

# 小平坦波面光场的衍射与准直特性

郭福源, 李连煌, 郑华

福建师范大学光电与信息工程学院激光与光电子技术研究所, 光子技术福建省重点实验室,  
医学光电科学与技术教育部重点实验室, 福建 福州 350007

**摘要** 根据惠更斯-菲涅耳原理、空间频谱理论、能量守恒定律推导出一个波面为平面的小衍射源远场衍射积分公式的倾斜因子, 给出一个衍射远场半球面上光场分布的计算表达式。根据满足正弦条件的准直物镜对光波波面的变换特性, 给出小平坦波面光场的准直光场计算表达式, 并以简单直角坐标偏振和简单柱面坐标偏振的高斯光束变换特性为例说明了该公式的应用。

**关键词** 物理光学; 衍射理论; 远场; 倾斜因子; 能量守恒定律

中图分类号 O436.1

文献标志码 A

doi: 10.3788/AOS202141.0426001

## Diffraction and Collimation Characteristics of Small Light Fields with Planar Wavefronts

Guo Fuyuan, Li Lianhuang, Zheng Hua

Key Laboratory of Optoelectronic Science and Technology for Medicine, Ministry of Education,  
Fujian Key Laboratory of Photonic Technology, Institute of Laser & Optoelectronics Technology,  
College of Photonic and Electronic Engineering, Fujian Normal University, Fuzhou, Fujian 350007, China

**Abstract** Based on the Huygens-Fresnel principle, spatial frequency spectrum theory, and the law of energy conservation, we derive an inclination factor of the integral formula for far-field diffraction from a small diffractive source with a planar wavefront and provide an expression to calculate the light field distribution on the far-field hemispherical surface. Then, according to the characteristics of the wavefront transformation of a collimating objective satisfying the sine condition, a calculation formula is recommended for a collimating light field from a small diffractive source with a planar wavefront. Furthermore, applications of this formula are shown through the transformation characteristics of Gaussian beams of simple rectangular coordinate polarization and simple cylindrical coordinate polarization.

**Key words** physical optics; diffraction theory; far field; inclination factor; law of energy conservation

**OCIS codes** 260.1960; 260.2160; 070.7345

### 1 引言

1678年,惠更斯基于直观信念<sup>[1]</sup>提出惠更斯原理,该原理以球面子波的次级扰动中心和包络面解释波传播过程中两个波面之间的关系。1818年,菲涅耳用干涉理论补充了惠更斯原理,形成惠更斯-菲涅耳原理<sup>[1-2]</sup>,该原理以振幅随方向变化的子波相干

叠加解释衍射现象。在考察单色点光源对空间任意一点的光作用时,衍射源参考面为点源产生的波面,惠更斯-菲涅耳原理数学表达式中的倾斜因子假设<sup>[2]</sup>明确了子波的传播区域。

目前,常见的以场分布为基础的衍射积分公式有3个,分别为菲涅耳-基尔霍夫衍射公式、第一种和第二种瑞利-索末菲衍射公式<sup>[1-6]</sup>。它们由亥姆

收稿日期: 2020-08-24; 修回日期: 2020-09-16; 录用日期: 2020-09-25

基金项目: 中央引导地方科技发展专项(2020L3008)、福建省自然科学基金(2019J01269, 2018J01301)

\* E-mail: guofy@fjnu.edu.cn

霍兹-基尔霍夫积分定理<sup>[1-2]</sup>为基础,在球面曲率半径足够大时大球面部分对积分公式的贡献为零条件下<sup>[2]</sup>(或在索末菲辐射条件下<sup>[1]</sup>)简化衍射积分公式,并根据所选择的格林函数和基尔霍夫边界条件<sup>[1-2]</sup>的不同应用推导而得。菲涅耳-基尔霍夫衍射公式是第一种和第二种瑞利-索末菲衍射公式的数学平均值,目前,3 个衍射积分公式同时存在于同一电磁场理论体系中,尽管开展了一些衍射积分公式的比较研究<sup>[4-7]</sup>,但衍射过程的能量问题未被充分关注,3 个衍射积分公式的计算精度优劣仍未明确<sup>[1]</sup>。其中,第一种瑞利-索末菲衍射公式的倾斜因子符合惠更斯-菲涅耳原理关于倾斜因子的假设,被认为是较为合理的衍射积分公式,被应用于光场特性分析中<sup>[8-12]</sup>。以平面波角谱(空间频谱)或场分布傅里叶变换为基础的衍射积分<sup>[1,13-18]</sup>也被用于衍射场表达。文献[1]以有限频带的空间滤波器解释光波的传播,以倏逝波解释横向空间频率大于  $1/\lambda$  的光场;文献[13]采用傅里叶变换公式和卷积定理论证了两种瑞利-索末菲衍射公式;文献[14-17]分别运用鞍点法求积分的渐进公式和空间脉冲响应表达式等公式论证第一种瑞利-索末菲衍射公式。

