

氟化镁楔形微腔色散调控及孤子产生数值分析

沈远, 孟令俊, 王梦宇, 杨煜, 王克逸*

中国科学技术大学精密机械与精密仪器系光电信息技术实验室, 安徽 合肥 230027

摘要 用有限元计算方法仿真了 MgF_2 楔形腔中的色散情况, 并研究半径、楔角大小、楔角位置三个参数对整个腔在通讯波段的色散影响。通过从蓝失谐到红失谐的调谐过程, 利用得到的色散曲线, 根据 Lugiato-Lefever 方程和热偏移公式仿真孤子的频域和时域图。并且研究了扫描速度、品质因子、泵浦功率等对孤子产生的影响。在结合以往实验和理论基础的情况下, 探讨了利用 MgF_2 晶体腔产生孤子的一些重要参数。数据结果对制备低反常色散 MgF_2 楔形腔及在此腔中产生孤子梳具有指导意义。

关键词 光学器件; 回音壁模式; 光频梳; 楔形腔; 腔孤子

中图分类号 O436.3; O437

文献标志码 A

doi: 10.3788/AOS202141.0323001

Dispersion Engineering of Magnesium Fluoride Wedge Resonator and Numerical Analysis for Soliton Generation

Shen Yuan, Meng Lingjun, Wang Mengyu, Yang Yu, Wang Keyi*

Laboratory of Optoelectronic Information Technology, Department of Precision Machinery and Precision Instrument, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230027, China

Abstract In this letter, the dispersion of the MgF_2 wedge cavity is simulated using the finite element method and the dispersion effect of radius, wedge angle value, and wedge angle position on the full cavity in the communication band is studied. Further, the dispersion curve is used to simulate the frequency and time domains of solitons using the Lugiato-Lefever and thermal migration equations by employing the blue to red detuning process. The impacts of scanning speed, quality factor, and pump power on solitons are evaluated. Combined with previous experiments and assumptions, some important parameters of the MgF_2 wedge cavity for the soliton generation are discussed. The data results are useful for fabricating the MgF_2 wedge cavity with low anomalous dispersion and generating soliton combs in this cavity.

Key words optical devices; whispering-gallery mode; optical frequency comb; wedge cavity; cavity soliton

OCIS codes 230.5750; 230.3990; 230.4320; 190.5530

1 引言

具有回音壁模式的微谐振腔由于具有高品质因子、小模式体积、可以在小泵浦功率下激发光学非线性现象的特点而受到广泛关注。自参量振荡^[1]、光学频率梳^[2]、孤子^[3]相继在微腔中被观察到后, 利用微腔产生稳定的孤子光频梳近来也是研究的重点。

孤子是一种在传播过程中维持自身形状不变的波, 在频域上表现为低噪声的光频梳。目前已有数种能产生孤子的方法被提出, 如调失谐法^[3]、power kicking 法^[4]、热调谐法^[5]、双泵浦调谐法^[6]等。在种类众多的微腔中, 晶体腔(如 MgF_2 、 CaF_2 、 LiNiO_3 等材料)经精密磨抛后品质因子 Q 值可以达到 10^8 以上^[7], 而且具有对周围环境湿度不敏感、吸收常数小

收稿日期: 2020-07-20; 修回日期: 2020-08-26; 录用日期: 2020-09-08

基金项目: 国家自然科学基金(61775209, 41871229, 61275011)

* E-mail: kywang@ustc.edu.cn

等优点,在非线性光学领域有着潜在的应用价值。其中 MgF_2 晶体腔已被报导过有孤子梳的产生^[3,8],但是关于楔形截面微腔产生孤子梳的研究鲜有报道。

色散是孤子产生过程中的一个重要影响因素。目前,绝大部分孤子梳都是在反常色散腔中产生的,尽管在正常色散腔中也可以产生暗孤子梳^[9-10],但是要求严苛得多,故本文主要研究反常色散腔的情况。微腔的总色散由两部分组成,即材料色散和几何色散。材料色散一般难以改变,但是可以通过改变几何色散来调控微腔的总体色散,常用的方法包括镀膜^[11-13]、形状调控^[14-17]等。楔形腔几何结构更容易用于参数定量描述和加工,因而在实际应用中具有潜力。

