

基于 Radon 逆变换的相对平行直线扫描 CT 解析重建

李雷^{1,2}, 谭川东^{1,2}, 廖明娟^{2,3}, 余海军^{2,3}, 席雅睿^{2,3}, 刘丰林^{1,2,3*}

¹重庆大学机械传动国家重点实验室, 重庆 400044;

²重庆大学工业 CT 无损检测教育部工程研究中心, 重庆 400044;

³重庆大学光电技术及系统教育部重点实验室, 重庆 400044

摘要 计算机断层成像(CT)技术广泛应用于医学诊断、工业检测等领域。近年来,提出了一种相对平行直线扫描 CT(PTCT),采取射线源-探测器对物体作相对平行直线移动的扫描方式来采集数据,其结构简单、应用灵活、成本低。针对 PTCT 图像重建,提出了一种基于 Radon 逆变换的解析重建算法(PTCT-DHB)。相比于经典的 PTCT 滤波反投影算法(PTCT-FBP),该算法将斜坡滤波器分解为求导和希尔伯特变换两个步骤,提升了抗噪性能。搭建了 PTCT 实验系统,进行了仿真实验和实际实验。实验结果表明,与 PTCT-FBP 算法相比,本文算法重建图像的均方根误差值降低了 0.0108,峰值信噪比值提升了 4.437,结构相似性值提升了 0.0041,PTCT-DHB 算法能有效抑制高频噪声,快速地重建高质量 CT 图像。

关键词 成像系统; 计算机断层成像; 直线扫描计算机断层成像; 图像重建; Radon 逆变换; 希尔伯特变换

中图分类号 TP391

文献标志码 A

doi: 10.3788/AOS202141.0611003

Analytic Reconstruction for Parallel Translational Computed Tomography Based on Radon Inverse Transform

Li Lei^{1,2}, Tan Chuandong^{1,2}, Liao Mingjuan^{2,3}, Yu Haijun^{2,3}, Xi Yaru^{2,3}, Liu Fenglin^{1,2,3*}

¹State Key Laboratory of Mechanical Transmissions, Chongqing University, Chongqing 400044, China;

²Engineering Research Center of Industrial Computed Tomography Nondestructive Testing, Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing 400044, China;

³Key Laboratory of Optoelectronic Technology & Systems (Chongqing University), Ministry of Education, Chongqing 400044, China

Abstract Computed tomography (CT) has been widely applied in medical diagnosis, industrial testing, and other fields. Recently, parallel translational computed tomography (PTCT) was proposed, in which the source and the detector were translated in parallel and opposite directions for data collection, featuring a simple structure, flexible applications, and low costs. In this paper, derivation-Hilbert transform-backprojection for PTCT (PTCT-DHB) based on Radon inverse transform was proposed for image reconstruction. Compared with the conventional algorithm of filtered backprojection for PTCT (PTCT-FBP), the proposed algorithm decomposed a ramp filter into two steps: derivation and Hilbert transform, which improved the noise resistance. Furthermore, a PTCT experimental system was established, and numerical simulations and practical experiments were performed. The results show that in comparison with the PTCT-FBP algorithm, the root mean squared error value of the images reconstructed by the PTCT-DHB algorithm is reduced by 0.0108, the peak signal-to-noise ratio value is increased by 4.437, and the structural similarity value is increased by 0.0041. The PTCT-DHB algorithm can effectively

收稿日期: 2020-09-27; 修回日期: 2020-10-23; 录用日期: 2020-11-05

基金项目: 国家自然科学基金(61471070)、重庆市基础研究和前沿探索项目(cstc2020jcyj-msxmX0553)

* E-mail: liufl@cqu.edu.cn

suppress high-frequency noise and quickly reconstruct high-quality CT images.

Key words imaging systems; computed tomography; translational computed tomography; image reconstruction; Radon inversion; Hilbert transform

OCIS codes 110.6960; 340.7440; 110.3010

1 引言

计算机断层成像(CT)技术是一种以 X 射线穿过物体的衰减特性作为依据的检测技术,因其能获取物体内部结构信息并实现可视化成像,而广泛应用于医疗影像诊断、工业无损检测等领域^[1-3]。传统医用 CT 成像系统往往采用圆周扫描或螺旋扫描的方式,以滑环为主的系统部件体积巨大、构造复杂、价格高昂,不满足简易化、低成本、可移动的应用趋势,尤其在发展中国家及地区、战地移动医院、重大自然灾害现场难以得到有效应用。并且滑环的封闭结构限制了其对在役运输长管道、线缆等特殊物体的检测。近年来,Liu 等^[4]提出了一种相对平行直线扫描 CT(PTCT),采用射线源-探测器对物体作相对平行直线移动的扫描方式采集数据,这种方式取代了传统 CT 的滑环等部件,降低了系统成本,简化了整体结构,使用灵活,易于推广。

近年来,多名学者基于不同应用需求提出了不同的直线 CT 扫描方式和相应理论^[5-7]。对于直线 CT 重建算法,其主要可分为解析类和迭代类,迭代类算法计算量大、耗时长,解析类算法重建速度快、效率高^[8-9]。对于 PTCT 图像重建,Liu 等^[4]将有序子集-同时代数重建算法(OS-SART)与全变分最小化理论(TVM)相结合来对图像感兴趣区域(ROI)进行仿真重建,验证了 PTCT 的可行性。伍伟文等^[10]基于傅里叶积分定理,推导了 PTCT 的滤波反投影重建算法(PTCT-FBP),在 3 段(3T)扫描下取得了较好的全局重建结果,提高了成像速度。Kong 等^[11]通过余弦因子加权将 FBP 算法从扇形束推广至锥束,实现了 PTCT 的三维近似重建。Wu 等^[12]针对不完整和截断的投影数据,基于 PI 线理论提出了 PTCT 的反投影滤波重建算法(BPF),并详细证明了该算法重建的精确性^[13],实现了 ROI 的精确重建。以上工作进一步发展了 PTCT 的理论及应用。

作为主流的二维解析重建算法,滤波反投影重建算法(FBP)^[14]的基本步骤为滤波和反投影。滤波的基本形式是对频域内投影数据乘以斜坡滤波器传递函数,其等价于在空间域对投影数据作卷积。斜坡滤波器理论上是一种无限频带的线性高通滤波

器,通常会使用窗函数来限制其频带^[15],而对于引入了位置权重的扇形束重建,加窗操作使斜坡滤波器卷积核不满足傅里叶变换线性性质中的齐次性,位置权重因子会影响重建图像的分辨率和噪声,因而扇形束 FBP 重建算法不再精确^[16-17]。为改善以上问题,You 等^[17-20]基于 Radon 逆变换,利用傅里叶变换和希尔伯特变换性质,提出一种新的滤波反投影算法,即求导-希尔伯特变换-反投影算法(DHB),它将滤波函数分解为求导运算和希尔伯特变换两个步骤,再进行反投影操作。该算法中的求导步骤通常转化为差分运算,差分运算与希尔伯特变换的组合使滤波函数具有低频近似线性放大、高频适当压低的特性^[20],因而能压制一部分高频噪声。同时没有应用到斜坡滤波器卷积核的齐次性,因而图像不均匀的分辨率和噪声问题得以改善,从而提高了重建质量。

