

## 基于深度学习和程能映射的自由配光设计

张航\*, 陈嘉文, 胡月姣, 修龙汪, 严金华\*\*

浙江工业大学理学院, 浙江 杭州 310023

**摘要** 在激光投影、结构光和光束整形等特种照明或光电应用中,常需要一个非成像光学系统来实现特定的配光设计。建立一个配光方程来描述该光学系统,并通过对光束、光学面和目标面的离散化处理,利用子面光程  $K$  与目标点能量  $E$  之间的映射关系得到程能映射下的配光方程。尽管程能映射中相邻子面光程之间存在复杂的非线性竞争,但  $K$  与  $E$  之间存在着良好的单调映射关系,这为引入神经网络来拟合程能映射提供基础。利用深度学习实现配光方程逆问题的求解,获得所需要的自由光学曲面。以英文字母和阿拉伯数字为训练集,输入点阵规模为  $28 \times 28$ ,通过对三层神经网络进行多维度调参和训练,实现了相应字符照度分布的光学曲面设计。光学仿真结果的结构相似度达到了 99.97%,这表明神经网络通过学习可以记住(或存储)各个字符的光学曲面,相当于建立了一个高效且可扩容的智能光学字符库。基于复杂介质建立的基础配光方程可为现有配光方法提供一个基础理论框架,有助于形成非成像光学理论的系统性表述。

**关键词** 光学设计; 非成像光学设计; 配光方程; 自由曲面; 深度学习; 程能映射

中图分类号 O435

文献标志码 A

DOI: 10.3788/AOS202242.1022003

## Freeform Light Distribution Design Based on Deep Learning and Length-Energy Mapping

Zhang Hang\*, Chen Jiawen, Hu Yuejiao, Xiu Longwang, Yan Jinhua\*\*

College of Science, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, Zhejiang, China

**Abstract** In optoelectronic applications or specialty lighting such as laser projection, structured light, and beam shaping, a non-imaging optical system is often required to achieve a specific light distribution design. For this purpose, a light distribution equation was established to describe the optical system. After the beam, the optical surface, and the target screen were discretized, the mapping relationship between the optical path length  $K$  of the sub-surface and the energy  $E$  at the target point was leveraged to obtain the corresponding light distribution equation under length-energy mapping. Although adjacent optical path lengths were subject to complex nonlinear competition in the length-energy mapping,  $K$  and  $E$  enjoyed a favorable monotonic mapping relationship that paved the way for introducing a deep neural network to fit the length-energy mapping. Then, deep learning was adopted to solve the light distribution equation as an inverse problem, and the required freeform optical surface was thereby obtained. With English letters and Arabic numerals in an input lattice of  $28 \times 28$  as the training set, the design of optical surfaces with the corresponding character illumination distributions was achieved through multi-dimensional parameter adjustment and training of the three-layer neural network. The structural similarity of the optical simulation results reaches 99.97%, which indicates that the deep neural network can memorize (or store) the optical surfaces of each character by learning. This is equivalent to building an efficient and scalable intelligent optical character library. The basic light distribution equation established with complex media provides an elementary theoretical framework for existing light distribution methods and is conducive to the systematic expression of the theory of non-imaging optics.

**Key words** optical design; non-imaging optical design; light distribution equation; freeform surface; deep learning; length-energy mapping

收稿日期: 2021-11-23; 修回日期: 2022-02-09; 录用日期: 2022-02-28

基金项目: 国家自然科学基金(62075197, 12104401)