通常,单模光纤<sup>[8-9,19]</sup>的模场半径、强聚焦贝塞尔-高斯光束<sup>[20]</sup>和低阶拉盖尔-高斯光束<sup>[21-22]</sup>的束腰光斑半径与光波波长为同一数量级,光纤端面光场和各类强聚焦高斯光束束腰光场的波面为平面。这些径向尺寸较小且波面为平面的光场可称为小平坦波面光场,小平坦波面光场的衍射光束为非傍轴光束,衍射积分公式的倾斜因子将影响其衍射远场分布的表达。

光波为矢量波,波面的法线方向(波矢)是波的传播方向,本文以惠更斯原理为基础,将用于分析衍射问题的衍射源参考面和衍射远场观察参考面均设定为波面,并以惠更斯-菲涅耳原理的数学表达式为基础,分析波面为平面的简单直角坐标偏振和简单柱面坐标偏振<sup>[23]</sup>小尺寸圆形衍射源光场的远场衍射特性。根据空间频谱理论和能量守恒定律,推断出一种远场衍射积分公式的倾斜因子,给出一种用于分析小平坦波面远场衍射特性的衍射积分公式表达,并以虚拟余弦辐射体辐射的子波相干叠加解释衍射过程。同时,给出小平坦波面光场经准直物镜后的像方焦面光场表达式,并以一个简单直角坐标偏振  $LG_{00}$  模和简单柱面坐标偏振  $LG_{10}$  模拉盖尔-高斯光束变换特性为例说明该公式的应用。

## 2 倾斜因子的选择

受开孔衍射屏限制的衍射过程可分解为开孔衍射屏对入射光场的制约和从衍射屏通光孔出射的光场的传播。若将从衍射屏通光孔出射的光场称为衍射源,可将受限衍射过程简化为相干光场从衍射源参考面到观察参考面的传播过程。若不存在衍射屏,将光波传播过程中被选择作为分析对象起始参考位置的光场称为衍射源,相干光场的行波传播过程即为无受限衍射过程。

参照惠更斯原理<sup>[2]</sup>分析衍射过程,衍射源参考面和观察参考面均为光波的波面,设衍射源的光波波面  $\Sigma$  为平面,该平面与直角坐标系的  $xOy$  平面(或柱面坐标系的  $rO\varphi$  平面)重合,衍射源参考面上任一参考点  $P$  处的光波波矢  $\mathbf{k}_s$  均与  $z$  轴平行。若小平坦波面衍射源光场分布为旋转对称形式,其中心与坐标原点  $O$  重合,当衍射源参考点  $P$  与观察参考点  $P_1$  的距离  $L$  足够大时,衍射远场的光波波面  $\Sigma_1$  可以近似为以  $O$  为圆心、以  $R$  为半径的半球面。可设该半球形波面为观察参考面,在半球面  $\Sigma_1$  上,观察参考点  $P_1$  处的光波波矢  $\mathbf{k}_o$  与  $z$  轴的夹角为  $\theta$ 。设衍射源方倾斜角  $\theta_s$  为参考子波波矢  $\mathbf{k}$  与衍射源参考点  $P$  处微面元  $d\sigma$  法线的夹角,观察方倾斜角  $\theta_o$  为参考子波波矢  $\mathbf{k}$  与观察参考点  $P_1$  处微面元  $d\sigma_1$  法线的夹角。角度的符号规则是以波面法线为始边沿锐角方向转向参考线,逆时针则为正,顺时针则为负,如图 1 所示,有  $\theta = \theta_s + \theta_o$ 。

设衍射过程位于无源的各向同性均匀介质空间区域,区域中的时谐电磁场在麦克斯韦方程组中表现为对偶性<sup>[24]</sup>,其电场和磁场的分布形式和传播规律相同。场分布可采用相同函数形式,表达为  $U(P, t) = U(P) \exp(-i2\pi\nu t)$ ,其中  $U(P)$  为  $P$  点位置的复数形式场分布函数, $\nu$  为光波频率, $t$  为时间变量。根据惠更斯-菲涅耳原理<sup>[2]</sup>,并参照 3 个衍射积分公式<sup>[1-2]</sup>的表达形式,假设衍射积分公式的倾斜因子  $K(\theta_s, \theta_o)$  由衍射源方倾斜角  $\theta_s$  和观察方倾斜角  $\theta_o$  共同决定,当衍射源参考点  $P$  与观察参考点  $P_1$  之间的距离  $L$  远大于光波波长  $\lambda$  时,观察参考面  $\Sigma_1$  上  $P_1$  点的光场分布函数  $U(P_1, t_1)$  可由衍射源参考面  $\Sigma$  上的光场分布函数  $U(P, t)$  表达,公式为

$$U(P_1, t_1) = \iint_{\Sigma} U(P, t) \frac{\exp[i(kL - 2\pi\nu\Delta t)]}{i\lambda L} K(\theta_s, \theta_o) d\sigma, \quad (1)$$