在 PTCT-FBP 算法中,同样采取了斜坡滤波器的形式并存在对其加窗的操作,噪声难以避免。而适用于 PTCT 扫描方式的同时迭代重建算法(PTCT-SIRT),在一次迭代中利用了通过像素的全部投影数据,考虑了所有测量到的投影数据的误差,因而具有较强的抑噪能力,但也因此增加了计算量,降低了重建速度^[21]。为改善以上问题,进一步提升重建图像质量,提高重建速度,本文通过建立 PTCT 平面几何模型,推导 1 段(1T)平行束扫描的 DHB 重建算法,并通过变量替换和坐标系变换,将 1T 平行束重建推广至多段扇形束重建,从而得到 PTCT 的 DHB 重建算法(PTCT-DHB)。本文搭建了实验系统,进行了仿真实验与实际实验。仿真实验验证了本文所推导算法的可行性、有效性,在噪声较大的情形下,PTCT-DHB 算法具有比传统的 PTCT-FBP 算法更好的抑噪能力。实际实验验证了其应用效果,PTCT-DHB 算法能实现图像的快速、高质量重建。

2 几何模型

在 PTCT 扫描方式中,扫描对象居中,射线源和平板探测器(FPD)相对布置在扫描对象两侧,射线源发射锥束射线,穿透扫描对象,并由另一侧平板探测器接收,如图 1 所示。在 1T 扫描中,扫描对象

固定,射线源和平板探测器同时向相反方向作平行直线移动。坐标系 $O-xyz$ 固连于扫描对象上,原点与扫描对象中心 O 重合, x 轴平行于射线源运动轨迹,以射线源运动方向为正, y 轴垂直于探测器平板面,正方向指向探测器一端。

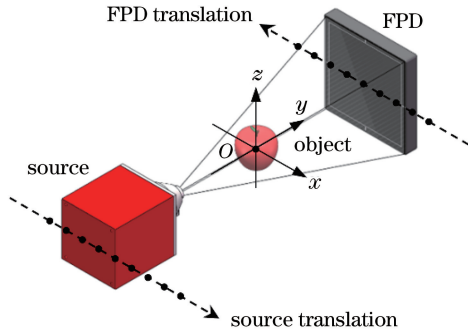


图 1 PTCT 扫描方式示意图

Fig. 1 Schematic diagram of PTCT scanning mode

为进一步说明 PTCT 的扇形束扫描方式,取锥束中心水平面即 $x-y$ 平面,则锥束可简化为扇形束,平板探测器相应取中心横向阵列,可得到 PTCT 平面几何模型(图 2)。用 $f(x, y)$ 表示扫描对象在 $x-y$ 平面的断层图像函数, Γ_F 和 Γ_H 分别为射线源和探测器的运动轨迹, D 和 L 分别为射线源轨迹 Γ_F 与中心 O 、与探测器轨迹 Γ_H 的距离。在运动过程中,射线源焦点 F 、中心 O 、探测器中点 H 始终保持共线,称该连线为中心射线 l_0 ,规定中心射线 l_0 与

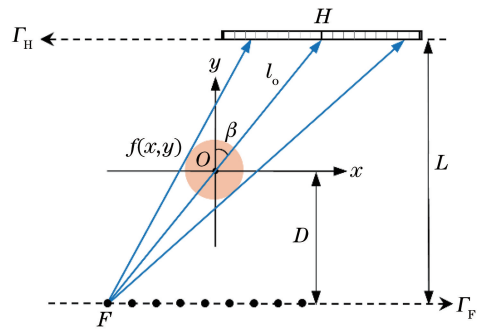


图 2 PTCT 平面几何模型

Fig. 2 Planar geometric model of PTCT

y 轴正半轴的夹角为投影角度 β ,且以逆时针为正方向。

根据傅里叶中心切片定理,实现扫描对象断层图像的全局精确重建,射线需至少绕扫描对象旋转 180° 以覆盖完整的傅里叶空间。由于射线源及探测器实际行程有限,1T 扫描角度不足 180° ,无法实现精确重建,因此有必要进行多段直线扫描以获取足够的投影数据。多段直线扫描方式为:射线源及探测器按预定轨迹完成一段直线扫描,然后将射线源轨迹及探测器轨迹绕中心 O 旋转一定角度,每段直线扫描运动方式相同,直至完成多段直线扫描。如图 3(a)、(b)所示的 4 段(4T)扫描、6 段(6T)扫描几何模型,射线源和探测器的有效采样轨迹采取封闭的正多边形,即每段采样轨迹分度相同,有效长度均等。

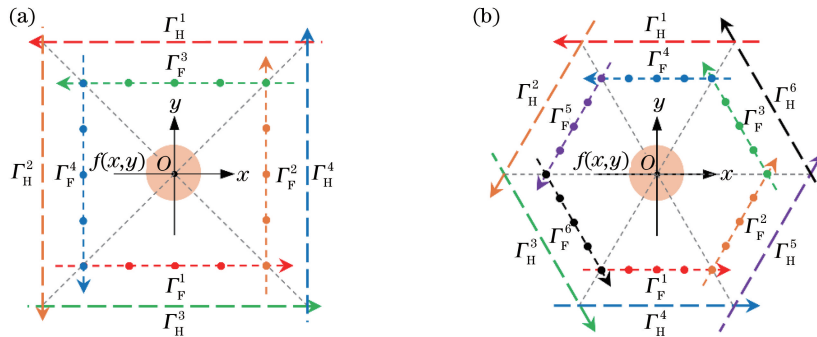


图 3 多段 PTCT 几何模型。(a) 4T 几何模型;(b) 6T 几何模型

Fig. 3 Geometric model of multi-translation PTCT. (a) 4T geometric model; (b) 6T geometric model

3 PTCT-DHB 重建算法研究

对于传统圆周 CT 扫描,可通过替换变量将扇形束射线转化为平行束射线,然后基于平行束重建公式推导扇形束的解析重建算法。对于 PTCT,亦可通过上述过程推导扇形束 PTCT 的 DHB 重建算法。

3.1 平行束 PTCT 的 DHB 重建

图 4 为 1T 平行束 PTCT 几何模型,对于任意

穿过图像函数 $f(x, y)$ 的射线 l ,设其与 y 轴正半轴的夹角为 θ ,且以逆时针为正方向,与原点 O 的距离为 t 。

射线 l 对 $f(x, y)$ 的 Radon 变换即线性积分为

$$p(t, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy, \quad (1)$$

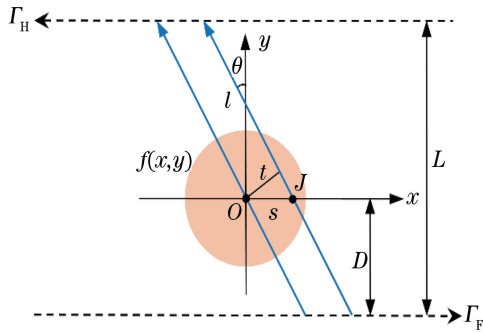


图 4 1T 平行束 PTCT 几何模型

Fig. 4 Parallel-beam geometric model of the 1T-PTCT

式中: δ 为狄拉克函数。在圆周平行束 CT 扫描中, 射线 l 可由 t 和 θ 唯一确定。对于 PTCT, t 与探测器方向不平行, 为方便索引射线投影值, 设射线 l 与 x 轴的交点 J 到原点 O 的距离 \overline{OJ} 为 s , 由 s 和 θ 描述射线 l , 其对 $f(x, y)$ 的线性积分值未改变, 表示为

$$p(s, \theta) = p(t, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(x + y \tan \theta - s) dx dy. \quad (2)$$