基于 Lugiato-Lefever 方程 (LLE)^[18] 的分步傅里叶算法广泛地应用于孤子的仿真,但是大部分研究都忽视了热效应对孤子产生的影响。但是温度不可避免地会对微腔产生一个热漂移作用,因此引入热效应是非常有必要的。

本文首先利用有限元方法计算楔形腔中的色散,得出色散和几何形状中半径、楔角的关系;然后根据色散和 LLE 仿真研究孤子的产生过程,探讨热效应、扫描速度、泵浦功率、Q 值等参数对孤子产生的影响。

2 色散控制

楔形腔中存在 4 种模式场,分别为方位角模式、极性角模式、径向模式及偏振模式。图 1 是楔形腔以及用该腔产生光频梳的设计图。相比于传统的球形或椭圆形腔,楔形腔的两条楔边可以显著抑制极性角模式,且楔角越小,抑制能力越强,这对于找到一个比较干净的方位角模式频谱是很有帮助的。可以知道,一个半径为 2 mm、楔角约为 30° 的 MgF_2 楔形腔,其方位角模式的自由频谱范围 (FSR) 值大概为前几个极性角模式 FSR 值的 1/10,这意味着在频谱中,光纤模式更容易耦合入方位角模式。由于偏振模式的两种偏振状态的性质相近,所以研究的色散都是横电波 (TE) 方位角模式的色散。

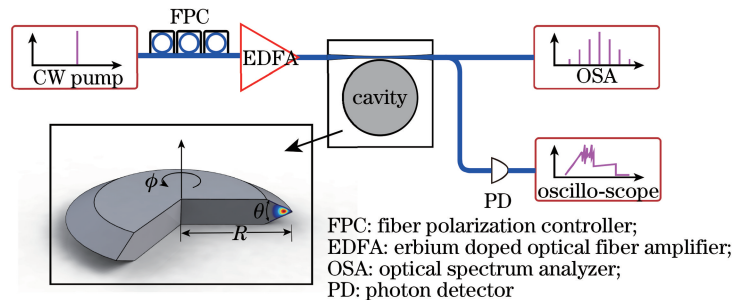


图 1 光频梳产生装置及楔形腔示意图

Fig. 1 Schematic of optical frequency comb generator and wedge microresonator

在高 Q 值的微腔中,由于谐振效应,光场强度大大提高,从而可以产生光学非线性效应。克尔光频梳是近年来引起广泛关注的一种非线性现象,克尔光频梳的产生与腔内的色散息息相关。由于材料色散是固有的,性质很难改变,所以可以通过几何形状来调控几何色散,从而调控整体的色散。这里需要注意的是,几何色散都是正的^[19]。本文用群速度色散 (GVD) 来表征色散大小。

2.1 材料色散

材料色散可以通过色散公式计算得出。对于 MgF_2 , 表达式^[20]为

$$n^2 - 1 = \frac{0.48755108\lambda^2}{\lambda^2 - 0.04338408^2} + \frac{0.39875031\lambda^2}{\lambda^2 - 0.09461442^2} + \frac{2.3120353\lambda^2}{\lambda^2 - 23.793604^2}, \quad (1)$$

式中: n 是折射率; λ 是波长,单位为 μm 。

MgF_2 的材料色散如图 2 所示,可以看到,其材料零色散点 (ZDP) 接近于 1350 nm。其他晶体材料如 CaF_2 , 其材料零色散点接近 1550 nm, 当加上几何色散后,很容易变为正常色散; $LiNiO_3$ 具有较大的折射率,较难实现高效耦合。