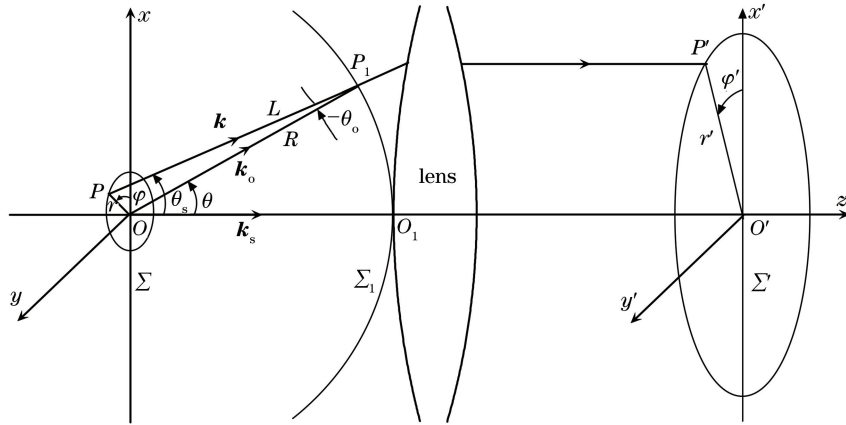


图 1 小平坦波面光场的远场衍射和准直过程示意图

Fig. 1 Schematic of collimation and far-field diffraction from a small light field with planar wavefront

式中： $k$  为光波的波数； $\Delta t = t_1 - t$ ； $d\sigma$  为衍射源的微面元。

设在  $z=0$  的衍射源参考平面上的光场相位为零，光场分布为旋转对称结构形式，参考平面上的电场偏振为简单直角坐标偏振或简单柱面坐标偏振<sup>[23]</sup>，前者电场偏振方向为直角坐标系的  $x$  轴或  $y$  轴或二者组合，后者电场偏振方向为柱面坐标系的径向或角向或二者组合。两类偏振光的场分布函数均与柱面坐标系中的角向坐标  $\varphi$  无关，可由同一形式表达为  $U_m(r, t) = U_m(r) \exp(-i2\pi\nu t)$ ，其中  $m$  为标注衍射源电场偏振类型的参量。当衍射源为简单直角坐标偏振光场时， $m=0$ ， $U_m(r)$  代表光场的轴向分量  $U_x(r)$  和  $U_y(r)$ ；当衍射源为简单柱面坐标偏振光场时， $m=1$ ， $U_m(r)$  代表光场的径向分量  $U_r(r)$  和角向分量  $U_\varphi(r)$ 。

在衍射源平面内，若半径为  $r_{\max}$  的圆斑内的光场功率接近于衍射源总功率，可将  $r_{\max}$  称为衍射源光场的有效半径。若衍射源光场的有效半径  $r_{\max}$  较小，根据瑞利判断，在衍射远场、观察参考半球面半径  $R \gg 2r_{\max}^2/\lambda$  时，小平坦波面衍射源参考点  $P(r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0)$  与衍射远场半球面上观察参考点  $P_1(R \sin \theta \cos \varphi_1, R \sin \theta \sin \varphi_1, R \cos \theta)$  之间的距离可简化为  $L \approx R - r \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_1)$ <sup>[7,23]</sup>，简化引起的误差小于  $\lambda/4$ 。且当曲率半径  $R \gg r_{\max}$  时，衍射源方倾斜角  $\theta_s \approx \theta$ ，观察方倾斜角  $\theta_o \approx 0$ ，可以认为衍射积分公式的倾斜因子  $K(\theta_s, \theta_o)$  几乎与观察方倾斜角  $\theta_o$  无关，只由衍射源方倾斜角  $\theta_s$  计算，有  $K(\theta_s, \theta_o) \approx K(\theta_s) \approx K(\theta)$ 。由于倾斜因子  $K(\theta)$  与小平坦波面衍射源参考点  $P$  的坐标无关，可将倾斜因子  $K(\theta)$  移到衍射积分公式的积分号之

