCT 扫描方式如图 1 所示,扫描对象靠近射线源且与平板探测器(FPD)保持位置固定,射线源沿平行于探测器中心层的方向直线移动以获取不同角度的投影数据。为方便描述,建立固定坐标系 o-xyz:原点 o 与扫描对象中心重合;x 轴平行于射线源运动轨迹,以射线源运动方向为正;y 轴垂直于探测器平板面,正方向指向探测器一端;z 轴平行于探测器平面,向上为正。

2.2 STCT-DHB 重建算法

STCT 二维几何模型如图 2 所示,其中:τ 为射线源的运动轨迹;L 和 H 为中心 o 到射线源轨迹 τ 和探测器中心的距离;φ 为射线与 y 正半轴的夹角;θ 为射线源平移方向与 x 正半轴的夹角,均以顺时针方向为正;r 为射线与中心 o 的距离,与 x 正半轴同方向时为正;s 为探测器和物体中心连线与射线源位置的距离,d 为探测器和物体中心连线与像元的距离,均以位于 x 正半轴时为正。

在 STCT 扫描中,对于任意线性衰减系数为

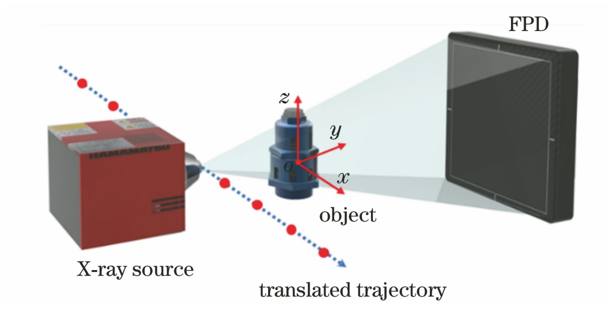

图 1 STCT 扫描方式示意图

Fig. 1 Illustration of STCT scanning mode

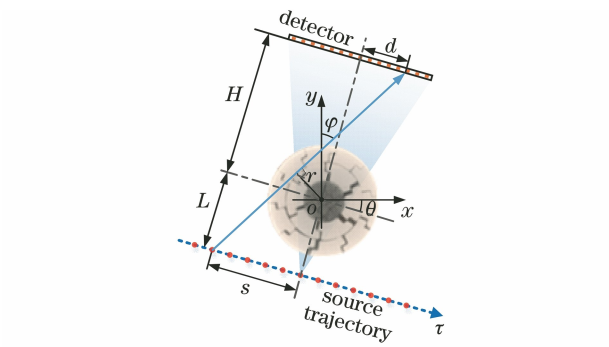

图 2 STCT 平面几何模型

Fig. 2 Planar geometric model of STCT

$f(x,y)$的物体,其投影可表示为

$$p(r,\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\times \delta(x\cos\varphi-y\sin\varphi-r)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{1}$$

式中:$p(r,\varphi)$为投影数据;$\delta(\cdot)$为狄拉克函数。对$p(r,\varphi)$沿着 r 方向进行一维傅里叶变换[19],则有

$$P(w,\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(r,\varphi)\exp(-\mathrm{j}2\pi wr)\mathrm{d}r= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\delta(x\cos\varphi-y\sin\varphi-r)\times \exp(-\mathrm{j}2\pi wr)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}r, \tag{2}$$

式中:w 为频率。由狄拉克函数性质$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x_0-x)\mathrm{d}x=f(x_0)$[20]可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x\cos\varphi-y\sin\varphi-r)\exp(-\mathrm{j}2\pi wr)\mathrm{d}r= \exp[-\mathrm{j}2\pi w(x\cos\varphi-y\sin\varphi)]。 \tag{3}$$

将式(3)代入式(2),整理可得

$$P(w,\varphi)= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\exp[-\mathrm{j}2\pi w(x\cos\varphi-y\sin\varphi)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y。 \tag{4}$$

已知 $f(x,y)$的二维傅里叶变换[19]为

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\exp[-\mathrm{j}2\pi(ux+vy)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{5}$$

对比式(4)和式(5)可知,$P(w,\varphi)=F(w\cos\varphi,-w\sin\varphi)$,即$P(w,\varphi)$在 w 处的值与$f(x,y)$的二维傅里叶变换 $F(u,v)$中 $u=w\cos\varphi,v=-w\sin\varphi$ 处的值相等。

对于单段 STCT 扫描,理论上探测器无限长,则可获得 $\varphi\in(-\pi/2,\pi/2)$的投影数据,直接通过二维傅里叶逆变换就能实现对断层图像 $f(x,y)$的重建,即

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u,v)\exp[\mathrm{j}2\pi(ux+vy)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{6}$$

令 $u=w\cos\varphi,v=-w\sin\varphi$,则

$$\begin{cases} |J|=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial w} & \dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial v}{\partial w} & \dfrac{\partial v}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -w\sin\varphi\\ -\sin\varphi & -w\cos\varphi\end{vmatrix}=-w, \\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v=w\mathrm{d}w\mathrm{d}\varphi \end{cases} \tag{7}$$

式中:$|J|$为雅可比因子。将式(4)和式(7)代入式(6),整理可得

$$f(x,y)=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\infty}^{+\infty} P(w,\varphi)|w|\times \exp[\mathrm{j}2\pi w(x\cos\varphi-y\sin\varphi)]\mathrm{d}w\mathrm{d}\varphi, \tag{8}$$

式中:$|w|$为斜坡滤波算子在频域空间的形式,该算子具有高通滤波效果。式(8)即为 STCT 在平行束表示投影情况下的滤波反投影算法表达式。

如果将斜坡滤波器分解为求导运算和求希尔伯特变换两个部分[21],即

$$|w|=\mathrm{j}2\pi w\frac{1}{\mathrm{j}2\pi}\mathrm{sgn}(w), \tag{9}$$

式中:$\mathrm{sgn}(w)$为符号函数;$\mathrm{j}2\pi w$ 为求导算子的傅里叶变换;$\mathrm{sgn}(w)/\mathrm{j}$ 是希尔伯特卷积核 $h(s)=1/\pi s$ 的傅里叶变换,其中 s 为空域变量。将式(9)代入式(8)中可得

$$f(x,y)=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\infty}^{+\infty} P(w,\varphi)\mathrm{j}2\pi w\frac{1}{\mathrm{j}2\pi}\mathrm{sgn}(w)\times \exp[\mathrm{j}2\pi w(x\cos\varphi-y\sin\varphi)]\mathrm{d}w\mathrm{d}\varphi。 \tag{10}$$