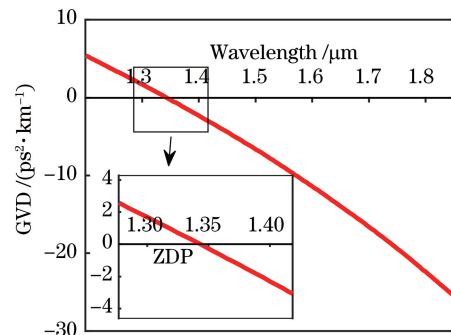


图 2 MgF_2 的材料色散

Fig. 2 Material dispersion of MgF_2

2.2 几何色散与总色散

微腔中几何色散的产生是因为不同模式在微腔中的传播常数不同。直接通过波动光学方程求解楔形腔中色散的解析解是非常困难的,故使用有限元方法来仿真微腔中的色散。

通过将三维轴对称模型转换为二维模型来进行有限元仿真。在仿真过程中考虑材料色散的影响,求出对应方位角模式的谐振频率,然后通过谐振频率得群速度色散^[21],即总色散:

$$G_{\text{GVD}}(\mu) \cong -\frac{1}{2\pi R} \cdot \frac{D_2(\mu)}{D_1^3(\mu)}, \quad (2)$$

式中: μ 是模式对应的模式数; R 是腔的半径。

$$D_1(\mu) = \frac{\nu_{\mu+1} - \nu_{\mu-1}}{2}, \quad (3)$$

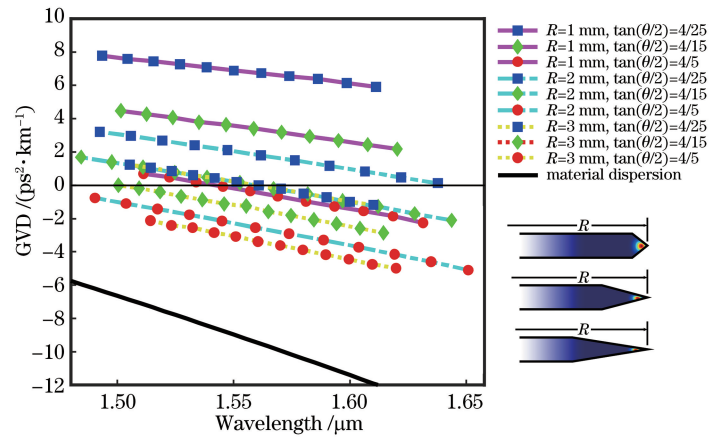


图 3 不同半径、不同楔角大小的 MgF₂ 楔形腔的 GVD

Fig. 3 GVD of MgF₂ wedge microresonator with different radii and wedge angles

图 4 为不同楔形角位置下的色散仿真。楔角的位置不同,但是楔角的大小相近,分别为 29.86°、29.40°、28.07°。在相近的楔形角大小下,色散的差值很小,且有着更小的楔角对应更大色散的对应关系,因此可以认为楔形腔的色散与楔形角的位置关

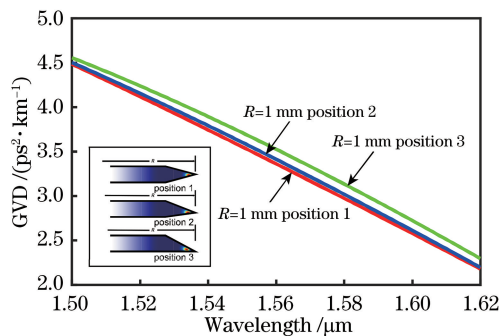


图 4 在不同楔角位置的 MgF₂ 楔形腔的 GVD

Fig. 4 GVD of MgF₂ wedge microresonator under different wedge angle positions

$$D_2(\mu) = \nu_{\mu+1} + \nu_{\mu-1} - 2\nu_{\mu}, \quad (4)$$

式中: ν_{μ} 是模式的频率。

改变有限元模型的几何结构,即可调控微腔的总色散。

2.3 色散调控

通过改变半径、楔角大小及楔角位置,在 1550 nm 波段附近仿真计算了不同几何形状的谐振频率,然后利用(2)~(4)式求得群速度色散。

图 3 为分别在 1,2,3 mm 的半径、半角正切值 $\tan(\theta/2)$ 分别为 4/5,4/15,4/25 情况下,9 种腔中仿真所得的结果。可以看出,在 1550 nm 波段附近,更小的半径和更小的楔形角都会使色散更加偏向于正常色散。