外<sup>[8-11]</sup>。由于衍射源微面元  $d\sigma = r dr d\varphi$ ，由(1)式和  $m$  阶贝塞尔函数  $J_m(\xi)$  的积分表达式<sup>[25]</sup>可知，在以  $R$  为半径的观察半球面  $\Sigma_1$  上，若衍射远场的光场分布函数可表达为  $U_m(R, \theta, t_1) = U_m(R, \theta) \exp(-i2\pi\nu t_1)$ ，则两类偏振光场的角向分布函数  $U_m(R, \theta)$  可由衍射源径向空间频谱分布函数  $S_m(f_r)$ <sup>[11]</sup> 表达，公式为

$$U_m(R, \theta) = \frac{K(\theta) \exp\{i[kR - (m+1)\pi/2]\}}{\lambda R} \text{circ}\left(\frac{f_r}{f_{r,\max}}\right) S_m(f_r), \quad (2)$$

式中： $\text{circ}(\xi)$  为圆孔函数，当  $0 \leq \xi \leq 1$  时， $\text{circ}(\xi) = 1$ ，当  $\xi > 1$  时， $\text{circ}(\xi) = 0$ ； $f_r = \sin \theta / \lambda$  为径向空间频率； $f_{r,\max}$  为最大径向空间频率。

当衍射源为简单直角坐标偏振光时，数学概念上的径向空间频谱  $S_m(f_r)$  为衍射源场分布  $U_m(r)$  的零阶汉克尔变换<sup>[19]</sup>；当衍射源为简单柱面坐标偏振光时，数学概念上的径向空间频谱  $S_m(f_r)$  为衍射源场分布  $U_m(r)$  的一阶汉克尔变换<sup>[23]</sup>。两类偏振光场在数学概念上的衍射源径向空间频谱  $S_m(f_r)$  可由同一形式的计算式表达，公式为

$$S_m(f_r) = 2\pi \int_0^\infty U_m(r) J_m(2\pi r f_r) r dr. \quad (3)$$

当光波的参考波面尺寸远大于波长时，参考波面上微面元的能流密度可在几何光学的精度范围内参照平面波坡印廷矢量<sup>[2,24,26]</sup>时间平均值的计算公式计算，由于观察参考半球面  $\Sigma_1$  上参考点  $P_1$  处的微面元  $d\sigma_1 = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi_1$ ，场分布函数为  $U_m(R, \theta)$  的光场在微面元  $d\sigma_1$  上的功率  $dP_{\text{OH}}$  计算式为

$$dP_{\text{OH}} = C_0 R^2 |U_m(R, \theta)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi_1, \quad (4)$$



式中:  $U_m(R, \theta)$  为场分布函数;  $C_0$  为常数<sup>[7,11]</sup>。当函数  $U_m(R, \theta)$  代表电场强度分布时,  $C_0 = (1/2)\sqrt{\epsilon/\mu}$ , 当函数  $U_m(R, \theta)$  代表磁场强度分布时,  $C_0 = (1/2)\sqrt{\mu/\epsilon}$ , 其中  $\epsilon$  和  $\mu$  分别为衍射场所在空间介质的介电常数和磁导率。

由于径向空间频率  $f_r = \sin \theta/\lambda$ , 有  $df_r = (\cos \theta/\lambda)d\theta$ , 由(2)~(4)式可知, 在观察半球面  $\Sigma_1$  上, 由衍射源径向空间频谱  $S_m(f_r)$  表达的衍射远场总功率<sup>[7]</sup> 计算式为

$$P_{\text{OH}} = 2\pi C_0 \int_0^{\infty} \text{circ}\left(\frac{f_r}{f_{r,\text{max}}}\right) \frac{K^2(\theta)}{\cos \theta} S_m^2(f_r) f_r df_r. \quad (5)$$

当采用空间频谱分布表达衍射源光场时, 由 Parseval 定理<sup>[1]</sup> 知, 在参考平面  $\Sigma$  上, 由场分布函数  $U_m(r)$  表达的衍射源总功率与数学概念上的空间频谱分布  $S_m(f_r)$  表达的衍射源总功率等效, 即衍射源总功率<sup>[11]</sup> 计算式为