傅里叶变换具有两个性质[22],如下所示。

1) 性质 1

$\mathrm{sgn}(w)/\mathrm{j}$ 是希尔伯特卷积核 $1/\pi s$ 的傅里叶变

换。根据希尔伯特变换定义,有

$$h(r,\varphi)=p(r,\varphi)*\frac{1}{\pi r}=\int_{-\infty}^{+\infty}P(w,\varphi)\frac{1}{\mathrm{j}}\mathrm{sgn}(w)\exp(\mathrm{j}2\pi wr)\mathrm{d}w, \tag{11}$$

式中:* 为卷积符号;$h(r,\varphi)$为 $p(r,\varphi)$沿着 r 方向的希尔伯特变换。

2) 性质 2

在傅里叶域乘以 j2πw 相当于在空间域求导。因此,对投影 $p(r,\varphi)$沿着 r 方向求偏导可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial p(r,\varphi)}{\partial r}\exp(-\mathrm{j}2\pi wr)\mathrm{d}r=P(w,\varphi)\mathrm{j}2\pi w。 \tag{12}$$

整理式(10),并将式(11)和式(12)代入其中,可得

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}[P(w,\varphi)\mathrm{j}2\pi w]\frac{1}{\mathrm{j}}\mathrm{sgn}(w)\times\exp[\mathrm{j}2\pi w(x\cos\varphi-y\sin\varphi)]\mathrm{d}w\right\}\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial p(r,\varphi)}{\partial r}\frac{1}{\pi(x\cos\varphi-y\sin\varphi-r)}\mathrm{d}r, \tag{13}$$

式(13)即为平行束表示形式下 STCT 的 DHB 重建算法表达式,分为求导、希尔伯特变换和反投影三个步骤。

2.3 扇形束 STCT-DHB 重建

在 STCT 实际扫描过程中,投影通常以射线源的局部坐标 s 和探测器单元的局部坐标 d 为索引,即以扇形束的方式表示。令 $\hat{p}_\theta(s,d)$为以参数(s,d)表示的投影,如图 2 所示,当(r,φ)与(s,d)满足

$$\begin{cases}r=\dfrac{dL+sH}{\sqrt{(L+H)^2+(d-s)^2}}\\ \varphi=\theta+\arctan\left(\dfrac{d-s}{L+H}\right)\end{cases} \tag{14}$$

时,$\hat{p}_\theta(s,d)=p(r,\varphi)$成立。

令 $\hat{p}_\theta(s,\cdot)$表示一个收敛到射线源焦点的线积分集合,即一个扇形束投影。如式(13)所示,在希尔伯特变换过程中,需要一个角度的所有投影数据。类似地,在处理扇形束投影时,需要对每一个扇形束的所有投影数据同时进行希尔伯特变换。由于在 STCT 的扫描过程中,采集的每个收敛到射线源焦点的投影都存在截断,故直接进行希尔伯特变换存在误差,会在重建图像中引入截断伪影。

根据 X 射线衰减物理特性,射线穿过物体的衰减特性只与路径有关,与方向无关。因此,将收敛到每个射线源焦点的扇形束投影 $\hat{p}_\theta(s,\cdot)$重组为收敛到每个探测器单元的扇形束投影 $\hat{p}_\theta(\cdot,d)$。由于收敛到探测器单元的扇形束投影 $\hat{p}_\theta(\cdot,d)$包含整个扫描物体,因此可以避免截断伪影。具体地,在求导和希尔伯特变换过程中,需要沿着射线源方向进行运算,对收敛到同一个探测器单元的投影同时进行处理。

为得到扇形束方式表示的 DHB 重建算法,首先根据式(14)中(r,φ)与(s,d)的关系,导出

$$J(s,d)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial s} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial d}\\ \dfrac{\partial r}{\partial s} & \dfrac{\partial r}{\partial d}\end{vmatrix}=\frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial d}-\frac{\partial\varphi}{\partial d}\frac{\partial r}{\partial s}=\frac{-(L+H)^2}{[(L+H)^2+(d-s)^2]^{\frac{3}{2}}}, \tag{15}$$

$$\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\frac{(L+H)}{(L+H)^2+(d-s)^2}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}d, \tag{16}$$

$$\sin\varphi=\frac{(L+H)\sin\theta+(d-s)\cos\theta}{\sqrt{(L+H)^2+(d-s)^2}}, \tag{17}$$

$$\cos\varphi=\frac{(L+H)\cos\theta-(d-s)\sin\theta}{\sqrt{(L+H)^2+(d-s)^2}}, \tag{18}$$

将式(15)~(18)代入式(13)中,进行积分变元替换,可得

$$f(x,y)=\frac{-(L+H)}{2\pi(x\cos\theta+y\sin\theta-H)}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt{(L+H)^2+(d-s)^2}}{H(L+H)+d(d-s)}\frac{\partial\hat{p}_\theta(s,d)}{\partial s}\frac{1}{\pi(s'-s)}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}d, \tag{19}$$

式中:$s'=\dfrac{d(x\sin\theta+y\cos\theta+L)-(L+H)(x\cos\theta-y\sin\theta)}{x\sin\theta+y\cos\theta-H}$表示经过重建点$(x,y)$的射线在射线源轨迹上的投影的局部坐标。式(19)即为在任意角度 θ 下二维扇形束的 STCT-DBH 重建公式。然而,在实际情况中,射线源轨迹和探测器长度有限,故式(19)变为

$$f(x,y)=\frac{-(L+H)}{2\pi(x\cos\theta+y\sin\theta-H)}\int_{-S}^{S}\mathrm{d}s\int_{-D}^{D}\frac{\sqrt{(L+H)^2+(d-s)^2}}{H(L+H)+d(d-s)}\frac{\partial\hat{p}_\theta(s,d)}{\partial s}\frac{1}{\pi(s'-s)}\mathrm{d}d, \tag{20}$$

式中：S 和 D 分别为射线源轨迹长度和探测器长度的一半。

2.4 mSTCT 扫描和冗余数据加权

由于单段 STCT 扫描投影数据不完备，故利用式(20)重建会导致有限角伪影。因此，采用了文献[13]中提出的 mSTCT 扫描方式，如图 3 所示。其中，每一段除了射线源平移角度不同外，其他参数相同。