系不大,而与楔形角的大小密切相关。在实际加工中,单楔边的加工自然要比双楔边的加工简单。

图 5(a)、(b)分别是不同的半径和楔形角大小对应的 1550 nm 色散值以及零色散点的波长。可以看出,半径越大、楔角越大,色散越小,且对应的色散变化率越小。对于较小的半径值,需要较大的楔角来补偿,最终得到反常色散。

3 克尔孤子光频梳

孤子是一种在传播过程中保持幅值和相位不变的波,是一种低噪声的克尔光频梳。在测距、光频分复用器、原子钟等方面,孤子都有很广阔的应用前景。用 LLE,采用已在实验中证明可行的从蓝失谐到红失谐的波长调谐方式来模拟孤子光频梳在微腔中的演化过程。相比模式扩展模型^[22],这种方法可以较快解决超百个光梳的光场动态分析问题。

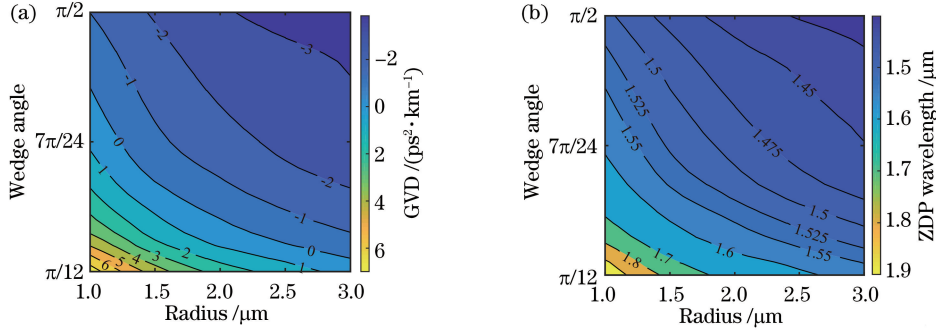


图 5 色散值和零色散点波长。(a) 1550 nm 波长处,不同半径和楔角大小的色散值;(b)不同半径和楔角大小的 ZDP 波长

Fig. 5 Dispersion value and ZDP wavelength. (a) Dispersion value with different radii and wedge angles at 1550 nm;

(b) ZDP wavelength with different radii and wedge angles

3.1 LLE

在获得腔谐振的一系列谐振频率之后,在泵浦附近进行泰勒展开,可以得到

$$\omega_{\mu} = \omega_0 + \sum_{j=1} \frac{D_j \mu^j}{j!}, \quad (5)$$

式中: ω_0 是泵浦频率; D_1 是平均 FSR,即光频梳的平均间隔; D_2 可以近似表示为 $D_2 \approx -c/n_0 \cdot D_1^2 \cdot G_{\text{GVD}}$, c 是真空中的光速。

归一化的 LLE^[23] 可以表示为

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + |\Psi|^2 \Psi = (-i + \zeta_0) \Psi + if, \quad (6)$$

式中: $\Psi = \sqrt{2g/\kappa} A$, A 是缓变包络光场幅值,非线性耦合系数 $g = \hbar \omega_0^2 c n_2 / n_0^2 V_{\text{eff}}$, n_2 为非线性折射率系数, n_0 为有效群速度折射率, V_{eff} 为有效模式体积; κ 是腔损耗率; θ 是快光时间对应的腔内的径向角;归一化的时间 $\tau = \kappa t / 2$;归一化二阶色散 $\beta_2 = -2D_2/\kappa$,更高阶的色散已被忽略;归一化失谐 $\zeta_0 = 2\delta\omega/\kappa$, $\delta\omega$ 为输入泵浦相对于腔谐振的失谐频率; f 为归一化泵浦功率, $f^2 = 8g\eta P_{\text{in}}/\kappa^2 \hbar \omega_0$, η 为腔耦合系数, P_{in} 为输入泵浦功率。