通信作者: \*physzhang@zjut.edu.cn; \*\*jinhua@zjut.edu.cn

# 1 引言

非成像光学系统包括三个要素:光源、光学器件和目标面。非成像光学设计本质上是一个逆问题:已知光源和目标面光分布,求光学器件的几何表面。对于不具有对称性的自由目标光分布,对应光学器件的表面一般为自由曲面<sup>[1]</sup>。随着超精密加工技术的进步,自由曲面的加工问题得到了较好的解决,并被广泛地应用于基础研究与产业应用中<sup>[2]</sup>,如 GoogleVR 眼镜、汽车大灯、监控补光、路灯照明等。基于非成像光学的自由曲面设计方法主要分为三类:优化法、代数法和几何法。优化法的中心思想是将自由曲面由优化变量表征,在设计过程中不断调整优化变量,使得其评价函数值达到所需评价标准,进而满足所需照明设计要求。代数法主要是以 Snell 定律和能量守恒定律为中心思想,构建光源与目标面之间的映射关系,这种映射关系通常可以用数学方程来表示。通过求解数学方程得到自由曲面参数,如常微分方程方法<sup>[3]</sup>、同步多表面设计方法<sup>[4]</sup>、剪裁法<sup>[5]</sup>和求解 Monge-Ampère (简记为 MA) 方程<sup>[6-7]</sup>等。文献[8]通过求解二阶 MA 型偏微分方程设计了双自由曲面,实现了具有指定光照模式的任意输出波前。几何法的主要思想是借助几何曲面的光学特性,根据能量守恒关系将一个预定照明问题用一组子面来离散化,最后由该组曲面片的包络面来确定自由曲面的解,如 Olikier 等<sup>[9-11]</sup>提出的支撑二次曲面法(SQM)。这类方法的关键在于建立起所有子面的光程分布与目标面上照度分布之间的单调性映射关系(简称程能映射或 KE 映射),这里的 SQM 是程能映射方法的一个特例,只有一个待求的自由光学曲面。程能映射方法中子面光程分布与目标离散光分布之间存在异常复杂的竞争关系,导致难以进行解析求解,通常需要寻优求解,如借助深度学习优越的寻优性能,引入深度神经网络来拟合程能映射关系。

机器学习和深度学习的快速发展和应用为各领域难题解决提供一种新的方法。深度神经网络(DNN)采用多层非线性网络层叠加而成,利用数据集对神经网络进行训练,可以逐层变换和学习样本空间的特征值,对逆问题的求解具有良好的适应性<sup>[12-13]</sup>,在成像光学领域,如超分辨率图像重构<sup>[14]</sup>、机器视觉瑕疵检测<sup>[15]</sup>和计算成像<sup>[16]</sup>等方面已经得到应用<sup>[17]</sup>。在非成像光学领域,DNN 的应用尚在探索中,文献[18]将自由曲面的球谐正交基表达与

机器学习相结合,实现了均匀光斑平移缩放的预测,给出了有益的探索。

本文从非成像光学系统出发,建立了基础配光方程,利用程能映射关系推导出 SQM 情形下的配光方程。接着引入 DNN 来拟合 KE 映射,通过深度学习方法来寻优,从而求解出目标光分布对应的光程分布,最终获得需要的自由光学曲面,该方法简称 DNN-KE 方法。以英文字母“A”为例,把英文字母和数字等 36 个字符作为样本集,输入点阵规模为  $28 \times 28$ ,利用支撑椭流面法(SEM,该方法属于 SQM)生成样本数据,通过对三层神经网络进行多维度调参和训练,实现了投射字符“A”照度分布的光学曲面设计。采用结构相似度(SSIM)方法评价光学仿真结果,将其与 SEM 的光学仿真结果进行比较,发现二者具有很高的相似度。DNN-KE 方法的意义在于 DNN 通过学习可以记住(或存储)每个字符的光学反射面,相当于建立了一个高效智能的“光学字符库”,并具有向任意图案拓展的能力。基础配光方程适用于连续介质和分层均匀介质等环境,为现有配光方法提供了一个非成像光学的基础理论框架,有助于推动非成像光学系统性理论的建立。

## 2 设计原理与方法

### 2.1 配光方程

一个非成像光学系统包含光源、光学面和目标分布三个要素。光源发出的光线经过光学表面的光学作用投射到目标面并形成特定的光强分布,这个过程通常可以用配光方程<sup>[19]</sup>表示:

$$E(u, v) = \Gamma I(\theta, \phi), \quad (1)$$

式中: $E(u, v)$ 是在目标面上的光强(或照度)分布,目标面可以是曲面; $(u, v)$ 是描述目标曲面的二维参量; $I(\theta, \phi)$ 是点光源的光强角分布; $\Gamma$ 是光学算子,将角空间的  $I(\theta, \phi)$  映射到目标面空间形成  $E(u, v)$ ,或可理解为光线追迹。在连续渐变介质中, $\Gamma$ 由光迹方程决定。而在分区均匀介质中, $\Gamma$ 通常表现为反射、折射或直线传播,可以展开表示为

$$\Gamma = \Gamma(n_1, S_1, n_2, S_2, \dots, S_{(N-1)}, n_N), \quad (2)$$

式中: $n_i$ 是第  $i$  种介质的折射率, $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $S_i$ 是第  $i$  个光学面, $S_1$ 和  $S_{N-1}$ 分别靠近光源和目标面。