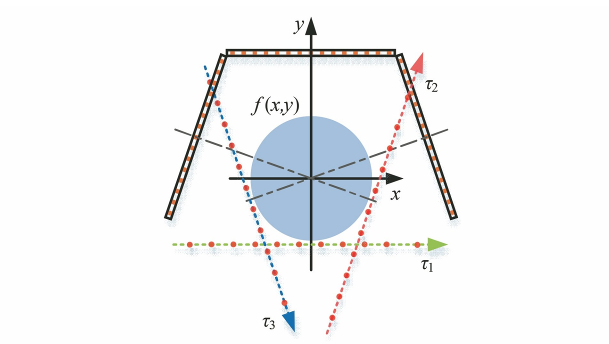

图 3　mSTCT 几何模型[13]

Fig. 3　Geometric model of mSTCT[13]

在 mSTCT 扫描中，同一重建点可能会在同一角度被 X 射线照射采集到多次，投影数据存在冗余，因此需要在重建过程中引入适当的权函数以避免伪影。在之前研究中，Parker 等[23-24]提出了能够有效处理短扫描扇形束数据冗余的方案，mSTCT 中的数据冗余与短扫描扇形束 CT 有一些相似之处，但更复杂一些。计算冗余权重的关键在于：1)找到冗余数据点；2)给冗余数据点赋予相应的权重。

为了简化，考虑第一段 STCT 以平行于 x 方向进行扫描，即 $\theta_1=0$，第二段 STCT 以 θ 角进行扫描，即 $\theta_2=\theta$，如图 4 所示。其中，l 为第一段 SCTS 中 s_0 处的射线源发出且被探测器单元 d_0 接收到的射线。令 $\hat{p}_0(s_0,d_0)$表示第一段 STCT 采集的投影数据，$s_\theta|s_0,d_0\rangle$表示射线 l 与第二段STCT扫描中射线源轨迹所在直线的交点，$d_\theta|s_0,d_0\rangle$表示射线 l 与第二段 STCT 扫描中探测器所在直线的交点。由于(s_0,d_0)与$(s_\theta|s_0,d_0\rangle,d_\theta|s_0,d_0\rangle)$表示的是同一条直线，因此有 $\hat{p}_0(s_0,d_0)=\hat{p}_\theta(s_\theta|s_0,d_0\rangle,d_\theta|s_0,d_0\rangle)$。然而，由于每段 STCT 射线源和探测器的区间分别为$[-S,S]$和$[-D,D]$，因此，当满足

$$\begin{cases} -S\leqslant s_\theta|s_0,d_0\rangle\leqslant S, & s_0\in[-S,S] \\ -D\leqslant d_\theta|s_0,d_0\rangle\leqslant D, & d_0\in[-D,D] \end{cases} \tag{21}$$

时，可以得出 $\hat{p}_0(s_0,d_0)$与 $\hat{p}_\theta(s_\theta|s_0,d_0\rangle,d_\theta|s_0,d_0\rangle)$是一对冗余数据。在找到冗余数据后，可以采用文献[25]相同的加权函数进行加权，得到权重函数 $w_0(s,d)$和 $w_\theta(s,d)$。

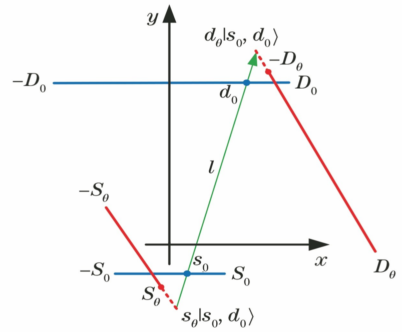

图 4　mSTCT 的数据冗余分析

Fig. 4　Data redundancy analysis for mSTCT

mSTCT 的冗余加权函数为

$$w_\theta(x)=\begin{cases} 1, & x\leqslant 0 \\ 0.5+\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{1-2x}{2}\pi\right), & 0<x<1, \\ 0, & x\geqslant 1 \end{cases} \tag{22}$$

在引入权重函数后，mSTCT 的 DHB 重建算法可表示为

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{-(L+H)}{2\pi(x\cos\theta_i+y\sin\theta_i-H)}\int_{-S}^{S}\mathrm{d}s\int_{-D}^{D}\frac{\sqrt{(L+H)^2+(d-s)^2}}{H(L+H)+d(d-s)}\frac{\partial\hat{p}_{\theta_i w}(s,d)}{\partial s}\frac{1}{\pi(s'-s)}\mathrm{d}d, \tag{23}$$

式中：i 表示扫描段数的索引，$i=1,2,3,\cdots,n$；$\hat{p}_{\theta_i w}(s,d)=\hat{p}_{\theta_i}(s,d)\omega_{\theta_i}(s,d)$，其中 $\omega_{\theta_i}(s,d)$为第 i 段扫描的冗余权重。

由此，可以得到 mSTCT-DHB 算法的重建步骤：

1) 在第 i 段扫描中，对采集的投影数据进行冗余加权，即

$$\hat{p}_{\theta_i w}(s,d)=\hat{p}_{\theta_i}(s,d)\omega_{\theta_i}(s,d); \tag{24}$$

2) 对冗余加权后投影数据进行求导，即

$$\hat{p}'_{\theta_i w}(s,d)=\frac{\partial \hat{p}_{\theta_i w}(s,d)}{\partial s};\tag{25}$$

3）对求导后投影数据进行加权，即

$$\tilde{p}'_{\theta_i w}(s,d)=\frac{\partial \hat{p}_{\theta_i w}(s,d)}{\partial s}\frac{\sqrt{(L+H)^2+(d-s)^2}}{H(L+H)+d(d-s)};\tag{26}$$

4）进行希尔伯特变换，即

$$h_{\theta_i w}(s,d)=\int_{-D}^{D}\tilde{p}'_{\theta_i w}(s,d)\frac{1}{\pi(s'-s)}\mathrm{d}d;\tag{27}$$

5）对求导和希尔伯特变换后的投影数据进行加权反投影，即

$$f_{\theta_i}(x,y)=\frac{-(L+H)}{2\pi(x\cos\theta_i+y\sin\theta_i-H)}\times\int_{-S}^{S}h_{\theta_i w}(s,d)\mathrm{d}s,\tag{28}$$

式中：$\frac{-(L+H)}{2\pi(x\cos\theta_i+y\sin\theta_i-H)}$为反投影中的权函数；

6）对每段扫描投影数据重复步骤 1)～5)，求和后可得到最终重建图像，即

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}f_{\theta_i}(x,y)。\tag{29}$$