$$P_{\text{DS}} = 2\pi C_0 \int_0^{\infty} S_m^2(f_r) f_r df_r. \quad (6)$$

设倾斜因子  $K(\theta) = \sqrt{\cos \theta}$ , 由于衍射场为行波场, 行波场的最大径向空间频率(物理意义上的径向空间频率)  $f_{r,\text{max}} = 1/\lambda$ 。由(5)、(6)式知: 当且仅当径向空间频率  $f_r > 1/\lambda$  时, 衍射源径向空间频谱分布函数  $S_m(f_r) = 0$ , 物理意义上的径向空间频谱函数  $S_{P,m}(f_r)$  等于数学概念上的径向空间频谱分布函数  $S_m(f_r)$ , 圆孔函数  $\text{circ}(f_r/f_{r,\text{max}}) = 1$ , 衍射远场总功率计算值  $P_{\text{OH}}$  等于衍射源总功率  $P_{\text{DS}}$ , 满足能量守恒定律; 当径向空间频率  $f_r > 1/\lambda$  时, 若衍射源径向空间频谱分布函数  $S_m(f_r)$  不恒等于零, 衍射远场总功率计算值  $P_{\text{OH}}$  小于衍射源总功率  $P_{\text{DS}}$ , 不满足能量守恒定律; 若将最大径向空间频率  $f_{r,\text{max}}$  在物理意义上的最大径向空间频率  $(1/\lambda)$  延拓为数学概念上的最大径向空间频率(无穷大), 衍射场总功率等于衍射源总功率, 满足能量守恒定律; 借鉴文献[1]以倏逝波解释空间频率大于  $1/\lambda$  光场的概念, 衍射积分公式的倾斜因子  $K(\theta) = \sqrt{\cos \theta}$  的推断具有一定的合理性。

而当采用菲涅耳-基尔霍夫衍射公式、第一种或第二种瑞利-索末菲衍射公式计算小平坦波面衍射远场总功率时, 由于 3 个衍射公式的倾斜因子可分别表达为  $K_{\text{FK}}(\theta) = (1 + \cos \theta)/2$ ,  $K_{\text{RS-1}}(\theta) = \cos \theta$ ,  $K_{\text{RS-2}}(\theta) = 1$ , 由(5)、(6)式知, 无论最大径向

空间频率  $f_{r,\text{max}}$  采用物理意义上的最大径向空间频率或数学概念上的最大径向空间频率, 衍射远场总功率计算值  $P_{\text{OH}}$  均偏离衍射源总功率  $P_{\text{DS}}$ , 不满足能量守恒定律。其中, 当采用第一种瑞利-索末菲衍射公式计算小平坦波面衍射远场总功率时,  $K_{\text{RS-1}}(\theta) = \cos \theta$ , 无论最大径向空间频率  $f_{r,\text{max}}$  采用物理意义上的最大径向空间频率或数学概念上的最大径向空间频率, 衍射远场总功率计算值  $P_{\text{OH}}$  均小于衍射源总功率  $P_{\text{DS}}$ 。可见, 对于波面为平面的小面积衍射源, 在分析衍射远场特性时, 由于观察方倾斜角  $\theta_o \approx 0$ , 衍射源方倾斜角  $\theta_s \approx \theta$ , 倾斜因子  $K(\theta_s, \theta_o)$  由衍射源方倾斜因子  $K(\theta_s)$  表达, 衍射源方倾斜因子的合理表达式为  $K(\theta_s) = \sqrt{\cos \theta_s}$ , 它符合惠更斯-菲涅耳原理数学表达式中关于倾斜因子的假设。

作为一种解释, 本文以惠更斯-菲涅耳原理为基础, 认为衍射源波面上每个微面元  $d\sigma$  的虚拟辐射是各向同性的, 其光度学亮度为常数, 即将衍射源波面上的每个面元看成余弦辐射体, 球面子波辐射强度随衍射源方倾斜角  $\theta_s$  的变化规律遵从 Lambert 定律<sup>[2]</sup>, 即球面子波分布函数在子波波矢  $\mathbf{k}$  方向的振幅  $u_s(\theta_s)$  与球面子波分布函数在衍射源微面元  $d\sigma$  法线方向的振幅  $u_s(0)$  的关系为  $u_s(\theta_s) = u_s(0) \times \sqrt{\cos \theta_s}$ 。在小平坦波面衍射源的衍射远场半球形波面上观察参考点  $P_1$  处, 观察方倾斜角  $\theta_o$  很小,  $\cos \theta_o \approx 1$ , 由衍射源波面上每个微面元发出的子波波矢  $\mathbf{k}$  方向的差异在子波相干叠加时可被忽略, 衍射积分公式的倾斜因子可由衍射源方倾斜角  $\theta_s$  表达为  $K(\theta_s, \theta_o) = \sqrt{\cos \theta_s}$ , 可见, 衍射过程可以看成虚拟的余弦辐射体相干叠加的过程。

### 3 小平坦波面衍射光束的准直特性

若准直物镜的像方焦距为  $f'$ , 物镜的物、像双方介质均为空气, 物、像双方介质的折射率均为 1, 小平坦波面衍射源与准直物镜的物方焦面重合, 半球形参考波面  $\Sigma_1$  的曲率半径  $R = f'$ , 如图 1 所示。若准直物镜的成像条件满足正弦条件, 物、像双方的坐标变换关系为  $r' = f' \sin \theta$ , 由于满足正弦条件的准直或聚焦物镜的变迹(或切趾)因子<sup>[3,27]</sup>  $a(\theta) = \sqrt{\cos \theta}$ , 当准直物镜的焦距  $f' \gg 2r_{\text{max}}^2/\lambda$  时, 准直物镜像方主面的光波波面可近似为平面。根据透镜对波面的变换特性, 当准直物镜物、像双方主面之间的光程为  $s$  时, 准直物镜像方主面处的光场分布