在一般照明问题中,整个光学系统沉浸在空气中,仅需一个反射器(一个光学面)或一个透镜(两个光学面)即可实现多数配光任务。透射情形下,式(2)可简化为

$$\Gamma = \Gamma(n_1, S_1, n_2, S_2, n_1). \quad (3)$$

反射情形下,只有单一空气介质,则式(2)进一步简化成

$$\Gamma = \Gamma(S_1). \quad (4)$$

显然  $S_1$  是反射面,此时,  $\Gamma$  可以表示为建立在  $S_1$  上自然标架场中  $3 \times 3$  的变换矩阵。当然  $\Gamma$  也可以在全局坐标中表达,但会非常复杂,如引入微分几何,  $\Gamma$  将由 Monge-Ampère 方程来表述。将式(4)代入式(1)可得单个反射面情形的配光方程为

$$E(u, v) = \Gamma(S_1)I(\theta, \phi). \quad (5)$$

式(5)是个逆问题求解,即已知光源和目标光分布求  $S_1$ 。如果目标光分布  $E(u, v)$  是任意分布,不具有任何对称性,则这个逆问题的解析求解是非常困难的,且  $S_1$  会是个自由曲面。

### 2.2 程能映射

在待求光学曲面只有一个的情况下,程能映射就可以简化为 SQM。SQM 是非成像光学中能实现任意目标光分布的配光设计方法之一,而 SEM 是一种适用于自由反射面设计的 SQM。SEM 的工作原理是将目标光分布离散化成像素阵列,利用椭球的双焦点特性建立像素与光源的映射关系,然后通过调节椭球常数实现每个像素上光通量的改变,最后经过迭代优化实现特定的目标光分布,如图 1 所示。

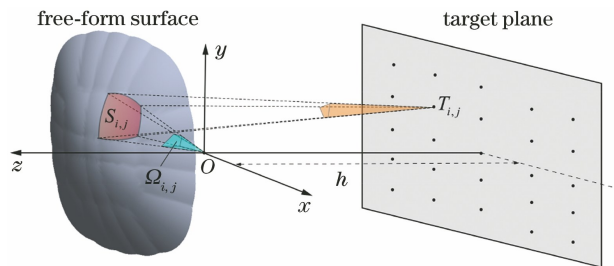


图 1 SEM 示意图

Fig. 1 Schematic of SEM

根据 SEM 的工作原理,配光方程[式(5)]可改写为

$$E_{i,j} = \iint_{\Omega_{i,j}} I(\theta, \phi) d\Omega, \quad (6)$$

式中:  $E_{i,j}$  是像素  $(i, j)$  的光通量;  $\Omega_{i,j}$  是第  $(i, j)$  个曲面片  $S_{i,j}$  对光源张成的立体角子域。根据理想光效要求,式(6)还需满足能量守恒:

$$\sum_{i,j} E_{i,j} = \iint_{2\pi} I(\theta, \phi) d\Omega, \quad (7)$$

在一般照明问题中,光源的最大立体角域为半空间  $2\pi$ ,式(7)中考虑了这一点。这里的  $S_{i,j}$  均为椭球

面,由于这些椭球面具有光学反射作用,故称之为椭流面,以示区别。任一椭流面  $S_{i,j}$  是由对应的椭球常数和两个焦点所确定,可表示为

$$S_{i,j} = S(K_{i,j}, O, T_{i,j}), \quad (8)$$

式中:  $K_{i,j}$  为  $S_{i,j}$  的椭球常数(即长轴长度);  $O$  是光源所在位置(一般为坐标原点);  $T_{i,j}$  为第  $i$  行、第  $j$  列像素所在的位置,如图 1 所示。这样求  $S_{i,j}$  的问题就转变为求  $K_{i,j}$  了。

显然,SEM 就是在已知  $E_{i,j}$  和  $I(\theta, \phi)$  并且二者满足式(7)时,根据式(6)求  $S_{i,j}$  或  $K_{i,j}$ 。由于式(6)和(7)都是复杂的积分方程,直接求解存在较大难度,一般采用数值优化算法来求解,如遗传算法、牛顿最速法等。文献[20]中给出了本文 SEM 迭代算法的详细介绍。为了获得更精确的光分布,需要增大像素化规模,但随着像素的增加,传统优化算法的收敛效率呈指数下降,甚至不可收敛或陷入局部最优。为了克服这个问题,本文引入 DNN 方法来提高优化效率。