对 $p(s, \theta)$ 作一维傅里叶变换, 整理可得:

$$\hat{p}(\omega, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp[-j2\pi(x\omega + y\omega \tan \theta)] dx dy. \quad (3)$$

已知二维傅里叶变换定义式为

$$\hat{f}(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy)] dx dy. \quad (4)$$

由 (3) 式和 (4) 式可得, $\hat{p}(\omega, \theta) = \hat{f}(\omega, \omega \tan \theta)$, 即 $\hat{p}(\omega, \theta)$ 在 ω 处的值与 $f(x, y)$ 的二维傅里叶变换 $\hat{f}(u, v)$ 中 $u = \omega, v = \omega \tan \theta$ 处的值相等, 说明 PTCT 扫描方式同样满足傅里叶中心切片定理, 在角度 θ 下图像投影的一维傅里叶变换等于图像在二维傅里叶变换平面上与 x 轴夹角为 θ 的片段。因此只要获取断层图像至少 180° 的投影数据, 就能求得其在二维傅里叶变换空间中各个角度的频域值, 从而获得完整的二维傅里叶变换函数 $\hat{f}(u, v)$ 。

对于 1T 平行束 PTCT 扫描模型, 理论上射线源轨迹取无限长, 则可获得 $\theta \in (-\pi/2, +\pi/2)$ 的投

影数据, 直接通过二维傅里叶逆变换就能实现对断层图像 $f(x, y)$ 的重建, 即

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u, v) \exp[j2\pi(ux + vy)] du dv, \quad (5)$$

令 $u = w, v = w \tan \theta$, 则

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial w} & \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial w} & \frac{\partial v}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \tan \theta & \frac{w}{\cos^2 \theta} \end{vmatrix} = \frac{w}{\cos^2 \theta}, du dv = \frac{w}{\cos^2 \theta} dw d\theta, \quad (6)$$

式中: $|J|$ 为雅可比因子。将 (3) 式、(6) 式代入 (5) 式, 整理可得:

$$f(x, y) = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{p}(\omega, \theta) \frac{|\omega|}{\cos^2 \theta} \exp[j2\pi\omega(x + y \tan \theta)] d\omega d\theta. \quad (7)$$

(7) 式即为广义的 PTCT 滤波反投影算法表达式, $|\omega|$ 为滤波器传递函数, 构造了一种对频域投影数据的斜坡滤波形式, $1/\cos^2 \theta$ 是 PTCT 扫描方式中对不同角度投影数据的加权修正。当前算法是在频域中进行滤波的, 不方便计算机快速处理, 应作进一步优化。

基于 Radon 逆变换, 将斜坡滤波器拆解为两部分, 即 $|\omega| = j2\pi\omega \frac{1}{j2\pi} \text{sgn}(\omega)$, 其中 $\text{sgn}(\omega)$ 为符号函数, 代入 (7) 式可得:

$$f(x, y) = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{p}(\omega, \theta) j2\pi\omega \frac{1}{j2\pi} \text{sgn}(\omega) \times \exp[j2\pi\omega(x + y \tan \theta)] \frac{1}{\cos^2 \theta} d\omega d\theta. \quad (8)$$

由傅里叶变换的微分性质, 在频域内对函数 $f(c)$ 的傅里叶变换 $\hat{f}(\omega)$ 乘上 $j2\pi\omega$ 等价于在空间域对 $f(c)$ 求导, 即

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega) j2\pi\omega] = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) j2\pi\omega \exp(j2\pi\omega c) d\omega = \frac{df(c)}{dc}, \quad (9)$$

式中: \mathcal{F}^{-1} 为傅里叶逆变换。

由希尔伯特变换的定义, 函数 $f(c)$ 的希尔伯特变换 $h(c)$ 在空间域内等价于一项卷积积分, 即

$$h(c) = f(c) * \frac{1}{\pi c} = p.v. \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \frac{1}{\pi(c-s)} ds, \quad (10)$$

式中: $p.v.$ 表示广义积分的积分主值。若 $h(c)$ 的傅里叶变换为 $\hat{h}(\omega)$, 则有 $\hat{h}(\omega) = \hat{f}(\omega) \frac{1}{j} \text{sgn}(\omega)$, 可得:

$$h(c) = f(c) * \frac{1}{\pi c} = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \frac{1}{j} \text{sgn}(\omega) \exp(j2\pi\omega c) d\omega. \quad (11)$$

根据(9)式和(11)式,(8)式可整理为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left[\frac{dp(x + y \tan \theta, \theta)}{d(x + y \tan \theta)} * \frac{1}{\pi(x + y \tan \theta)} \right] \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta. \quad (12)$$

由(10)式可知,(12)式可进一步改写为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp(s, \theta)}{ds} \frac{1}{\pi(x + y \tan \theta - s)} \frac{1}{\cos^2 \theta} ds d\theta. \quad (13)$$

(12)式和(13)式即为 1T 平行束 PTCT 的 DHB 重建算法表达式。实际情形中, 1T 扫描的射线源采样轨迹是有限的, 故 θ 取值范围应更改为 $\theta \in (\theta_{\min}, \theta_{\max})$, 其中 θ_{\min} 和 θ_{\max} 分别为 1T 扫描中 θ 所取最小值和最大值。

3.2 扇形束 PTCT 的 DHB 重建

图 5 为 1T 扇形束 PTCT 几何模型, 中心射线 l_0 与探测器相交于探测器中点 H , 任意射线 l 与探测器相交于点 K , 取 $\overline{HK} = e$, 且以 x 正半轴方向为正。

射线 l 可由 β 和 e 唯一确定。对于扇形束扫描, 扇形束中的每一条射线均可与平行束中某条射

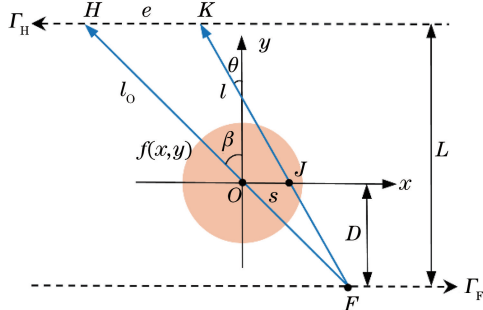


图 5 1T 扇形束 PTCT 几何模型

Fig. 5 Fan-beam geometric model of 1T-PTCT

线相对应, 由图 5 中几何关系可知:

$$\theta = \arctan \frac{L \tan \beta - e}{L}, \quad (14)$$

$$s = \frac{D}{L} e. \quad (15)$$

则平行束射线可用扇形束射线参数 β 和 e 来描述, 且其线性积分值即投影数据是相同的, 即 $p(s, \theta) = R(e, \beta)$ 。对(13)式进行积分替换:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial s}{\partial e} & \frac{\partial s}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \theta}{\partial e} & \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \frac{D}{L} & 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial e} & \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \end{vmatrix} = \frac{D}{L} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} = \frac{DL}{\cos^2 \beta [L^2 + (L \tan \beta - e)^2]}, \quad (16)$$

$$ds d\theta = \frac{DL}{\cos^2 \beta [L^2 + (L \tan \beta - e)^2]} de d\beta, \quad (17)$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{L^2 + (L \tan \beta - e)^2}{L^2}. \quad (18)$$