3 实 验

为探究 STCT-DHB 算法的有效性，设计了仿真实验和实际实验。在仿真实验中，分别分析理想投影数据和含噪投影数据的重建结果。采用均方根误差(RMSE)[26]、峰值信噪比(PSNR)[27]和结构相似性(SSIM)[28]三个客观指标进行定量分析。同时，将 STCT-DHB 算法与 STCT-SIRT、STCT-FBP 重建算法进行比较，其中 STCT-SIRT 重建算法迭代 2000 次。在 STCT-FBP 和 STCT-DHB 中，本文都使用矩形窗函数进行重建。此外，搭建了实际实验系统，并对竹制样品进行扫描，对比分析了 STCT-DHB 算法的实际应用效果。重建算法在 Intel(R) Core(TM) i7-10700 CPU @ 2.90 GHz、NVIDIA GeForce RTX 3060、随机存取存储器(RAM)大小为 24 GB、Windows10 专业版 64 位计算机上运行，环境为 MATLAB R2018b。

3.1 仿真实验

为分析 STCT-DHB 算法的重建效果，对像素大小为 512 pixel×512 pixel 的 FORBILD 模体进行 STCT 仿真扫描。用于计算 STCT 投影的几何参数如表 1 所示，L 为 15 mm，H 为 190 mm。射线源平移距离为 16 mm，采样点数为 3201。探测器像素尺寸为 0.127 mm，探测器阵列长度为 1024 pixel。通过计算可以得到一段 STCT 扫描投影角度覆盖范围为 37.4°。为实现超过 180°的投影角度覆盖，进行了 5 段 STCT 扫描，其中每段平移角度间隔为 37.4°。

表 1 仿真实验参数

Table 1 Parameters of numerical simulation

Parameter	Value
Detector pixel size /mm	0.127
Detector array length /pixel	1024
Number of sampling points	3201
Source translation distance $2S$ /mm	16
L /mm	15
H /mm	190
Reconstruction matrix size	512×512

图 5 展示了 mSTCT 扫描的重建过程，显示窗口为 0～1 cm^{-1}。图 5(a)为原始图像。图 5(b)为一段 STCT 扫描重建结果。可以发现，图像结构缺失，伪影严重，这是因为投影角度覆盖范围有限(0～37.4°)。图 5(c)～(f)分别为 2～5 段 STCT 的重建结果。可以发现，随着段数的增加，图像结构逐渐恢复，同时伪影也逐渐被消除。由于 5 段 STCT 获取了超过 180°的角度覆盖范围，因此图像能被完整恢复。

为进一步展示 STCT-DHB 的重建效果，图 6 对比了 STCT-SIRT、STCT-FBP 和 STCT-DHB 三种算法在无噪声情况下的重建结果，显示窗口为 0～1 cm^{-1}。从第一行的全局图像可以看出，三种算法均能恢复完整且清晰的图像，在视觉上并无明显差异。从第二行的局部放大图可以看出，相比其他两种算法，STCT-DHB 算法重建的图像边缘处存在一定的模糊。

为分析 STCT-DHB 算法的抗噪性能，在投影数据中加入了泊松噪声，其光子数为 5×10^3。图 7(a)～(c)分别为原始投影数据正弦图、添加泊松噪声后投影数据正弦图和噪声图像，图 7(a)、(b)显示窗口为 0～0.021 cm^{-1}。图 8 展示了三种算法的重建效果，显示窗口为 0～1 cm^{-1}。可以发现：STCT-SIRT 降噪效果最好；图 8(g)所示的 STCT-FBP 算法重建图像上含有大量噪点，相比之下，图 8(h)所示的 STCT-DHB 算法重建图像中的噪点明显减少。

为定量对比图 8 中的重建图像，选取了图 8 中全局图像的第 370 行，并取该行从左至右的 195～245 号像素作灰度曲线进行对比。如图 9 所示，

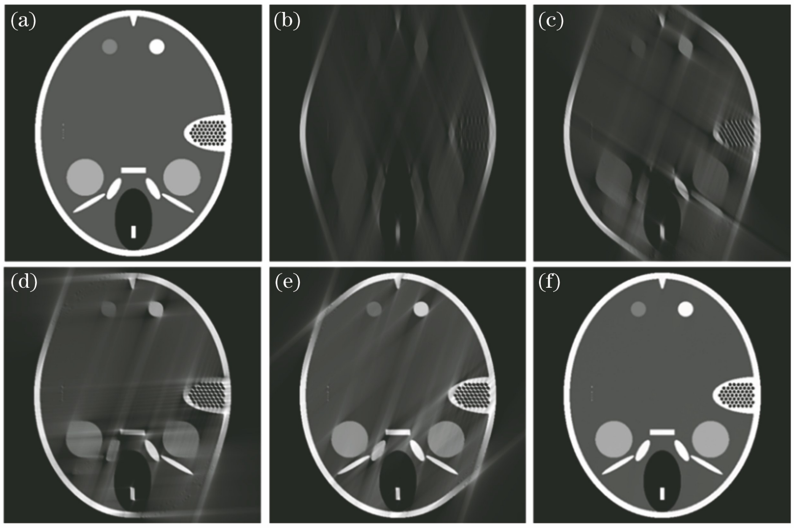

图 5 mSTCT-DHB 算法重建过程。(a)原始图像;(b)利用 1 段 STCT 投影数据重建的图像;(c)利用 2 段 STCT 投影数据重建的图像;(d)利用 3 段 STCT 投影数据重建的图像;(e)利用 4 段 STCT 投影数据重建的图像;(f)利用 5 段 STCT 投影数据重建的图像

Fig. 5 Reconstruction process by mSTCT-DHB algorithm. (a) Original image; (b) image reconstructed by using one segment of STCT projection data; (c) image reconstructed by using two segments of STCT projection data; (d) image reconstructed by using three segments of STCT projection data; (e) image reconstructed by using four segments of STCT projection data; (f) image reconstructed by using five segments of STCT projection data