### 2.3 DNN-KE 方法

SEM 确定了光线的落点位置,但不能直接确保对应点上的照度满足预设条件。为了解决 SEM 迭代调整效率低下的问题,这里提出将 DNN 与 SEM 相结合的 DNN-KE 设计方法。DNN-KE 方法利用 DNN 优秀的非线性表达能力实现 KE 映射关系的拟合,即从点阵  $T$  上的照度分布  $E$  直接预测相应的椭球常数矩阵  $K$ ,从而快速生成所需的自由曲面。本文使用 Flux 作为深度学习框架,Flux 是使用科学计算语言 Julia 编写的机器学习库,将直观编程模型与机器学习所需的编译器技术相结合,使得用户代码执行高效且便于修改[21]。

如图 2 所示,利用 Flux 构建了一个特定参数规模的 DNN,将不同样本 KE 映射关系中成对的  $\{E, K\}$

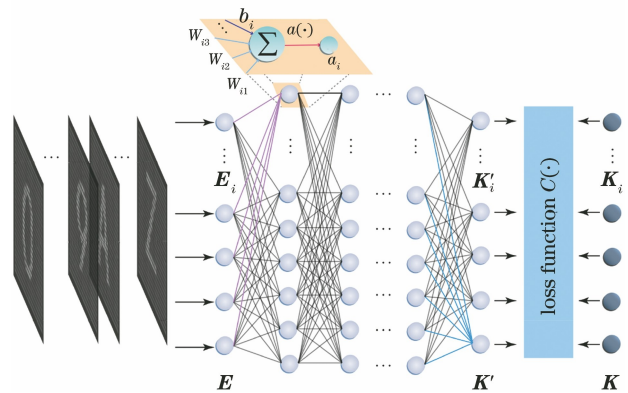


图 2 DNN-KE 方法示意图

Fig. 2 Schematic of DNN-KE method



作为 DNN 的训练样本。训练时,将样本中的  $E$  输入到 DNN 的输入层,经过逐层处理后在输出层给出预测的  $K'$ 。此时  $K'$  与样本中对应的  $K$  之间存在的偏差可由损失(代价)函数  $C(K, K')$  来表示:

$$C(K, K') = \text{MSE}(K, K') = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (K_{i,j} - K'_{i,j})^2, \quad (9)$$

式中:  $\text{MSE}$  为求均方差;  $K_{i,j}$  和  $K'_{i,j}$  分别是  $K$  和  $K'$  的元素;  $M \times N$  是二维离散化规模。有了损失函数值, BP (back propagation) 算法就可以反向更新 DNN 各层神经元的权重和偏置等参数,通过反复训练降低损失函数值,直至 DNN 达到预定的收敛条件,这样可使 DNN 很好地拟合 KE 映射关系,并得到构建光学表面所需的  $K$ 。

DNN-KE 算法原则上可以实现任意光分布的光学表面求解,但需要海量的训练数据和良好的计算条件作支撑。以像素规模  $m \times n = 28 \times 28$  和 6 级灰度为例,光分布的状态总数为  $6^{784}$ , 这是个天文数字的搜索空间,因此基于全连接网络结构的 DNN-KE 算法直接实现任意光分布的配光设计尚存在较大的困难。如果将搜索范围限定到由 36 个像素规模为  $28 \times 28$  且对比度为 5:1 的特定字符构成的样本空间中,则 DNN-KE 算法是可行的。

### 3 仿真与分析

#### 3.1 光学场景

针对图 1 所示的光学场景,朗伯型点光源在距离目标面中心正左方 400 mm 处向左侧发光,点阵  $T$  的规模为  $28 \times 28$ , 其元素等间距地分布在  $400 \text{ mm} \times 400 \text{ mm}$  的目标面上。以黑体阿拉伯数字“0~9”和黑体大写字母“A~Z”共 36 个字符像素图为基础[图 3(a)], 设对比度为 5:1, 得到目标分布  $E$ , 利用 SEM 迭代求得相应的  $K$ , 形成由 36 个样本组成的训练样本集。这些样本集逐一经过光学仿真