$U_m(r'_H)$  与物镜物方半球面  $\Sigma_1$  处的光场分布  $U_m(R, \theta)$  的关系可表达为

$$U_m(r'_H) \sqrt{\cos \theta} = \text{circ}\left(\frac{\theta}{\theta_{NA}}\right) U_m(R, \theta) \exp(iks), \quad (7)$$

式中: 准直物镜的最大物方孔径角  $\theta_{NA} = \arcsin(NA)$ ,  $NA$  为准直物镜的数值孔径。

由于小平坦波面衍射源经过准直物镜准直之后的光场径向尺寸较大, 准直物镜像方焦面位于像方主面的菲涅耳衍射深区, 准直物镜像方焦面处的光场分布函数  $U_m(r')$  与准直物镜像方主面处的光场分布函数  $U_m(r'_H)$  的关系为  $U_m(r') = U_m(r'_H) \times \exp(ikf')$ 。根据物、像双方的坐标变换关系和径向空间频率的定义, 有  $r' = \lambda f_r f'$ 。由(2)、(3)、(7)式可知, 当倾斜因子  $K(\theta) = \sqrt{\cos \theta}$  时, 准直物镜像方焦面处的光场分布函数  $U_m(r')$  可表达为

$$U_m(r') = \frac{2\pi \exp(i\Phi)}{\lambda f'} \text{circ}\left(\frac{r'}{r'_{NA}}\right) \int_0^{\infty} U_m(r) J_m\left(\frac{2\pi r r'}{\lambda f'}\right) r dr, \quad (8)$$

式中: 相位延迟  $\Phi = k(2f' + s) - (m+1)\pi/2$ ; 准直物镜像方焦面光场的最大半径  $r'_{NA} = f' NA$ 。

当圆孔函数  $\text{circ}(r'/r'_{NA}) = 1$  时, 将准直物镜像方焦面上的光场分布函数  $U_m(r')$  记为  $U_{0,m}(r')$ , 当衍射源的最大径向空间频率为  $f_{r,ms}$  时, 若准直物镜的数值孔径  $NA < \lambda f_{r,ms}$ , 则准直物镜的孔径拦截了空间频率为  $f_r > NA/\lambda$  的小平坦波面衍射源的光场, 准直物镜像方焦面光场分布函数  $U_m(r') = \text{circ}(r'/r'_{NA}) U_{0,m}(r')$ 。当准直物镜的数值孔径  $NA \geq \lambda f_{r,ms}$  时, 圆孔函数  $\text{circ}(r'/r'_{NA}) = 1$ , 若小平坦波面衍射源为简单直角坐标偏振光场或简单柱面坐标偏振光场, 准直物镜像方焦面处的光场分布函数  $U_m(r') = U_{0,m}(r')$ 。  $U_{0,m}(r')$  为准直物镜物方焦面处的光场分布函数  $U_m(r)$  的零阶或一阶贝塞尔-傅里叶变换形式, 其结论与 Goodman 在傅里叶光学导论<sup>[1]</sup>中基于傍轴条件或非涅耳近似下表达的傅里叶变换透镜的光场变换特性表达式一致, 可见, 倾斜因子  $K(\theta) = \sqrt{\cos \theta}$  具有合理性。对于成像条件满足正弦条件的准直物镜, 变迹因子  $a(\theta) = \sqrt{\cos \theta}$  和倾斜因子  $K(\theta) = \sqrt{\cos \theta}$  将物、像双方焦面之间的光场分布关系从傍轴领域推广到非傍轴领域。

若准直物镜物方焦面处的衍射源为小平坦波面的简单直角坐标偏振  $LG_{00}$  模或简单柱面坐标偏振  $LG_{10}$  模拉盖尔-高斯光束束腰光斑, 小平坦波面衍

射源光场分布表达为

$$U_m(r) = C_{m,1} \left(\frac{r}{\omega_0}\right)^m \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2}\right), \quad (9)$$