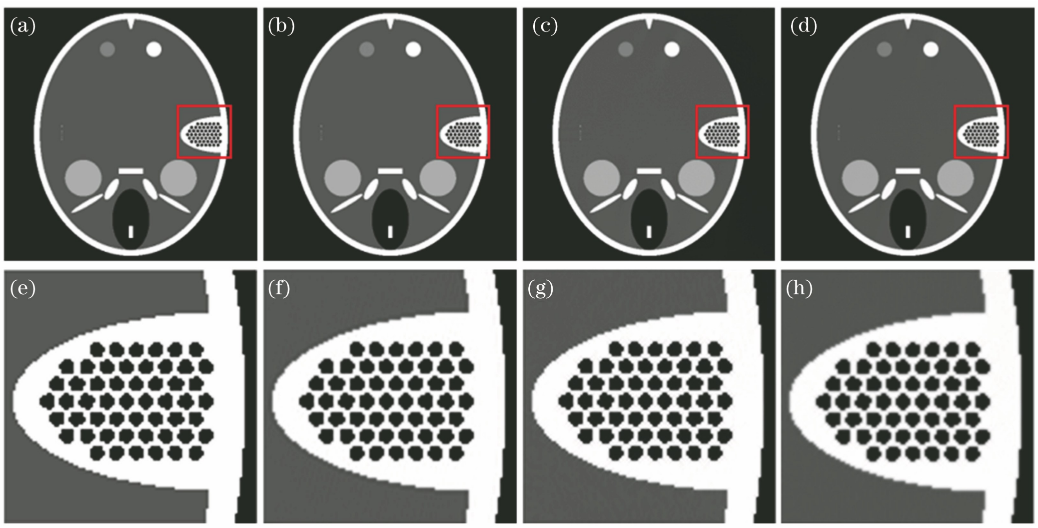

图 6 重建结果对比。(a)原始图像;(b) STCT-SIRT 算法的重建结果;(c) STCT-FBP 算法的重建结果;(d) STCT-DHB 算法的重建结果;(e)图 6(a)的局部放大图;(f) 图 6(b)的局部放大图;(g) 图 6(c)的局部放大图;(h)图 6(d)的局部放大图

Fig. 6 Comparison of reconstruction results. (a) Original image; (b) reconstruction result of STCT-SIRT algorithm; (c) reconstruction result of STCT-FBP algorithm; (d) reconstruction result of STCT-DHB algorithm; (e) local magnification of Fig. 6 (a); (f) local magnification of Fig. 6 (b); (g) local magnification of Fig. 6 (c); (h) local magnification of Fig. 6 (d)

STCT-DHB 曲线整体变化趋势更为平缓,与原始图像曲线相接近。这一现象说明,STCT-DHB 算法在去除噪声的同时,会造成一定程度的边缘模糊。STCT-SIRT 作为一种迭代重建算法,具有良好的抗噪特性。图 8 和图 9 都表明,STCT-DHB 可以实现与 STCT-SIRT 相当的降噪效果。

为进一步定量评估重建结果的准确性,求取了图 8 含噪声情况下不同重建结果的 RMSE、PSNR 和 SSIM。从表 2 中可以看出,STCT-DHB 重建结果的 RMSE 值比 STCT-FBP 降低了 0.0422,PSNR

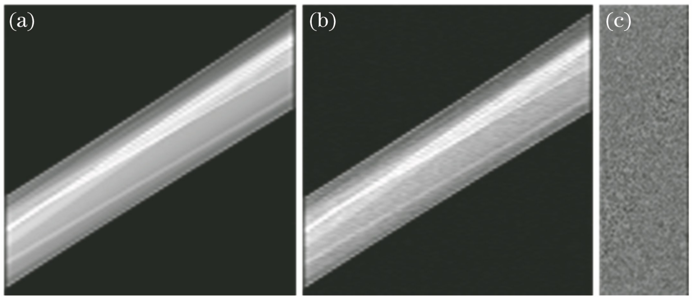

图 7　投影数据正弦图和泊松噪声图像。(a)原始图像;(b)添加噪声图像;(c)泊松噪声图像

Fig. 7　Sine diagrams of projection data and image of Poisson noise. (a) Original image; (b) image after adding noise; (c) image of Poisson noise

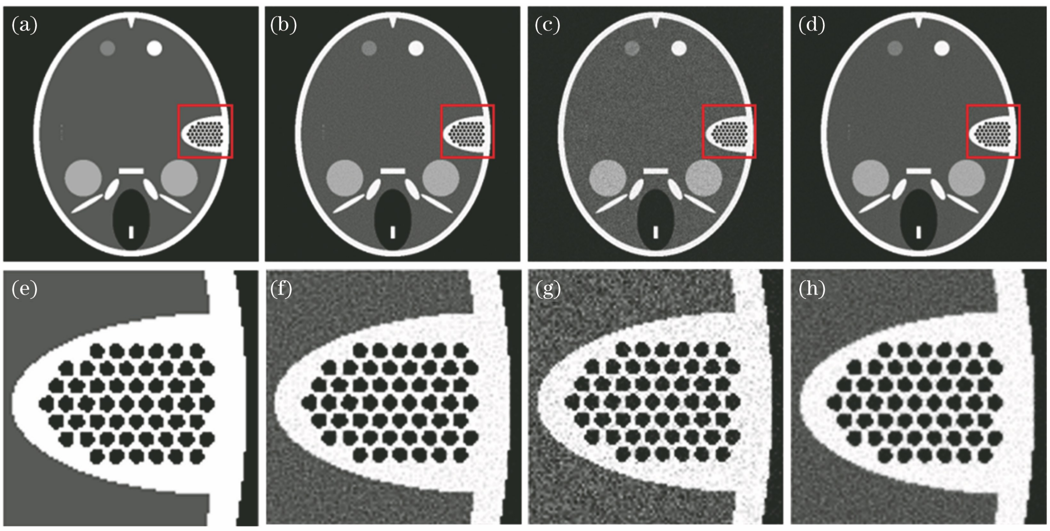

图 8　加噪后重建结果对比。(a)原始图像;(b)STCT-SIRT 算法的重建结果;(c) STCT-FBP 算法的重建结果;(d) STCT-DHB 算法的重建结果;(e)图 8(a)的局部放大图;(f)图 8(b)的局部放大图;(g)图 8(c)的局部放大图;(h)图 8(d)的局部放大图

Fig. 8 Comparison of reconstruction results after adding noise. (a) Original image; (b) reconstruction result of STCT-SIRT algorithm; (c) reconstruction result of STCT-FBP algorithm; (d) reconstruction result of STCT-DHB algorithm; (e) local magnification of Fig. 8 (a); (f) local magnification of Fig. 8 (b); (g) local magnification of Fig. 8 (c); (h) local magnification of Fig. 8 (d)

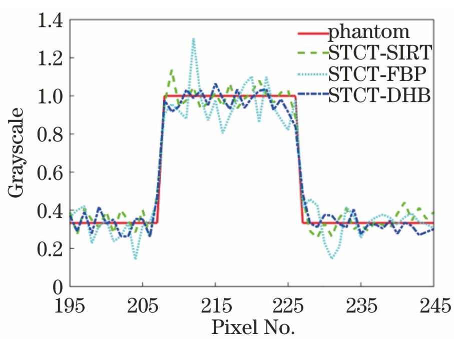

图 9　不同算法重建图像第 370 行剖面图

Fig. 9　Profiles along 370th row of images reconstructed by different algorithms

值比 STCT-FBP 高 3.8218,SSIM 值比 STCT-FBP 结果提高了 0.1397,说明该算法降噪能力更强,重建结果更接近原始图像。综合来看,STCT-SIRT 算法指标最好,STCT-DHB 算法重建图像质量优于 STCT-FBP 算法,且接近 STCT-SIRT 算法。