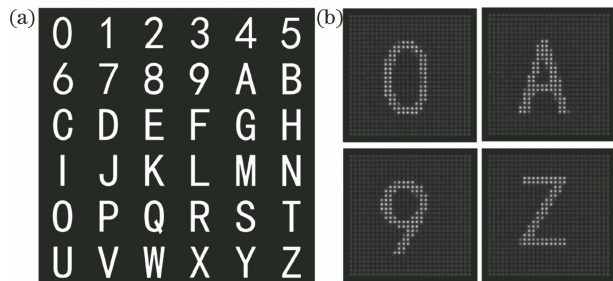


图 3 样本集准备。(a) 36 个字符样本;(b) SEM 验证

Fig. 3 Preparation of sample set. (a) 36 character samples; (b) SEM test

软件的验证,检验方法是由  $K$  构造出的光学表面,将其导入光学软件中,仿真得到照度分布,再与目标分布  $E$  进行比较。这里仅列出了“0”、“9”、“A”和“Z”4 个样本,如图 3(b)所示,对比结果具有良好的一致性。

#### 3.2 样本预处理

在上述光学场景下,通过 SEM 的迭代调整可以得到相应字符样本的  $E$  和  $K$  数据,并将其作为 2.3 节中 DNN 训练集样本。通常需要对样本数据进行预处理,本文仅对样本中  $E$  和  $K$  分别进行简单的线性归一化处理,得到

$$\tilde{x} = \frac{x - \min(x)}{\max(x) - \min(x)}, \quad (10)$$

式中:  $x$  为样本中未归一化处理的  $E$  或  $K$ ;  $\tilde{x}$  为归一化处理后的  $E$  或  $K$ 。通过归一化处理可以提高神经网络的收敛性能,也方便后续设计结果评估时结构相似度的计算。

#### 3.3 超参分析

一个完整 DNN 模型由参数和超参数共同决定。参数是可以通过优化算法进行学习的,如权重和偏置等;超参数是用来定义模型结构或优化策略的,如网络形状、网络层数、隐藏层规模、优化器、激活函数、损失函数和学习率等。本文 DNN 的网络形状设为直筒形,损失函数由式(9)给定,优化器选用 ADAM,学习率为 0.001,接下来对网络结构中的层数、层规模和激活函数等超参数进行考察。

首先考察激活函数。设定层规模的探究范围为 20~200 层,待考察激活函数包括 ReLU、tanh 和 sigmoid 三个,其训练情况如图 4 所示。图中  $V_{\text{MSE}}$  表示均方误差值。由图 4(a)可见,在层规模大于 70 后,激活函数 ReLU 的损失函数稳定在最小位置。从训练模型耗时[图 4(b)]看,层规模越小则训练耗时越少,而且在整个探究范围内,激活函数 ReLU 的训练时间是最短的。

考察 DNN 的网络结构。这里激活函数设定为 ReLU 函数,为了在更宽范围内寻找合适的层规模,将层规模的探究范围扩展为 20~400 层。如图 5(a)所示,在层规模大于 340 以后,不同网络层数情况下的代价函数基本趋于稳定,且当网络层数超过 3 层后,继续增加层数对损失函数值的影响并不大。另外,从图 5(b)中可看到,当层规模增加时,训练所需要的收敛时间总体上是不断增加的。

综上所述,为兼顾精度和耗时,本文选取 ReLU 激活函数、每层 340 个神经元和 3 层隐含层作为 DNN 的超参数设定。

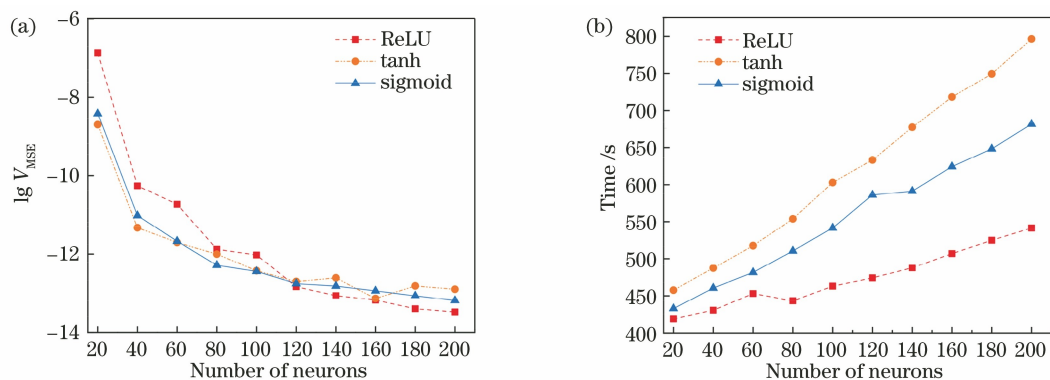


图 4 激活函数和 DNN 层规模的调参分析。(a) 损失函数值; (b) 训练耗时

Fig. 4 Parameter adjustment analysis of activation function and DNN layer size. (a) Loss function value; (b) training time