式中:  $C_{m,1}$  为常数;  $\omega_0$  为基模高斯光束的束腰半径。准直物镜的焦距  $f'$  与基模高斯光束的瑞利距离  $z_R = \pi\omega_0^2/\lambda$  之间的关系满足  $f' \gg z_R$ , 由(8)、(9)式可知, 准直物镜像方焦面处的光场分布函数  $U_m(r')$  为

$$U_m(r') = C_{m,1} \exp(i\Phi) \text{circ}\left(\frac{r'}{r'_{NA}}\right) \left(\frac{\omega_0}{\omega'_0}\right) \left(\frac{r'}{\omega'_0}\right)^m \exp\left(-\frac{r'^2}{\omega'^2_0}\right), \quad (10)$$

式中:  $\omega'_0 = \lambda f' / (\pi\omega_0)$  为准直物镜的数值孔径  $NA \gg \theta_0$  时的准直物镜像方焦面处的基模高斯光束的束腰半径, 其中  $\theta_0 = \lambda / (\pi\omega_0)$  为准直物镜物方基模高斯光束的远场发散角。由(10)式可知, 当准直物镜的孔径对变换的光束产生限制作用时, 准直物镜像方焦面光场分布函数  $U_m(r')$  由  $U_{0,m}(r')$  与圆孔函数  $\text{circ}(r'/r'_{NA})$  的乘积表达。

当准直物镜的数值孔径  $NA \gg \theta_0$  时, 可以认为准直物镜的孔径没有对变换的光束产生限制作用, 圆孔函数  $\text{circ}(r'/r'_{NA}) = 1$ , 准直物镜像方光束为束腰位于像方焦面且基模高斯光束束腰半径为  $\omega'_0$  的简单直角坐标偏振  $LG_{00}$  模或简单柱面坐标偏振  $LG_{10}$  模拉盖尔-高斯光束, 与傍轴条件下的高斯光束变换特性一致。

## 4 结 论

根据惠更斯-菲涅耳原理、空间频谱理论及能量守恒定律, 推断小平坦波面衍射远场积分公式的倾斜因子  $K(\theta_s, \theta_o)$  由衍射源方倾斜因子  $K(\theta_s)$  表达, 衍射源方倾斜因子为衍射源方倾斜角  $\theta_s$  余弦的平方根, 并给出小平坦波面衍射远场分布的表达式。结合准直物镜对光场的变换功能, 给出小平坦波面衍射源经满足正弦条件的准直物镜准直后的光场表达式。当准直物镜的数值孔径大于衍射源的最大径向空间频率  $f_{r,ms}$  与波长乘积结果时, 准直物镜物、像双方焦面光场分布关系与傍轴条件下的准直物镜物、像双方焦面光场分布关系一致, 进一步论证了倾斜因子表达式的合理性。

## 参 考 文 献

- [1] Goodman J W. Introduction to Fourier optics [M]. 2nd Ed. New York: The McGraw-Hill Companies, 1996: 1-106.