表 2　不同算法重建图像量化度量指标

Table 2　Quantitative metrics of images reconstructed by different algorithms

Metric	STCT-SIRT	STCT-FBP	STCT-DHB
RMSE	0.0414	0.0940	0.0518
PSNR	29.6173	23.2411	27.0629
SSIM	0.8928	0.7040	0.8437

为对比三种算法的重建速度,分别记录了含噪声情况下三种算法的重建时间,其中 STCT-SIRT 算法迭代次数为 2000。STCT-SIRT、STCT-FBP、STCT-DHB 三种重建算法的时间分别为 1128.35,10.86,11.26 s。STCT-SIRT 作为一种迭代重建算法,在每一次迭代中都需要进行投影与反投影操作,

因此重建时间较长。STCT-FBP、STCT-DHB 作为解析重建算法，只需一次反投影操作，故重建速度较快，且二者在重建时间上并无较大差异。

综上所述，STCT-DHB 在有噪声情况下，可以以较快的重建速度获得与迭代算法 STCT-SIRT 相当质量的重建图像。然而，STCT-DHB 在抑制噪声的同时，可能会造成边缘结构模糊，损失微小细节。

3.2 实际实验

3.2.1 实验系统设计

图 10 为搭建的 STCT 实验系统。该系统由微焦点 X 射线源、平板探测器、直线滑台和转台组成。在实现 STCT 扫描过程中，将扫描对象固定在转台上，直线滑台承载射线源左右移动，同时探测器采集每个射线源点位的投影数据。当单段 STCT 扫描结束后，通过将转台转动一定角度可实现 mSTCT 扫描。

对一个竹制样品进行 STCT 扫描成像。在实际实验中，物体旋转中心到探测器的垂直距离为 195 mm，到射线源轨迹的垂直距离为 13.81 mm。射线源的电压为 60 kV，电流为 70 μA，射线源扫描平移距离为 20 mm，采样点数为 2001。探测器参数与表 1 相同。为获得完备投影数据，采取 5 段 STCT 扫描，相邻两段扫描之间的角度间隔为 36.5°。在重建过程中，取每个射线源位置的探测器中间行数据进行二维图像重建，重建图像大小为 1024 pixel×1024 pixel。

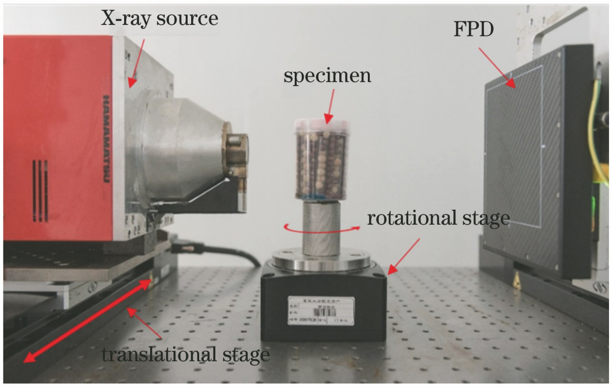

图 10 STCT 实验系统

Fig. 10 Experimental system of STCT

3.2.2 实际实验结果

实际实验重建结果如图 11 所示，显示窗口为 0～1 cm^{-1}。对比图 11(a)～(c)可知，三种算法均可完整地将图像重建。对比图 11(d)～(f)可知，三种算法均可较好地保持图像整体结构信息，清晰呈现主体结构。STCT-SIRT、STCT-FBP 算法对图像中存在的微小结构也可以较为清晰地还原。STCT-DHB 算法能够较好地保持图像整体结构信息，但其图像结构边缘处会存在一定的模糊。

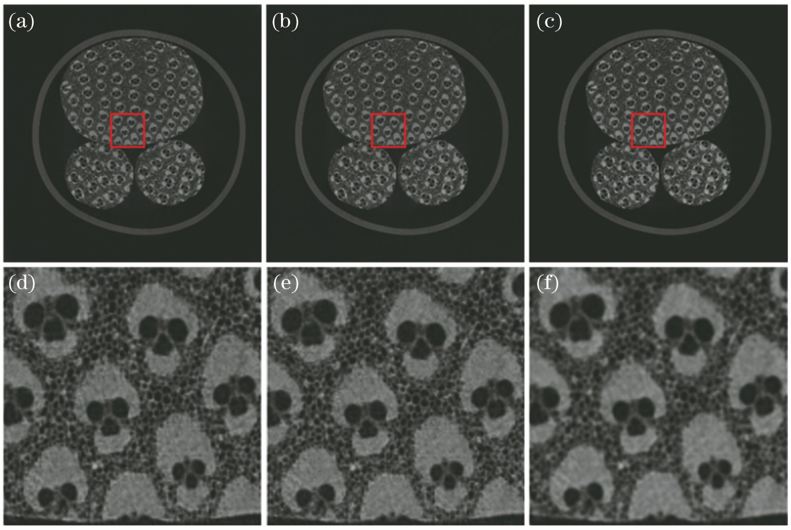

图 11 实际实验重建结果对比图。(a) STCT-SIRT 算法的重建结果；(b) STCT-FBP 算法的重建结果；(c) STCT-DHB 算法的重建结果；(d)图 11(a)的局部放大图；(e)图 11(b)的局部放大图；(f)图 11(c)的局部放大图

Fig. 11 Comparison of reconstruction results of actual experiment. (a) Reconstruction result of STCT-SIRT algorithm; (b) reconstruction result of STCT-FBP algorithm; (c) reconstruction result of STCT-DHB algorithm; (d) local magnification of Fig. 11(a); (e) local magnification of Fig. 11(b); (f) local magnification of Fig. 11(c)

为进一步分析实际数据实验结果，选取了图 11 中全局图像的第 370 行，并取该行从左至右的 195～270 号像素作灰度曲线进行对比。如图 12 所示，STCT-SIRT 和 STCT-FBP 算法灰度曲线的变

化趋势接近，两种算法重建质量相当。STCT-DHB 算法曲线在 240～270 号像素附近较为平滑，这一现象说明该算法丢失了部分微小的细节信息。STCT-DHB 曲线在 200～240 号像素处被平滑，表现在图像中为结构边缘模糊。