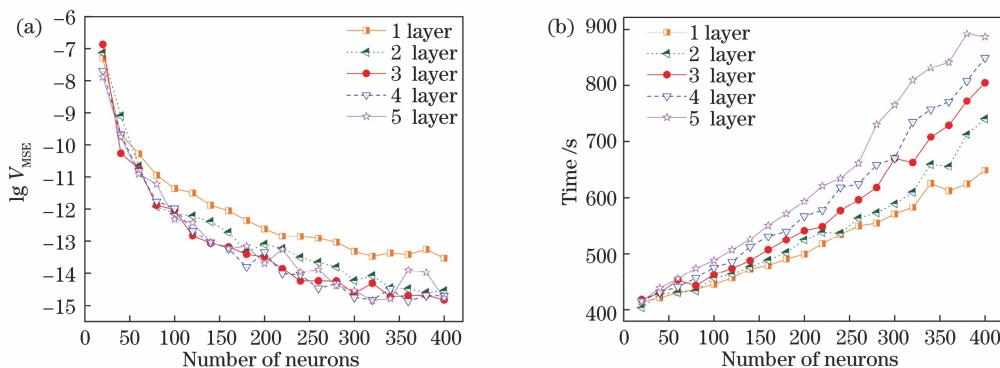


图 5 DNN 层数和层规模的调参分析。(a) 损失函数值; (b) 训练耗时

Fig. 5 Parameter adjustment analysis of DNN layer number and layer size. (a) Loss function values; (b) training time

### 3.4 网络训练

网络训练就是将 3.2 节中准备好的样本集输入 3.3 节设定的 DNN 中进行寻优迭代, 这个工作主要由 Flux 框架来完成。模型训练过程中损失函数值随迭代次数(epoch)的变化情况如图 6 所示, 不难发现: 损失函数值随着迭代次数的增加呈指数下降, 虽然在 10~30 次迭代区间存在较大的涨落, 但随着迭代过程的持续推进, 涨落幅度也是不断变小的, 说明 DNN 训练得到了较好的收敛。

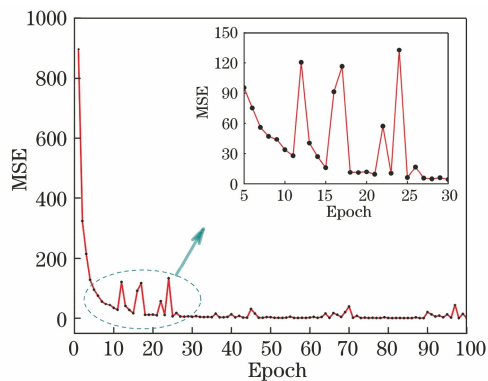


图 6 DNN 训练的收敛情况

Fig. 6 Convergence of DNN training

为了考察 DNN 模型的训练效果且为了不失一般性, 选取黑体大写字母“A”作为抽样样本, 将其初始照度分布  $E_A$  分别代入 SEM 和 DNN-KE, 计算得到各自的  $K'$ , SEM 耗时约 1200 s, 而 DNN 耗时仅为 0.16 s。将两者生成的  $K'$  按 3.1 节光学场景构建反射曲面, 并导入光学软件进行仿真, 得到各自的照度分布, 如图 7 所示。其中, 图 7(a) 是由 SEM 迭代所得, 图 7(b) 是由 DNN 预测所得, 两者具有良好的一致性, 肉眼几乎难以分辨。

### 3.5 一致性分析

为了验证 DNN-KE 方法的实际效果, 引入 SSIM 来评估 DNN-KE 和 SEM 设计效果的一致性。SSIM 可以从亮度、对比度和结构上综合评价两幅图像  $x, y$  的相似程度, 是在图像处理领域比较成熟的评价方法。结构相似度的定义<sup>[22]</sup>为

$$SSIM(x, y) = [l(x, y)]^\alpha \cdot [c(x, y)]^\beta \cdot [s(x, y)]^\gamma, \quad (11)$$

式中:  $\alpha, \beta, \gamma$  为权重因子, 这里取 1;  $l, c$  和  $s$  分别代表亮度因子、对比度因子和结构因子, 其计算方法分别为