- [2] Born M, Wolf E. Principles of optics [M]. 7th Ed. Oxford: Cambridge University Press, 1999: 116-203, 412-516.
- [3] Gu M. Advanced optical imaging theory[M]. Berlin: Springer, 2000: 143-169.
- [4] Wolf E, Marchand E W. Comparison of the Kirchhoff and the Rayleigh-Sommerfeld theories of diffraction at an aperture[J]. Journal of the Optical Society of America, 1964, 54(5): 587-594.
- [5] Heurtley J C. Scalar Rayleigh-Sommerfeld and Kirchhoff diffraction integrals: a comparison of exact evaluations for axial points[J]. Journal of the Optical Society of America, 1973, 63(8): 1003-1008.
- [6] Freude W, Grau G K. Rayleigh-Sommerfeld and Helmholtz-Kirchhoff integrals: application to the scalar and vectorial theory of wave propagation and diffraction [J]. Journal of Lightwave Technology, 1995, 13(1): 24-32.
- [7] Guo F Y, Li L H. Comparison on the scalar diffraction integral formulae[J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(2): 0226001.  
郭福源, 李连煌. 标量衍射积分公式比较分析[J]. 光学学报, 2013, 33(2): 0226001.
- [8] Artiglia M, Coppa G, di Vita P, et al. Mode field diameter measurements in single-mode optical fibers [J]. Journal of Lightwave Technology, 1989, 7(8): 1139-1152.
- [9] Lin B, Guo F Y, Chen Y Q, et al. Beam characteristic analysis of scalar diffraction from weakly guiding optical fiber[J]. Chinese Journal of Lasers, 2003, 30(9): 809-813.  
林斌, 郭福源, 陈钰清, 等. 弱导光纤的标量衍射光束特性分析[J]. 中国激光, 2003, 30(9): 809-813.
- [10] Guo F Y, Wang M H. Coupling characteristics of star waveguide coupler [J]. Acta Optica Sinica, 2006, 26(12): 1797-1802.  
郭福源, 王明华. 星形光波导耦合器的耦合特性分析[J]. 光学学报, 2006, 26(12): 1797-1802.
- [11] Guo F Y, Li L H. Propagation characteristics of non-paraxial diffraction beam [J]. Chinese Journal of Lasers, 2013, 40(1): 0102004.  
郭福源, 李连煌. 非傍轴衍射光束的传输特性[J]. 中国激光, 2013, 40(1): 0102004.
- [12] Zhu Z L, Li L H, Guo F Y, et al. Characteristics of far-field distributions of Gaussian beams with non-paraxial  $LG_{00}$  mode and  $LG_{10}$  mode[J]. Acta Optica Sinica, 2017, 37(5): 0526002.  
朱志绿, 李连煌, 郭福源, 等. 非傍轴  $LG_{00}$  模与  $LG_{10}$  模高斯光束的远场分布特性[J]. 光学学报, 2017, 37(5): 0526002.
- [13] Sherman G C. Application of the convolution theorem to Rayleigh's integral formulas [J]. Journal of the Optical Society of America, 1967, 57(4): 546-547.
- [14] Yang G G, Song F J. Advanced physical optics[M]. 2nd Ed. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2008: 21-86.  
羊国光, 宋菲君. 高等物理光学[M]. 2 版. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2008: 21-86.
- [15] Lucke R L. Rayleigh-Sommerfeld diffraction and Poisson's spot [J]. European Journal of Physics, 2006, 27(2): 193-204.
- [16] Harvey J E. Fourier treatment of near-field scalar diffraction theory[J]. American Journal of Physics, 1979, 47(11): 974-980.
- [17] Yin Z Y. A simple method for obtaining stringent diffraction integral[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 1988, 22(5): 74-82, 117-118.  
殷琢豫. 建立严格衍射积分的简单方法[J]. 上海交通大学学报, 1988, 22(5): 74-82, 117-118.
- [18] Bertilone D C. On the exact Kirchhoff and Rayleigh-Sommerfeld theories for the focusing of an infinite scalar spherical wave-field [J]. Optics Communications, 1991, 85(2/3): 153-158.
- [19] Wang Q, Yang T L, Shen W D. Far field patterns of the modes emitted from a weakly guiding optical fiber [J]. Acta Optica Sinica, 1987, 7(1): 62-66.  
王奇, 杨天龙, 沈文达. 弱波导光纤出射模在衍射远区的场分布[J]. 光学学报, 1987, 7(1): 62-66.
- [20] Youngworth K S, Brown T G. Focusing of high numerical aperture cylindrical-vector beams [J]. Optics Express, 2000, 7(2): 77-87.
- [21] Li W C, Yang Y F, He Y, et al. Triple optical chain generated by tight focusing of azimuthally polarized higher-order Laguerre-Gauss vortex beams[J]. Acta Optica Sinica, 2019, 39(8): 0826002.  
李维超, 杨艳芳, 何英, 等. 基于高阶角向偏振拉盖尔高斯涡旋光束强聚焦的三光链结构[J]. 光学学报, 2019, 39(8): 0826002.
- [22] Li H Y, Yang Y F, He Y, et al. Conversion between special focal field structures based on  $4\pi$  focusing system [J]. Acta Optica Sinica, 2020, 40(12): 1226001.  
李红艳, 杨艳芳, 何英, 等. 基于  $4\pi$  聚焦系统实现特殊焦场结构之间的转换[J]. 光学学报, 2020, 40(12): 1226001.
- [23] Guo F Y, Li L H, Zheng H, et al. Propagation characteristics of simple cylindrical polarized beam [J]. Chinese Journal of Lasers, 2013, 40(8): 0802003.  
郭福源, 李连煌, 郑华, 等. 简单柱面坐标偏振光束的传输特性[J]. 中国激光, 2013, 40(8): 0802003.
- [24] Chen J. Optical electromagnetic theory[M]. Beijing:

Science Press, 2005: 35-74.

陈军. 光学电磁理论[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 35-74.

- [25] Saghafi S, Sheppard C J R. Near field and far field of elegant Hermite-Gaussian and Laguerre-Gaussian modes[J]. *Journal of Modern Optics*, 1998, 45(10): 1999-2009.

- [26] Jiang Y S, Xu H W, Tang H, et al. Graphic comparisons between Hermite-Gaussian modes and Laguerre-Gaussian modes [J]. *Acta Optica Sinica*,

2013, 33(6): 0606001.

江月松, 徐洪武, 唐华, 等. 厄米-高斯模与拉盖尔-高斯模的图像比较 [J]. *光学学报*, 2013, 33(6): 0606001.

- [27] Richards B, Wolf E. Electromagnetic diffraction in optical systems, II. structure of the image field in an aplanatic system[J]. *Proceeding of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1959, 253(1274): 358-379.