将(16)、(17)、(18)式代入(13)式, 整理可得:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\beta_{\min}}^{\beta_{\max}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dR(e, \beta)}{de} \times \frac{1}{\pi(x + y \tan \beta - \frac{y+D}{L}e)} \frac{1}{\cos^2 \beta} de d\beta. \quad (19)$$

为重建图 6 中图像内某点 $M(x, y)$ 的数值 $f(x, y)$, 设过点 M 与 x 轴平行的线交中心射线 l_0 于点 M' , 过点 M 的射线 l' 交探测器于点 Q , 取 $\overline{HQ} = e'$ 。

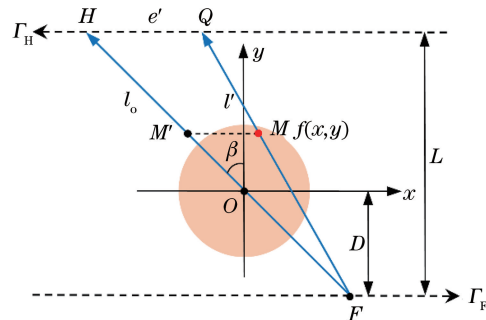


图 6 重建点 M 几何关系

Fig. 6 Reconstruct the geometric relationship of point M

由图 6 中几何关系可知:

$$\frac{\overline{FO} + \overline{OM'}}{\overline{FH}} = \frac{\overline{MM'}}{\overline{HQ}} = \frac{y + D}{L} = \frac{x + y \tan \beta}{e'}. \quad (20)$$

由(20)式可得:

$$x + y \tan \beta - \frac{y + D}{L} e = \frac{y + D}{L} (e' - e)。 (21)$$

将(21)式代入(19)式中,整理可得:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\beta_{\min}}^{\beta_{\max} + \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dR(e, \beta)}{de} \frac{1}{\pi(e' - e)} \frac{L}{\cos^2 \beta (y + D)} de d\beta。 (22)$$

(22)式即为 1T 扇形束 PTCT 的 DHB 重建算法表达式,其获得的重建图像是不完整的,需进行如图 3 所示的多段直线扫描。

对于 N 段直线扫描,如图 7 所示,引入 $x_n - y_n$ 坐标系,其原点与 O 重合, x_n 轴与第 n 段射线源轨迹方向平行且同向, $n = 1, 2, \dots, N$ 。 $x_1 - y_1$ 坐标系与 1T 扫描中 $x - y$ 坐标系重合,第 n 段中 D 与 L 不变,某一中心射线 l_0 与 y_n 轴夹角为 β_n ,且以逆时针为正方向,图 5 中 e 和图 6 中 e' 分别用 e_n 和 e'_n 表示,并用 $f_n(x_n, y_n)$ 表示 $x_n - y_n$ 坐标系中图像函数。

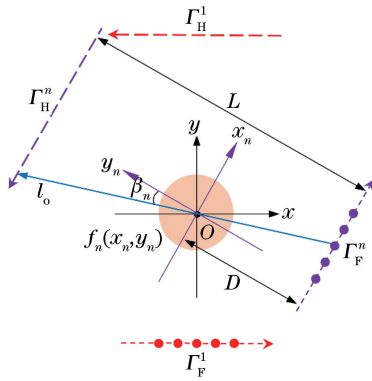


图 7 第 n 段 PTCT 坐标系示意图

Fig. 7 Schematic diagram of n th translation of PTCT coordinate system

则对于第 n 段扫描的重建结果可由(22)式改写为

$$f_n(x_n, y_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/N - \infty}^{+\pi/N + \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dR(e_n, \beta_n)}{de_n} \times \frac{1}{\pi(e'_n - e_n)} \frac{L}{\cos^2 \beta_n (y_n + D)} de_n d\beta_n, (23)$$

式中:重建结果 $f_n(x_n, y_n)$ 是基于 $x_n - y_n$ 坐标系的,可将其通过旋转矩阵统一变换至 $x - y$ 坐标系,对每段直线扫描的重建结果在 $x - y$ 坐标系内进行求和,即可得到完整重建图像。由图 7 中几何关系可知,旋转矩阵定义为

$$\mathbf{R}(n) = \begin{Bmatrix} \cos \left[\frac{2\pi(n-1)}{N} \right] & \sin \left[\frac{2\pi(n-1)}{N} \right] \\ -\sin \left[\frac{2\pi(n-1)}{N} \right] & \cos \left[\frac{2\pi(n-1)}{N} \right] \end{Bmatrix}, (24)$$

用 $f_n(x_n, y_n) \circ \mathbf{R}(n)$ 表示重建结果 $f_n(x_n, y_n)$ 通过右乘顺时针旋转矩阵 $\mathbf{R}(n)$,将其坐标系表示由 $x_n - y_n$ 变换至 $x - y$,具体步骤为:1)变换坐标值 $[x \ y] = [x_n \ y_n] \mathbf{R}(n)$;2)函数值赋值 $f^n(x, y) = f_n(x_n, y_n)$ 。则 N 段扇形束 PTCT 的 DHB 算法重建结果可表示为

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N f_n(x_n, y_n) \circ \mathbf{R}(n), n = 1, 2, \dots, N。 (25)$$

(25)式即为 PTCT-DHB 重建算法的最终表达式。推广传统圆周轨迹短扫描理论可知,在封闭完整的正多边形扫描轨迹中,投影角度覆盖 360° ,每一条射线沿不同方向被测量了 2 次,造成投影数据 2 倍的冗余,但同一条射线对扫描对象的线性积分值是相同的,因此可对求和结果除以 2 来消除数据冗余。

PTCT-DHB 重建算法的步骤如下。

1) 在第 n 段扫描中,对投影角度 β_n 的投影数据进行求导

$$\dot{R}(e_n, \beta_n) = \frac{dR(e_n, \beta_n)}{de_n}。 (26)$$

2) 对求导后数据进行希尔伯特变换

$$H(e'_n, \beta_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{R}(e_n, \beta_n) \frac{1}{\pi(e'_n - e_n)} de_n。 (27)$$

3) 对求导和希尔伯特变换后的数据作加权

$$P(e'_n, \beta_n) = H(e'_n, \beta_n) \frac{L}{\cos^2 \beta_n (y_n + D)}。 (28)$$

4) 对第 n 段扫描中所有经处理的数据进行反投影操作,得到该段的重建结果

$$f_n(x_n, y_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/N}^{+\pi/N} P(e'_n, \beta_n) d\beta_n。 (29)$$

5) 对该段重建结果进行坐标系变换处理

$$f^n(x, y) = f_n(x_n, y_n) \circ \mathbf{R}(n)。 (30)$$

6) 对每段扫描得到的投影数据进行步骤 1~5 处理,对每段重建结果求和,并对求和结果除以 2,得到最终重建图像

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N f^n(x, y), n = 1, 2, \dots, N。 (31)$$