从归一化的 LLE 可以看出, β_2 、 f 和 ζ_0 对最终的结果有着主要的影响。通过调节 ζ_0 来研究孤子动态过程,因而可以把对多个参数简化为对 β_2 、 f 这两个参数进行研究。之前有研究表明,归一化色散为 $-0.01 \sim -1$ 时更容易产生孤子^[24],即有了参数优化目标之一。

3.2 热效应

当泵浦耦合进入微腔时,不可避免地会产生热量,而热量进一步会使谐振波长偏移。波长相对于温度的偏移及腔中温度的变化^[25] 可以分别表示为

$$\lambda_r(\Delta T) \cong \lambda_0 \left[1 + \left(\epsilon + \frac{dn}{dT} / n_0 \right) \Delta T \right], \quad (7)$$

$$C_p \Delta T(t) = I \eta \frac{Q}{Q_{\text{abs}}} \times \frac{1}{\left(\frac{\lambda_p - \lambda_r}{\Delta \lambda / 2} \right)^2 + 1} - K \Delta T(t), \quad (8)$$

式中: λ_r 为发生热偏移后的谐振波长; λ_0 为冷腔谐振波长; ϵ 为热膨胀系数; dn/dT 为热光系数; C_p 为比热容; I 为泵浦功率; Q_{abs} 为吸收损耗品质因子; λ_p 为泵浦波长; $\Delta \lambda$ 为谐振峰的半峰全宽; K 为腔模式体积与环境之间的热传导系数。

由(8)式可以看出,微腔中的温度变化与注入微腔的能量、传导到外界的能量及发生作用的时间息息相关。因此,泵浦功率、波长的扫描速度、 Q 值等都会对光频梳产生时的热效应有影响。在 LLE 的分步傅里叶算法中,在每步计算中都加入温度引起的谐振偏移。

3.3 结合 LLE 和微腔热效应的仿真

首先,在 2 mm 半径和大角度的腔中进行了仿真,仿真参数如表 1、2 所示,其中表 1 中的参数在仿真过程中保持不变。仿真结果如图 6 所示。图 6 (a) 表示在不同扫描速度下多次进行仿真的结果。在模拟过程中,孤子产生与初始的噪声有密切关系,虽然多次孤子产生过程的数量是不确定的,但是孤子产生的数量明显有一个范围。当扫描速度为 3.75×10^{-2} nm/s 时,腔内能量如曲线 $1 \times$ 所示,10 倍扫描速度如曲线 $10 \times$ 所示,0.1 时如曲线 $0.1 \times$ 所示。明显可以看出:扫描速度越快,混沌态所持续的失谐范围也就越大,腔内达到稳态显然需要一定的时间;更快的扫描速度下,达到孤子态时的孤子数量比慢扫描速度下的要多,这是因为孤子从图灵态转换为孤子态的过程中,混沌态时间越短,越有可能避免孤子的湮灭。图 6 (b) 表示集成色散, $D_{\text{int}} = \omega_{\mu} - (\omega_0 - D_1 \mu)$,可以看到,集成色散在所仿真的

表 1 不变参数

Table 1 Consistent parameters

Parameter	Value
$n_2 / (\text{m}^2 \cdot \text{W}^{-1})$	0.99×10^{-20}
n_0	1.3705
$\frac{dn}{dT} / \text{K}^{-1}$	2.5×10^{-5}
ϵ / K^{-1}	13.7×10^{-6}

范围内可以近似为一条二次曲线,说明在这个范围内大于二阶的高阶项可以合理地忽略掉。图 6 (f)详细表示了孤子演变过程中的各种状态。①为背景噪声;②为初始梳,也称为调制不稳定态,在时域上表现为图灵环;③为混沌态;④由混沌态转为孤子态,在时域中存在稳定的一个或数个孤子,在图 6

(a)中看起来像是一个台阶,孤子维持着两种平衡,色散效应和克尔非线性效应的自聚焦效应、腔损失与泵浦输入之间的平衡^[26];⑤当泵浦失谐超出了维持孤子的范围后,孤子消失。在整个仿真过程中,都没有观察到明显的热致谐振偏移现象。