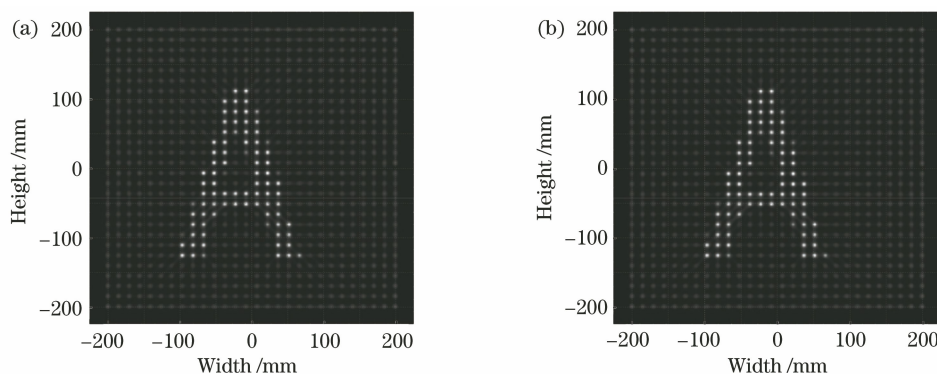


图 7 光学仿真对比。(a) SEM;(b) DNN-KE

Fig. 7 Optical simulation comparison. (a) SEM; (b) DNN-KE

$$\begin{cases} l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{2\mu_x\mu_y + C_1}{\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_1} \\ c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{2\sigma_x\sigma_y + C_2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2} \\ s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\sigma_{xy} + C_3}{\sigma_x\sigma_y + C_3} \end{cases}, \quad (12)$$

式中： $\mu_x$  和  $\mu_y$  为各自光分布的平均值； $\sigma_x$  和  $\sigma_y$  是标准差； $\sigma_{xy}$  是协方差； $C_1$ 、 $C_2$  和  $C_3$  是正则化常数，在亮度归一化下的默认值分别为 0.0001、0.0009 和 0.00045。

提取图 7(a)与图 7(b)中的光学仿真结果的灰度数据分别作为  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{y}$ ，将其归一化后代入式(11)可得 SSIM 为 99.97%。这表明 DNN-KE 方法得到的照度分布与 SEM 计算结果具有很高的一致性，DNN 很好地拟合了 KE 映射，也实现了根据预定照度设计光学表面这个逆问题的求解。

## 4 结 论

一个非成像光学系统通常可由一个配光方程来描述，而配光设计是对配光方程求逆的过程，所以配光方程可视为非成像光学的基础方程。利用程能映射可实现配光方程中光学算子的参数化表达，进一步推导出 SEM 下的配光方程。SEM 中存在着复杂的非线性竞争关系，但保持了映射关系的单调性，特引入具有良好非线性表达能力的 DNN 来拟合 KE 映射，进而借助深度学习的优化机制构建了 DNN-KE 方法，实现了 DNN 和 KE 映射的珠联璧合。接着以英文字母和阿拉伯数字为例，在输入点阵规模为  $28 \times 28$  的条件下，通过对三层神经网络进行多维度调参并进行训练，快速实现相应字符照度分布的光学曲面设计，其耗时为亚秒级，而 SEM 通常需要 20 min。DNN-KE 光学仿真结果的结构相似度达到了 99.97%，验证了 DNN 具有很好拟合程能映射

的能力。DNN-KE 设计方法的意义在于 DNN 通过学习可以记住(或存储)每个字符的光学反射面，即可以建立一个高效智能的“光学字符库”供设计者调用，并且该“光学字符库”具备存储任意图案的能力。

下一步将对 DNN-KE 设计方法的预测功能进行测试，即对非训练集中的字符或图案进行预测评估，如在原字符样本基础上通过平移、旋转或缩放等操作生成非训练集的新样本，初步验证结果表明 DNN 对平移等作用的预测是有效的。

## 参 考 文 献

- [1] Wu R M, Feng Z X, Zheng Z R, et al. Design of freeform illumination optics [J]. *Laser & Photonics Reviews*, 2018, 12(7): 1700310.
- [2] Fang F Z, Zhang N, Zhang X D. Precision injection molding of freeform optics [J]. *Advanced Optical Technologies*, 2016, 5(4): 303-324.
- [3] Tai W, Schwarte R. Design of an aspherical lens to generate a homogenous irradiance for three-dimensional sensors with a light-emitting-diode source [J]. *Applied Optics*, 2000, 39(31): 5801-5805.
- [4] Mendes-Lopes J, Benítez P, Miñano J C, et al. Simultaneous multiple surface design method for diffractive surfaces [J]. *Optics Express*, 2016, 24(5): 5584-5590.
- [5] Ries H, Muschaweck J. Tailored freeform optical surfaces [J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2002, 19(3): 590-595.
- [6] 罗毅, 张贤鹏, 王霖, 等. 半导体照明中的非成像光学及其应用 [J]. *中国激光*, 2008, 35(7): 963-971.  
Luo Y, Zhang X P, Wang L, et al. Non-imaging optics and its application in solid state lighting [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2008, 35(7): 963-971.
- [7] Wu R M, Xu L, Liu P, et al. Freeform illumination design: a nonlinear boundary problem for the elliptic