4 实 验

为验证本文算法的性能,设计了仿真实验和实际实验。仿真实验采用腹腔模体,在理想投影数据下,分析 PTCT-DHB 算法重建过程;在含噪投影数据下,对比 PTCT-SIRT 算法、PTCT-FBP 算法、PTCT-DHB 算法重建图像,并采用均方根误差 (RMSE)、峰值信噪比 (PSNR)、结构相似性 (SSIM) 三组客观指标来综合评价重建图像质量。本文还搭建了实验系统,对工业电缆样品进行扫描,利用 PTCT-SIRT 算法、PTCT-FBP 算法、PTCT-DHB 算法进行重建,并分析 PTCT-DHB 算法的实际应用效果。重建算法在 Intel i5-6400 2.7 GHz \times 4 CPU、NVIDIA GT730 GPU、8 GB RAM、Windows10 专业版 64 位计算机上运行,环境为 MATLAB R2016b 和 Visual C++ 2015。

4.1 仿真实验

实验采用 512 pixel \times 512 pixel 大小的腹腔模体图像进行 PTCT 扫描,其含有丰富的细节信息,便于分析算法的重建性能。由于 1T 扫描实验获取投影数据过少无法重建完整图像,因此本文进行多段直线扫描,每段运动方式相同,并采取等角采样方式,即单段直线扫描中,相邻采样点与扫描对象中心连线夹角相等,这种方式投影角度分布均匀,接近传统圆周轨迹扫描。采取 5 段 (5T) 扫描,即射线源和

探测器的有效采样轨迹为正五边形,每段采样轨迹分度为 72° ,以实现 对模体的 360° 全扫描。每段等角采样 100 点,具体仿真实验参数如表 1 所示。

表 1 仿真实验参数

Parameter	Value
Scanning model	5T-PTCT
Sampling model	Equal-angular
Number of samples per translation	100
Source to object distance D /mm	75
Source to detector distance L /mm	225
Detector array length /pixel	1000
Detector pixel size /mm	0.1
Reconstruction matrix / (pixel \times pixel)	512 \times 512

由 (26)~(31) 式可知,PTCT-DHB 算法是对分段投影数据分别处理、反投影再求和的过程。为验证 PTCT-DHB 算法的可行性,对原始图像进行仿真扫描得到各段投影数据,并利用 PTCT-DHB 算法进行重建。图 8 展示了腹腔模体的重建过程,图 8(a) 为原始图像,图 8(b) 为仅利用第 1 段扫描投影数据重建的图像,图像结构缺失,伪影严重。图 8(c)~(e) 分别为利用前 2、3、4 段投影数据重建的图像,图像结构逐渐被补全,同时伪影减少。图 8(f) 为利用 5T 扫描全部投影数据重建的图像,其结构完整、细节丰富,重建过程中的伪影降至最少,接近模体原始图像,验证了本文算法的可行性。

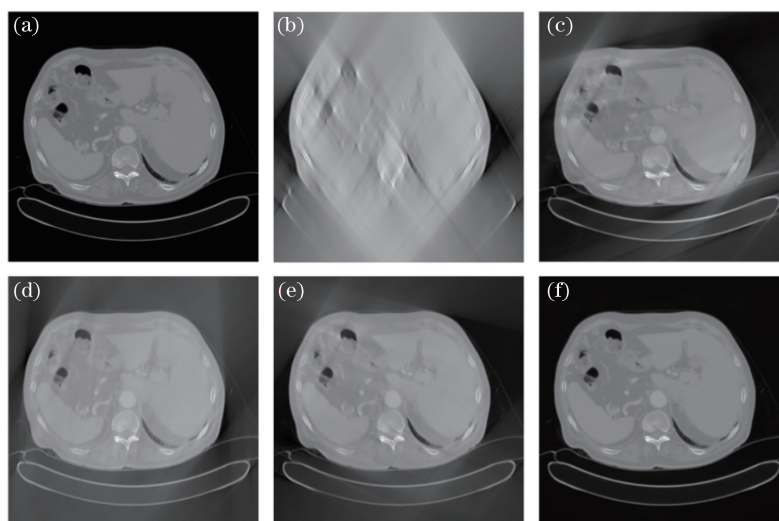


图 8 PTCT-DHB 算法重建过程。(a) 模体原始图像;(b) 利用第 1 段投影数据重建的图像;(c)~(e) 利用前 2、3、4 段投影数据重建的图像;(f) 利用 5T 扫描投影数据重建的最终图像

Fig. 8 Reconstruction process by PTCT-DHB algorithm. (a) Original phantom image; (b) image reconstructed from the 1st translation's projections; (c)~(e) images reconstructed from the 1st - 2nd, 1st - 3rd, and 1st - 4th translations' projections, respectively; (f) final image reconstructed from 5T projections

为了分析 PTCT-DHB 算法的重建性能,本文在投影数据中加入高斯白噪声,并利用 PTCT-SIRT 算法、PTCT-FBP 算法、PTCT-DHB 算法进行重建,其重建时间分别为 32.413、0.739、0.804 s,可知 PTCT-SIRT 算法耗时最长,而 PTCT-FBP 算法、PTCT-DHB 算法同为解析算法,速度十分接近,相较于 PTCT-SIRT 算法,PTCT-DHB 算法的重建效率大幅提升。图 9 为原始图像与三种算法重建图像,其中图 9(a)为原始图像,图 9(b)~(d)分别为 PTCT-SIRT 算法、PTCT-FBP 算法、PTCT-DHB 算法重建图像,图 9(e)~(h)分别为图 9(a)~(d)框

选区域放大图。对比不同算法重建的全局图像,图 9(b)~(d)三者图像质量基本相当,从而验证了本文所推导 PTCT-DHB 算法的有效性。为进一步分析差异,选取全局图像的局部区域放大后进行对比。图 9(e)展示了腹腔模体丰富的细节,对比图 9(f)~(h)可知,图 9(f)中 PTCT-SIRT 算法重建图像质量最好,图 9(g)中 PTCT-FBP 算法重建图像中混杂有大量噪点,而图 9(h)中 PTCT-DHB 算法重建图像中高频噪声比图 9(g)中 PTCT-FBP 算法重建图像明显减少,图像整体表现更均匀,但图像边缘清晰度稍差。