表 2 在 $R=2 \text{ mm}$ 的腔中的主要参数

Table 2 Main parameters of the cavity with $R=2 \text{ mm}$

Parameter	Value
$K / (\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1})$	0.666
Q	1×10^9
D_1 / Hz	1.778×10^{10}
D_2 / Hz	791.7
P_{in} / mW	10
$g / (\text{J} \cdot \text{W}^{-1})$	9.5966×10^{-4}

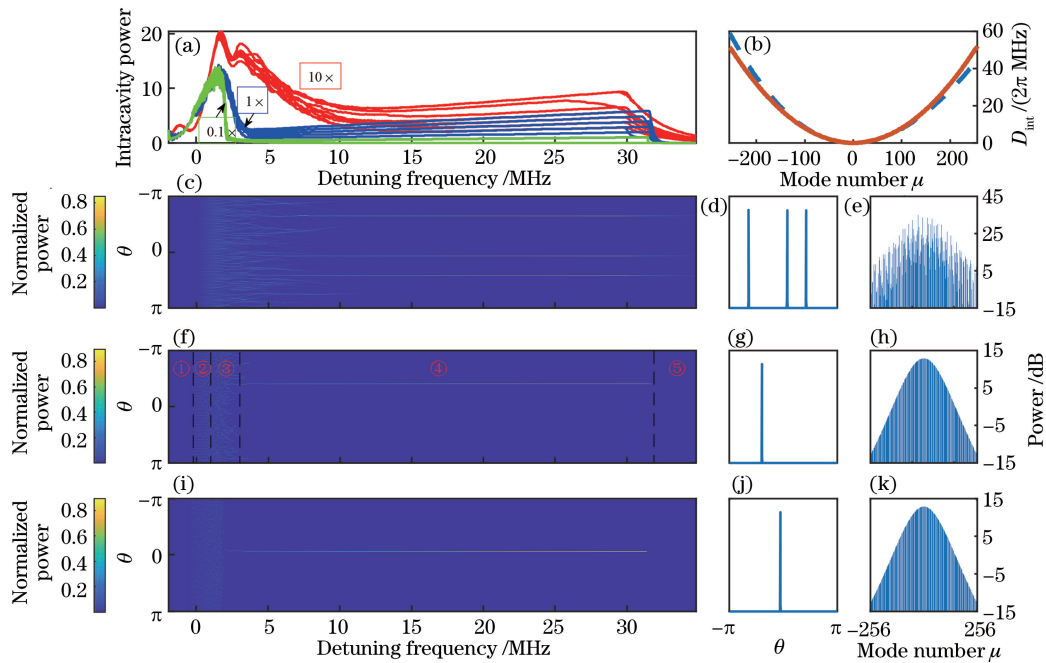


图 6 不同扫描速度下的孤子腔内能量变化图、时域图及频域图。(a) 孤子台阶图;(b) 综合色散;(c)~(e) 扫描速度为 $3.75 \times 10^{-1} \text{ nm/s}$ 时的三孤子;(f)~(h) 扫描速度为 $3.75 \times 10^{-2} \text{ nm/s}$ 时的单孤子;(i)~(k) 扫描速度为 $3.75 \times 10^{-3} \text{ nm/s}$ 时的单孤子

Fig. 6 Intracavity power variation diagram, time domain diagram, and frequency domain diagram of soliton at different scanning speeds. (a) Step diagram of soliton; (b) integrated dispersion; (c)–(e) triple-soliton at scanning speed of $3.75 \times 10^{-1} \text{ nm/s}$; (f)–(h) single-soliton at scanning speed of $3.75 \times 10^{-2} \text{ nm/s}$; (i)–(k) single-soliton at scanning speed of $3.75 \times 10^{-3} \text{ nm/s}$

研究降低品质因子后孤子产生的情况。仿真所用的参数如表 3 所示。由于 Q 值降低,输入泵浦的功率不可避免会变高。图 7(a)展示了三种不同扫描速度下的孤子台阶图,分别为 $247.2, 74.9, 7.12 \text{ nm/s}$ 。注意到,低 Q 值大大增加了达到孤子态所需要的扫描速度。在速度扫描为 7.12 nm/s 时,可以观察到明显的谐振热偏移,如图 7(a)中曲