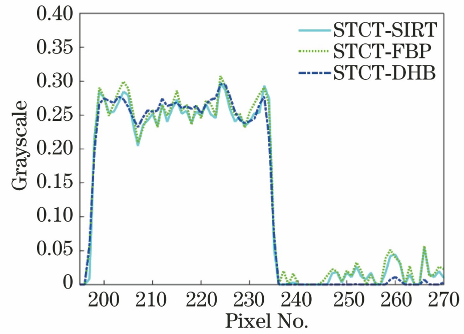

图 12 实际实验中不同算法重建图像第 370 行剖面图

Fig. 12 Profiles along 370th row of images reconstructed by different algorithms in actual experiment

3.3 分析与讨论

从第 3 节的实验结果可知，与 STCT-SIRT 迭代算法相比，STCT-DHB 算法可以显著减少重建时间，提高重建效率，同时可达到与 STCT-SIRT 算法相近的抗噪性能，如图 8 所示。与 STCT-FBP 算法相比，在含噪情况下，STCT-DHB 算法可以达到更高的重建精度，并且重建图像中噪声较小。然而，STCT-DHB 相比 STCT-FBP 也在一定程度上造成了边缘模糊，导致这种现象的原因主要有两个：

1）对于 STCT-FBP 算法，斜坡滤波器表示为 $|w|$。对于任意非 0 因子 a，根据斜坡滤波器的齐次性[29]，有

$$h(at)=\int_{-\infty}^{+\infty}|w|\exp(\mathrm{i}wat)dw=\frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{+\infty}|aw|\exp(\mathrm{i}wat)\mathrm{d}(aw)=\frac{1}{a^2}h(t), \quad (30)$$

式中：t 为函数 $h(t)$ 的自变量。斜坡滤波器 $|w|$ 是个无限频带的滤波函数，这一理想滤波器是不可实现的，实际中会使用窗函数限制带宽，此时有

$$h_\Omega(at)=\int_{-\Omega}^{\Omega}|w|\exp(\mathrm{i}wat)\mathrm{d}w=\frac{1}{a^2}\int_{-\Omega}^{\Omega}|w|\exp(\mathrm{i}wat)\mathrm{d}(aw)=\int_{-a\Omega}^{a\Omega}|u|\exp(\mathrm{i}ut)\mathrm{d}u=\frac{1}{a^2}h_{a\Omega}(t), \quad (31)$$

由式(31)可知式(30)已不再成立，截止频率由 Ω 更改为 $a\Omega$，a 为扇形束 FBP 算法反投影算子中一项与重建点位置相关的加权因子[30]。对于精确重建，不同位置的重建点对应的截止频率应该不同。然而，在实际实现过程中，为实现并行计算，通常采用相同的截止频率，这会导致两个问题：重建图像分辨率和噪声不均匀，包含非稳态噪声[31]；当焦距较小时，扇形束 FBP 算法中的固定截止频率会导致高频噪声分量在远离旋转中心区域被放大[30]。在 STCT 扫描中，将射线源靠近物体以获取更高分辨率，其焦距较小，远离旋转中心区域的高频噪声分量被放大。对于 STCT-DHB 算法可以将距离加权因子从算法中去除[32]，进而可以达到较高的重建精度；

2）由于在 STCT-FBP 和 STCT-DHB 算法中均使用矩形函数进行加窗。在 STCT-FBP 算法中，矩形加窗的斜坡滤波器在频率区间内从低到高对各个频率分量进行了线性放大，在放大有用高频分量的同时，放大了高频噪声[33]。因此，STCT-FBP 算法能较好重建图像细节和图像边缘等高频信息，但在投影数据含噪情况下，会放大噪声对图像的影响。在 STCT-DHB 算法中将斜坡滤波器分解为求导和希尔伯特变换，矩形加窗的滤波函数表现出中低频段近似线性放大、高频段相对压低的特性[18]，因此 STCT-DHB 算法可以减小高频噪声对图像的影响，但也会损失微小细节、图像边缘等高频信息。

基于以上分析可知，STCT-DHB 算法避免了与重建点位置相关的加权因子带来的非稳态噪声和远离旋转中心区域高频噪声分量被放大的问题。另外，在使用矩形窗函数情况下，相比 STCT-FBP 中的斜坡滤波，STCT-DHB 滤波函数具有中低频段近似线性放大、高频段相对压低的特性。由于图像边缘和噪声主要集中在高频部分，因此矩形加窗的 STCT-FBP 算法能有效保护边缘细节信息，但也会放大高频噪声，进而其适用于重建图像细节要求高且噪声较少的场合，如生物样品检测等。矩形加窗的 STCT-DHB 算法对高频分量进行了相对压低，对高频噪声有一定抑制作用，同时可能会将部分边缘细节信息平滑，适用于内部结构简单、细节较少的检测对象，或者检测噪声较大的情形，如工业零件检测。

由于 STCT-FBP 与 STCT-DHB 算法在数学上等价，故可以通过调整窗函数修改滤波函数的频域特性，进而达到相同的重建效果。STCT-FBP 算法与 STCT-DHB 算法的区别在于，后者可以避免有

限带宽斜坡滤波器的非齐次性问题。本文只在矩形加权函数情况下，对比了二者重建结果的区别，将在以后研究中进一步分析不同窗函数对两种算法重建结果的影响。

4 结　论

针对 STCT 扫描模型，提出了一种新的 STCT-DHB 解析重建算法，该算法主要分为三个步骤，即求导、希尔伯特变换和反投影。由于在 STCT 扫描过程中，每个角度的投影数据存在截断，直接重建会产生截断伪影，故将截断投影数据转换为全局投影数据进行操作。同时，还给出了 mSTCT 扫描情况下 DHB 重建算法的显式表达式。仿真实验和实际实验结果表明，STCT-DHB 算法具有较好抑制图像高频噪声的能力，同时重建效率高。另一方面，该算法也会在一定程度上平滑图像边缘、损失图像微小细节。侧重研究了扇形束 STCT 解析图像重建算法，将在后续工作中，将该算法推广到 STCT 三维锥束重建中。

参 考 文 献

[1] Withers P J, Bouman C, Carmignato S, et al. X-ray computed tomography[J]. Nature Reviews Methods Primers, 2021, 1: 18.

[2] 蔡玉芳, 陈桃艳, 王珏, 等. 基于自适应滤波系数的非局部均值计算机层析成像的图像降噪方法[J]. 光学学报, 2020, 40(7): 0710001.
Cai Y F, Chen T Y, Wang J, et al. Image noise reduction in computed tomography with non-local means algorithm based on adaptive filtering coefficients[J]. Acta Optica Sinica, 2020, 40(7): 0710001.