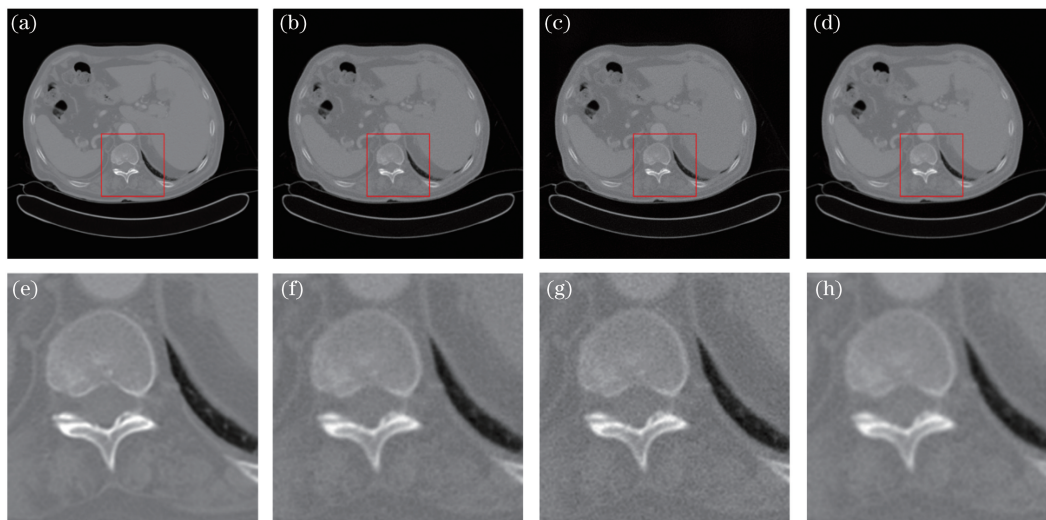


图 9 不同算法重建图像。(a)模体原始图像;(b)~(d) PTCT-SIRT 算法、PTCT-FBP 算法、PTCT-DHB 算法的重建图像;(e)~(h)对应图(a)~(d)框选区域放大图

Fig. 9 Images reconstructed by different algorithms. (a) Original phantom image; (b)~(d) images reconstructed by PTCT-SIRT algorithm, PTCT-FBP algorithm, and PTCT-DHB algorithm, respectively; (e)~(h) magnified images of rectangle selected regions of Fig. (a)~(d), respectively

为进一步对比不同重建算法,取图 9 模体图像及重建图像水平中心行,并取该行从左至右 193~321 号像素,即图 9 中局部区域选择框上边缘,对比该部分灰度值。如图 10 所示,模体该区域灰度值主要集中于(0.4,0.65),重建图像灰度值曲线均贴近模体真实曲线,PTCT-FBP 曲线含有较多高频率的跳动,细微变化比 PTCT-SIRT 曲线与 PTCT-DHB 曲线更加剧烈,而 PTCT-DHB 曲线整体变化趋势更平滑,且与 PTCT-SIRT 曲线相接近,说明 PTCT-DHB 算法有效地滤除了部分高频噪声,但也存在平滑真实曲线上微小细节的可能。

为进一步客观评价 PTCT-DHB 算法的重建图像质量,采用均方根误差(RMSE)、峰值信噪比(PSNR)、结构相似性(SSIM)三组量化指标,它们的计算公式分别为

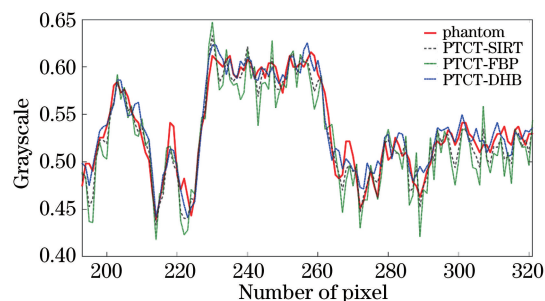


图 10 不同算法重建图像水平中心层局部区域灰度图
Fig. 10 Profiles along the horizontal center of images reconstructed by different algorithms

$$I_{\text{RMSE}}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) = \sqrt{\frac{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (X_{mn} - \hat{X}_{mn})^2}{MN}}, \quad (32)$$

$$I_{\text{PSNR}}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) = 20 \cdot \log_{10} \left[\frac{\max(\hat{\mathbf{X}})}{I_{\text{RMSE}}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})} \right], \quad (33)$$

$$I_{\text{SSIM}}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) = \frac{(2\mu_X\mu_{\hat{X}} + C_1)(2\sigma_{X\hat{X}} + C_2)}{(\mu_X^2 + \mu_{\hat{X}}^2 + C_1)(\sigma_X^2 + \sigma_{\hat{X}}^2 + C_2)}, \quad (34)$$

式中: \mathbf{X} 为 $M \times N$ 大小的重建图像矩阵; $\hat{\mathbf{X}}$ 为 $M \times N$ 大小的模体图像矩阵; $\max(\hat{\mathbf{X}})$ 为 $\hat{\mathbf{X}}$ 中最大元素值, 对于灰度值范围为 $[0, 1]$ 的图像, $\max(\hat{\mathbf{X}})$ 值即为 1; μ_X 和 $\mu_{\hat{X}}$ 分别为 \mathbf{X} 和 $\hat{\mathbf{X}}$ 所有元素平均值; σ_X 和 $\sigma_{\hat{X}}$ 分别为 \mathbf{X} 和 $\hat{\mathbf{X}}$ 的标准差; $\sigma_{X\hat{X}}$ 为 \mathbf{X} 和 $\hat{\mathbf{X}}$ 的协方差; C_1 和 C_2 为常数项。一般地, RMSE 值越小, PSNR 值和 SSIM 值越大, 重建图像质量越好。

实验结果如表 2 所示, 其中 PTCT-SIRT 算法重建质量最高。分别比较 PTCT-DHB 算法和 PTCT-FBP 算法重建结果: 在本次实验中, PTCT-DHB 结果的 RMSE 值比 PTCT-FBP 结果降低了 0.0108, 说明 PTCT-DHB 重建图像在数值上更接近原始图像; 而 PTCT-DHB 结果的 PSNR 值比 PTCT-FBP 结果提高了 4.437, 说明 PTCT-DHB 重建图像具有更低的噪声和更高的图像质量; 同时 PTCT-DHB 结果的 SSIM 值比 PTCT-FBP 结果提高了 0.0041, 说明 PTCT-DHB 重建图像整体上与原始图像具有更高的相似度。综合来看, PTCT-DHB 算法重建图像质量略优于 PTCT-FBP 算法, 且接近抑噪性能较好的 PTCT-SIRT 算法。

表 2 不同算法重建图像量化度量指标

Table 2 Quantitative metrics of images reconstructed by different algorithms

Item	PTCT-SIRT	PTCT-FBP	PTCT-DHB
RMSE	0.0158	0.0270	0.0162
PSNR	36.0323	31.3681	35.8051
SSIM	0.9978	0.9936	0.9977

4.2 实际实验

4.2.1 实验系统设计

为了验证本文算法的有效性, 本文搭建了 PTCT 实验系统, 该系统由射线源、平板探测器、计算机系统、机械系统组成。射线源发射 X 射线, 穿透扫描对象并由平板探测器接收, 计算机系统负责数据采集与图像重建, 并控制机械系统实现射线源、扫描对象、平板探测器的相应运动。图 11 为本文搭建的 PTCT 实验系统, 扫描对象固定于转台上, 由转台带动实现 360° 转动, 射线源和探测器布置在扫

描对象两侧, 由直线位移台带动实现各自直线运动。单段直线扫描结束后, 转台带动扫描对象转动一定分度, 再进行下段直线扫描, 从而实现多段直线扫描。实验系统采用微焦点 X 射线源, 张角为 118° , 管电压工作范围为 $40 \sim 100$ kV, 管电流工作范围为 $10 \sim 200$ μA , 平板探测器的最大像元矩阵为 $1536 \text{ pixel} \times 1536 \text{ pixel}$, 像元尺寸为 0.085 mm 。