线 $0.095 \times$ 所示,这一方面是因为相对较慢的扫描速度使腔内热量缓慢上升最后形成明显的影响,另一方面是因为增大的泵浦功率使进入微腔的热量大大增加。除此之外,可以看到,进入孤子态后,孤子的平均数量显著增加,最高的时候可以达十数个,这与 LLE 中减小的归一化色散 β_2 和相对应的归一化泵浦 f 息息相关。

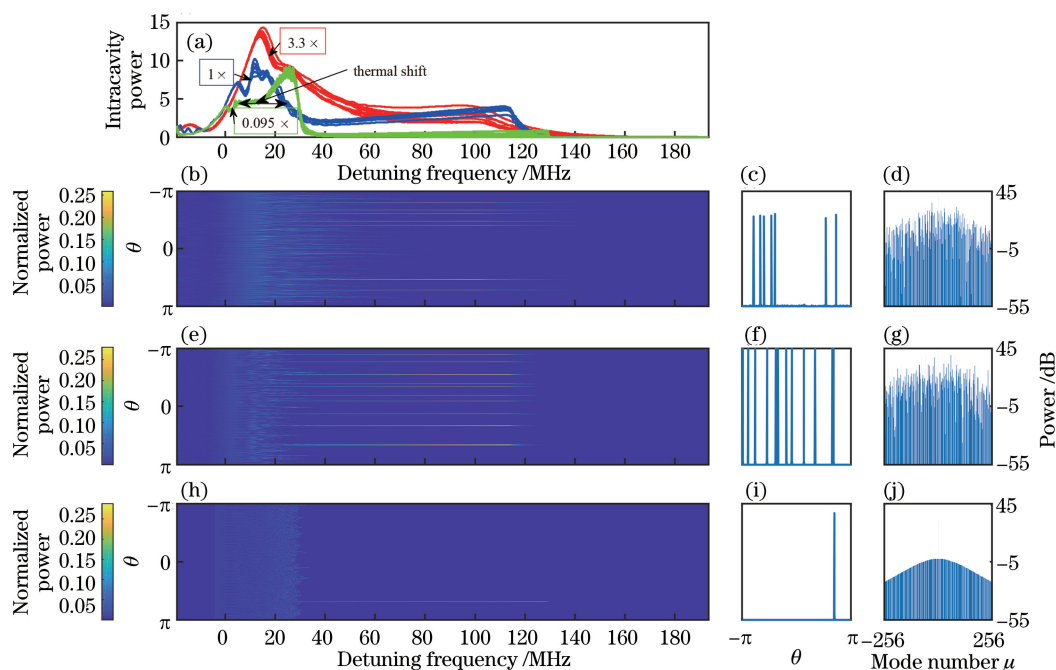


图 7 不同扫描速度下的孤子的腔内能量变化图、时域图及频域图。(a) 孤子台阶图; (b)~(d) 扫描速度为 247.2 nm/s 时的七孤子; (e)~(g) 扫描速度为 74.9 nm/s 时的十二孤子; (h)~(j) 扫描速度为 7.12 nm/s 时的单孤子
 Fig. 7 Intracavity power variation diagram, time domain diagram, and frequency domain diagram of soliton at different scanning speeds. (a) Step diagram of soliton; (b)~(d) seven-soliton at scanning speed of 247.2 nm/s; (e)~(g) twelve-soliton at scanning speed of 74.9 nm/s; (h)~(j) single-soliton at scanning speed of 7.12 nm/s

表 3 降低 Q 值后, 在 R=2 mm 的腔中的主要参数
 Table 3 Main parameters of the cavity with R=2 mm after reducing Q

Parameter	Value
$K / (\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1})$	0.666
Q	1×10^8
D_1 / Hz	1.778×10^{10}
D_2 / Hz	3959
P_{in} / mW	500
$g / (\text{J} \cdot \text{W}^{-1})$	9.5966×10^{-4}