[3] Cnudde V, Boone M N. High-resolution X-ray computed tomography in geosciences: a review of the current technology and applications[J]. Earth-Science Reviews, 2013, 123: 1-17.

[4] du Plessis A, Broeckhoven C, Guelpa A, et al. Laboratory X-ray micro-computed tomography: a user guideline for biological samples [J]. GigaScience, 2017, 6(6): 1-11.

[5] Brancaccio R, Bettuzzi M, Casali F, et al. Real-time reconstruction for 3-D CT applied to large objects of cultural heritage[J]. IEEE Transactions on Nuclear Science, 2011, 58(4): 1864-1871.

[6] Louis L, Wong T F, Baud P. Imaging strain localization by X-ray radiography and digital image correlation: deformation bands in Rothbach sandstone [J]. Journal of Structural Geology, 2007, 29(1): 129-140.

[7] Schmidt T G, Fahrig R, Pelc N J, et al. An inverse-geometry volumetric CT system with a large-area scanned source: a feasibility study [J]. Medical Physics, 2004, 31(9): 2623-2627.

[8] Wang G. X-ray micro-CT with a displaced detector array[J]. Medical Physics, 2002, 29(7): 1634-1636.

[9] 赵飞, 路宏年, 孙翠丽. 一种新的二维 CT 扫描方式及其重建算法[J]. 光学技术, 2006, 32(2): 284-286, 289.
Zhao F, Lu H N, Sun C L. New scan mode for 2D-CT and its reconstruction algorithm [J]. Optical Technique, 2006, 32(2): 284-286, 289.

[10] Fu J, Lu H N, Li B, et al. X-CT imaging method for large objects using double offset scan mode [J]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 2007, 575(3): 519-523.

[11] 张慧滔, 陈明, 张朋. 一种新的针对感兴趣区域的 CT 扫描模式及其重建公式[J]. 自然科学进展, 2007, 17(11): 1589-1594.
Zhang H T, Chen M, Zhang P. A new CT scanning mode and reconstruction formula for the region of interest[J]. Progress in Natural Science, 2007, 17(11): 1589-1594.

[12] Chen M, Zhang H T, Zhang P. BPF-based reconstruction algorithm for multiple rotation-translation scan mode [J]. Progress in Natural Science, 2008, 18(2): 209-216.

[13] Yu H J, Li L, Tan C D, et al. X-ray source translation based computed tomography (STCT)[J]. Optics Express, 2021, 29(13): 19743-19758.

[14] 罗婷, 赵云松. 双能谱 CT 迭代重建的一种加速收敛算法[J]. 光学学报, 2020, 40(14): 1411001.
Luo T, Zhao Y S. An acceleration algorithm for dual-spectral computed tomography reconstruction [J]. Acta Optica Sinica, 2020, 40(14): 1411001.

[15] Smith B D, Singh T. Fan-beam reconstruction from a straight line of source points[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1993, 12(1): 10-18.

[16] 伍伟文, 全超, 刘丰林. 相对平行直线扫描 CT 滤波反投影图像重建[J]. 光学学报, 2016, 36(9): 0911009.
Wu W W, Quan C, Liu F L. Filtered back-projection image reconstruction algorithm for opposite parallel linear CT scanning[J]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(9): 0911009.

[17] 李雷, 谭川东, 廖明娟, 等. 基于 Radon 逆变换的相对平行直线扫描 CT 解析重建[J]. 光学学报, 2021, 41(6): 0611003.

Li L, Tan C D, Liao M J, et al. Analytic reconstruction for parallel translational computed tomography based on Radon inverse transform[J]. Acta Optica Sinica, 2021, 41(6): 0611003.

[18] 马晨欣, 胡君杰, 闫镔. CT 扇形束滤波反投影图像重建算法优化[J]. 激光与光电子学进展, 2012, 49(9): 091103.

Ma C X, Hu J J, Yan B. Optimization of fan-beam CT filtered backprojection reconstruction algorithm[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2012, 49(9): 091103.

[19] Cooley J W, Lewis P A W, Welch P D. The fast Fourier transform and its applications[J]. IEEE Transactions on Education, 1969, 12(1): 27-34.

[20] 郑神州, 康秀英. 狄拉克 δ-函数及有关应用[J]. 大学物理, 2021, 40(7): 25-29, 77.

Zheng S Z, Kang X Y. Dirac δ-function and its related applications[J]. College Physics, 2021, 40(7): 25-29, 77.

[21] 曾更生. 医学图像重建[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.

Zeng G S. Medical image reconstruction[M]. Beijing: Higher Education Press, 2010.

[22] 闫镔, 李磊. CT 图像重建算法[M]. 北京: 科学出版社, 2014.

Yan B, Li L. CT image reconstruction algorithm[M]. Beijing: Science Press, 2014.

[23] Parker D L. Optimal short scan convolution reconstruction for fan beam CT[J]. Medical Physics, 1982, 9(2): 254-257.

[24] Wesarg S, Ebert M, Bortfeld T. Parker weights revisited[J]. Medical Physics, 2002, 29(3): 372-378.

[25] Zhang T, Xing Y X, Zhang L, et al. Stationary computed tomography with source and detector in linear symmetric geometry: direct filtered backprojection reconstruction[J]. Medical Physics, 2020, 47(5): 2222-2236.

[26] Chai T, Draxler R R. Root mean square error (RMSE) or mean absolute error (MAE)? — arguments against avoiding RMSE in the literature[J]. Geoscientific Model Development, 2014, 7(3): 1247-1250.

[27] Huynh-Thu Q, Ghanbari M. Scope of validity of PSNR in image/video quality assessment[J]. Electronics Letters, 2008, 44(13): 800-801.

[28] Wang Z, Bovik A C, Sheikh H R, et al. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2004, 13(4): 600-612.

[29] Oppenheim A V, Willsky A S, Nawab S H, et al. Signals & systems[M]. London: Pearson Education, 1997: 123-141.

[30] Zeng G L. Nonuniform noise propagation by using the ramp filter in fan-beam computed tomography[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2004, 23(6): 690-695.

[31] You J S, Zeng G L. Hilbert transform based FBP algorithm for fan-beam CT full and partial scans[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2007, 26(2): 190-199.

[32] Zeng G L. Image reconstruction: applications in medical sciences[M]. Berlin: Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2017: 59-61.

[33] Gibbs J W. Fourier's series[J]. Nature, 1899, 59(1539): 606.