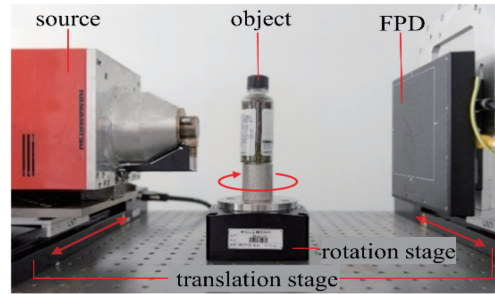


图 11 PTCT 实验系统

Fig. 11 Experimental system of PTCT

4.2.2 实际实验结果

为了验证 PTCT-DHB 算法的实际重建效果, 本文进行了实际实验, 对工业应用中常见的电缆样品进行 PTCT 扫描, 采取 7 段 (7T) 扫描, 每段采样轨迹分度为 51.43° 。并使用 PTCT-SIRT 算法、PTCT-FBP 算法、PTCT-DHB 算法进行重建, 具体参数如表 3 所示。

表 3 实际实验参数

Table 3 Parameters of the practical experiment

Parameter	Value
Scanning model	7T-PTCT
Sampling model	Equal-spatial
Number of samples per translation	100
Source to object distance D /mm	80.3
Source to detector distance L /mm	259.6
Detector array length /pixel	1536
Detector pixel size /mm	0.085
Reconstruction matrix / (pixel \times pixel)	512×512
Number of iterations	500
Tube voltage /kV	100
Tube current / μA	83

PTCT-SIRT 算法、PTCT-FBP 算法、PTCT-DHB 算法重建时间分别为 53.097、0.826、0.846 s, 可知 PTCT-DHB 算法在实际应用中同样具有极快的重建速度。实际实验重建结果如图 12 所示, 其中图 12(a)~(c) 分别为 PTCT-SIRT 算法、PTCT-FBP 算法、PTCT-DHB 算法重建图像, 图 12(d)~(f) 分别为图 12(a)~(c) 框选区域放大图。对比图 12(a)、(c) 及图 12(d)、(f) 可知, PTCT-DHB 算法重

建图像结构完整、边缘清晰,芯部裂隙清楚可见,其重建图像质量接近噪声抑制性能较好的 PTCT-SIRT 迭代算法,但所需重建时间大大减少。对比图 12(b)、图 12(c)及图 12(e)、图 12(f)可知,

PTCT-FBP 算法重建图像中含有明显的高频噪声,PTCT-DHB 算法重建图像噪点少,同时在工业电缆这种内部图像细节不丰富的情形下,也保持了较好的图像细节信息。

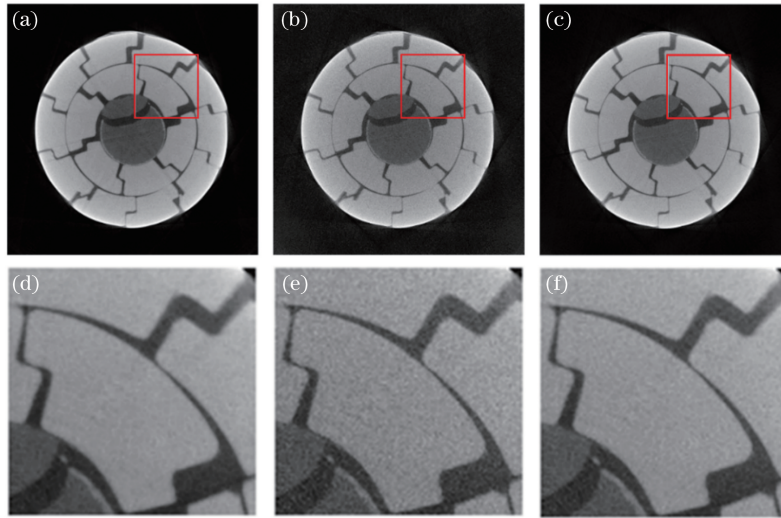


图 12 不同算法重建图像。(a) PTCT-SIRT 算法;(b) PTCT-FBP 算法;(c) PTCT-DHB 算法;
(d)~(f)对应(a)~(c)框选区域放大图

Fig. 12 Images reconstructed by different algorithms. (a) PTCT-SIRT algorithm; (b) PTCT-FBP algorithm;
(c) PTCT-DHB algorithm; (d)~(f) magnified images of rectangle selected regions of Fig. (a)~(c), respectively

综上所述,相比于 PTCT-SIRT 迭代算法,PTCT-DHB 算法可以在更短的时间内达到与 PTCT-SIRT 算法接近的重建效果。与 PTCT-FBP 算法相比,PTCT-DHB 算法能更有效地抑制高频噪声,但同时也可能会平滑部分微小细节。导致这种现象的原因主要包括两方面:

1) PTCT-FBP 算法的滤波器为线性的斜坡滤波形式,能衰减低频、放大高频,而图像的细节和噪声同时且主要集中在高频,线性斜坡滤波器在保留图像细节的同时也放大了高频噪声。而在 PTCT-DHB 算法中,为方便计算机的离散化实现,求导运算 $dR(e_n, \beta_n)/de_n$ 通常转换为后向差分运算 $R(e_n, \beta_n) - R(e_{n-1}, \beta_n)$,其频率响应为 $H[\exp(j\omega)] = 1 - \exp(-j\omega)$,它的幅频特性如图 13 所示,与 PTCT-FBP 算法中的线性斜坡滤波器 $|\omega|$ 相比, $1 - \exp(-j\omega)$ 在低频段近似线性放大,而随着频率升高,相比于 $|\omega|$ 继续保持线性放大, $1 - \exp(-j\omega)$ 则对高频分量进行了相对压低,而希尔伯特变换仅对信号相位有 $\pm 90^\circ$ 的移动,不会改变幅值大小,后向差分运算与希尔伯特变换综合下来能对高频噪声起到一定的压制作用。

2) 对于传统的 PTCT-FBP 算法,由于滤波器的带宽不可能是无限长的,会使用窗函数来控制斜

坡滤波器频带。而扇形束 PTCT 的几何关系导致斜坡滤波器卷积核函数内包含有一项位置权重因子,为满足卷积积分的基本形式,需将该因子从核函数中提出,由于加窗操作的存在,斜坡滤波器卷积核不满足傅里叶变换线性性质中的齐次性,位置权重因子的变化会造成重建图像不均匀的分辨率和非稳态噪声^[16]。如果将斜坡滤波器分解为求导-希尔伯特变换步骤,没有应用到斜坡滤波器卷积核的齐次性,则避免了上述问题,从而使得重建图像分辨率更为均匀。

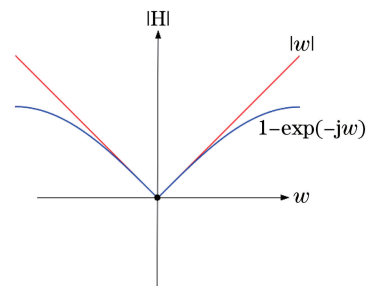


图 13 求导运算与后向差分运算的幅频特性

Fig. 13 Amplitude-frequency characteristics of derivation operation and backward difference operation