- Monge-Ampère equation[J]. Optics Letters, 2013, 38(2): 229-231.
- [8] Chang S Q, Wu R M, An L, et al. Design beam shapers with double freeform surfaces to form a desired wavefront with prescribed illumination pattern by solving a Monge-Ampère type equation [J]. Journal of Optics, 2016, 18(12): 125602.
- [9] Michaelis D, Schreiber P, Bräuer A. Cartesian oval representation of freeform optics in illumination systems[J]. Optics Letters, 2011, 36(6): 918-920.
- [10] Ma Y F, Zhang H, Su Z Y, et al. Hybrid method of free-form lens design for arbitrary illumination target [J]. Applied Optics, 2015, 54(14): 4503-4508.
- [11] Oliker V. Controlling light with freeform multifocal lens designed with supporting quadric method (SQM) [J]. Optics Express, 2017, 25(4): A58-A72.
- [12] Lucas A, Iliadis M, Molina R, et al. Using deep neural networks for inverse problems in imaging: beyond analytical methods [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2018, 35(1): 20-36.
- [13] Goodfellow I, Bengio Y, Courville A. Deep learning [M]. Cambridge: The MIT Press, 2016: 167-227.
- [14] 胡芬, 林洋, 侯梦迪, 等. 基于深度学习的细胞骨架图像超分辨重建 [J]. 光学学报, 2020, 40(24): 2410001.  
Hu F, Lin Y, Hou M D, et al. Super-resolution reconstruction of cytoskeleton image based on deep learning[J]. Acta Optica Sinica, 2020, 40(24): 2410001.
- [15] 吴桐, 杨金成, 廖瑞颖, 等. 基于线阵图像深度学习的电池组焊缝瑕疵检测 [J]. 激光与光电子学进展, 2020, 57(22): 221502.  
Wu T, Yang J C, Liao R Y, et al. Weld defect inspection of battery pack based on deep learning of linear array image [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2020, 57(22): 221502.
- [16] 王飞, 王昊, 卞耀明, 等. 深度学习在计算成像中的应用 [J]. 光学学报, 2020, 40(1): 0111002.  
Wang F, Wang H, Bian Y M, et al. Applications of deep learning in computational imaging [J]. Acta Optica Sinica, 2020, 40(1): 0111002.
- [17] 杨通, 段瓔哲, 程德文, 等. 自由曲面成像光学系统设计: 理论、发展与应用 [J]. 光学学报, 2021, 41(1): 0108001.  
Yang T, Duan Y Z, Cheng D W, et al. Freeform imaging optical system design: theories, development, and applications [J]. Acta Optica Sinica, 2021, 41(1): 0108001.
- [18] Gannon C, Liang R G. Using machine learning to create high-efficiency freeform illumination design tools[EB/OL]. (2018-12-12)[2021-03-02]. <https://arxiv.org/abs/1903.11166>.
- [19] 张航, 严金华. 非成像光学设计 [M]. 北京: 科学出版社, 2016: 7-12.  
Zhang H, Yan J H. Nonimaging optical design[M]. Beijing: Science Press, 2016: 7-12.
- [20] 陆建东. 基于 SQM 自由光学曲面的正交多项式曲面光滑化研究 [D]. 杭州: 浙江工业大学, 2018: 32-51.  
Lu J D. Orthogonal polynomials surface smoothing based on the free-form optical surfaces from SQM [D]. Hangzhou: Zhejiang University of Technology, 2018: 32-51.
- [21] Innes M. Flux: elegant machine learning with Julia [J]. Journal of Open Source Software, 2018, 3(25): 602.
- [22] Sara U, Akter M, Uddin M S. Image quality assessment through FSIM, SSIM, MSE and PSNR: a comparative study [J]. Journal of Computer and Communications, 2019, 7(3): 8-18.