基于以上分析,对于含有丰富细节信息、精度要求高的扫描对象,如生物组织等,PTCT-FBP 算法

能有效保护细节信息,而对于内部结构简单、细节较少的检测对象,或者检测噪声较大的情形,如工业快速检测、安防检测等,PTCT-DHB 算法能快速重建图像,并能对噪声形成抑制。实际应用中,由于两者均具有较高的重建效率,可将两者结合使用。

5 结 论

本文通过建立 PTCT 平面几何模型,从 1T 平行束扫描出发,基于 Radon 逆变换,利用傅里叶变换和希尔伯特变换性质,将斜坡滤波器分解为求导和希尔伯特变换两部分,得到了 1T 平行束 PTCT 的 DHB 重建算法,再通过替换变量将扇形束射线转化为平行束射线,推导出 1T 扇形束 PTCT 的 DHB 重建算法,并通过旋转矩阵将每段重建结果变换至同一坐标系表示,最终求和得到完整重建图像。同时,本文进行了仿真实验,并搭建了实验系统实现了 PTCT 扫描成像实验,验证了 PTCT-DHB 算法的有效性与实用性。PTCT-DHB 算法具有快速、高质量、抑噪性能好等优势,适合应用于工业、安防等领域的无损检测。

对于本文所推导算法,应继续优化以提升算法在保护图像细节方面的能力。为了降低照射剂量、提升扫描效率,可减少投影数量即扫描段数与采样点数,为此需进一步优化扫描模型并开发相应算法。同时,在当前研究基础上,继续深入研究有限希尔伯特变换^[22-24]等理论,将 PTCT 应用于局部扫描、ROI 重建等领域,以扩大 PTCT 的应用范围。

参 考 文 献

- [1] du Plessis A, le Roux S G, Guelpa A. Comparison of medical and industrial X-ray computed tomography for non-destructive testing [J]. *Case Studies in Nondestructive Testing and Evaluation*, 2016, 6: 17-25.
- [2] Cai Y F, Chen T Y, Wang J, et al. Image noise reduction in computed tomography with non-local means algorithm based on adaptive filtering coefficients [J]. *Acta Optica Sinica*, 2020, 40(7): 0710001.
蔡玉芳, 陈桃艳, 王珏, 等. 基于自适应滤波系数的非局部均值计算机层析成像的图像降噪方法 [J]. *光学学报*, 2020, 40(7): 0710001.
- [3] Liu J, Kang Y Q, Gu Y B, et al. Low dose computed tomography image reconstruction based on sparse tensor constraint [J]. *Acta Optica Sinica*, 2019, 39(8): 0811004.
- 刘进, 亢艳芹, 顾云波, 等. 稀疏张量约束的低剂量 CT 图像重建 [J]. *光学学报*, 2019, 39(8): 0811004.
- [4] Liu F, Yu H, Cong W, et al. Top-level design and pilot analysis of low-end CT scanners based on linear scanning for developing countries [J]. *Journal of X-ray Science and Technology*, 2014, 22(5): 673-686.
- [5] de Schryver T, Dhaene J, Dierick M, et al. In-line NDT with X-ray CT combining sample rotation and translation [J]. *NDT & E International*, 2016, 84: 89-98.
- [6] Liu B, Luo Y, Li K, et al. X-ray layered refocusing imaging based on linear scanning [J]. *IEEE Photonics Journal*, 2020, 12(3): 1-12.
- [7] Zhang T, Xing Y X, Zhang L, et al. Stationary computed tomography with source and detector in linear symmetric geometry: direct filtered backprojection reconstruction [J]. *Medical Physics*, 2020, 47(5): 2222-2236.
- [8] Wang C X, Zeng L, Yu W, et al. An electron beam linear scanning mode for industrial limited-angle nano-computed tomography [J]. *The Review of Scientific Instruments*, 2018, 89(1): 015113.
- [9] Luo T, Zhao Y S. An acceleration algorithm for dual-spectral computed tomography reconstruction [J]. *Acta Optica Sinica*, 2020, 40(14): 1411001.
罗婷, 赵云松. 双能谱 CT 迭代重建的一种加速收敛算法 [J]. *光学学报*, 2020, 40(14): 1411001.
- [10] Wu W W, Quan C, Liu F L. Filtered back-projection image reconstruction algorithm for opposite parallel linear CT scanning [J]. *Acta Optica Sinica*, 2016, 36(9): 0911009.
伍伟文, 全超, 刘丰林. 相对平行直线扫描 CT 滤波反投影图像重建 [J]. *光学学报*, 2016, 36(9): 0911009.
- [11] Kong H H, Yu H Y. Analytic reconstruction approach for parallel translational computed tomography [J]. *Journal of X-Ray Science and Technology*, 2015, 23(2): 213-228.
- [12] Wu W W, Yu H Y, Wang S Y, et al. BPF-type region-of-interest reconstruction for parallel translational computed tomography [J]. *Journal of X-Ray Science and Technology*, 2017, 25(3): 487-504.
- [13] Wu W W, Yu H Y, Cong W X, et al. Theoretically exact backprojection filtration algorithm for multi-segment linear trajectory [J]. *Physics in Medicine and Biology*, 2018, 63(1): 015037.
- [14] Qiao Z W, Han Y, Wei X Y. Acceleration method of the filtered back projection algorithm [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2010, 32(2): 401-404.
乔志伟, 韩焱, 魏学业. 一种滤波反投影算法的加速方式 [J]. *系统工程与电子技术*, 2010, 32(2): 401-

- 404.
- [15] Shi H L, Luo S Q. A novel scheme to design the filter for CT reconstruction using FBP algorithm[J]. BioMedical Engineering OnLine, 2013, 12(1): 1-15.
- [16] Zeng G L. Nonuniform noise propagation by using the ramp filter in fan-beam computed tomography [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2004, 23(6): 690-695.
- [17] You J S, Zeng G L. Hilbert transform based FBP algorithm for fan-beam CT full and partial scans[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2007, 26(2): 190-199.
- [18] Noo F, Defrise M, Clackdoyle R, et al. Image reconstruction from fan-beam projections on less than a short scan [J]. Physics in Medicine and Biology, 2002, 47(14): 2525-2546.
- [19] Noo F, Clackdoyle R, Pack J D. A two-step Hilbert transform method for 2D image reconstruction [J]. Physics in Medicine and Biology, 2004, 49(17): 3903-3923.
- [20] Ma C X, Hu J J, Yan B. Optimization of fan-beam CT filtered backprojection reconstruction algorithm [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2012, 49(9): 091103.
- 马晨欣, 胡君杰, 闫镛. CT 扇形束滤波反投影图像重建算法优化 [J]. 激光与光电子学进展, 2012, 49(9): 091103.
- [21] Gregor J, Benson T. Computational analysis and improvement of SIRT [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2008, 27(7): 918-924.
- [22] Defrise M, Noo F, Clackdoyle R, et al. Truncated Hilbert transform and image reconstruction from limited tomographic data [J]. Inverse Problems, 2006, 22(3): 1037-1053.
- [23] Chen M, Zhang H T, Zhang P. BPF-based reconstruction algorithm for multiple rotation-translation scan mode [J]. Progress in Natural Science, 2008, 18(2): 209-216.
- [24] Zeng G L. Image reconstruction via the finite Hilbert transform of the derivative of the backprojection [J]. Medical Physics, 2007, 34(7): 2837-2843.