研究增大或减小半径对孤子产生的影响。若增大半径,一方面,微腔模式的 D_1 就会减小,当半径较大时, D_1 对 β_2 起主要影响,可能会使 β_2 绝对值过小而无法产生孤子;另一方面,微腔的模式体积增大,要求输入泵浦功率 P_{in} 增大。若减小半径,腔的色散绝对值减小甚至转变为正常色散。因此半径过大或过小都不适合孤子的生成。减小半径,用表 4 所示的参数仿真得出的结果如图 8 所示。图 8(a) 是在 0.75 nm/s 和 0.075 nm/s 两种扫描速度下的孤子演化图。与 $R=2 \text{ mm}$ 不同的是,当扫描速度为 0.075 nm/s 时,就可以观察到明显的热偏移现象,这是因为更小的模式体积带来更小的比热容,使得模式体积的温度明显上升。

表 4 在 R=1 mm 的腔中的主要参数

Table 4 Main parameters of the cavity with R=1 mm

Parameter	Value
$K / (\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1})$	0.069
Q	1×10^9
D_1 / Hz	3.664×10^{10}
D_2 / Hz	5879
P_{in} / mW	5
$g / (\text{J} \cdot \text{W}^{-1})$	0.0045

3.4 分析与讨论

实际上,微腔中的各种参数对孤子光频梳的产生影响是交错复杂的。对归一化 LLE 进行分析,通过控制归一化色散 β_2 为 $-0.01 \sim -1$,可以更好地产生单孤子梳。通过分析,半径为 0.5~5 mm 是一个比较好的范围,此时 D_1 处于一个比较合适的范围, D_2 可以通过几何色散进行修饰。虽然只在楔形腔中进行讨论,但是对于其他形状的 MgF_2 腔尺寸,也具有参考价值,因为形状仅仅修饰了色散的大小。在以往 MgF_2 腔中产生孤子的工作中,腔的直径为 2~4 mm^[3,8],也间接地证明本文工作的正确性。

除了色散, Q 值在其中起着重要的作用,当 Q 约为 1×10^9 时泵浦功率可以低至 mW 量级,但是当 Q 约为 1×10^8 时泵浦功率就必须增大至百 mW 量级。想要在 MgF_2 腔中取得较好的实验结

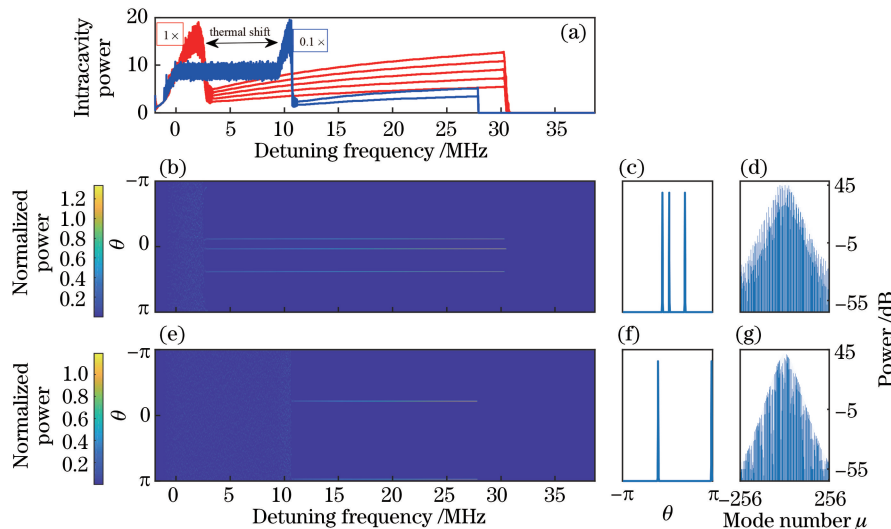


图 8 不同扫描速度下的孤子的腔内能量变化图、时域图及频域图。(a) 孤子台阶图;

(b)~(d) 扫描速度为 0.75 nm/s 时的三孤子;(e)~(g) 扫描速度为 0.075 nm/s 时的双孤子

Fig. 8 Intracavity power variation diagram, time domain diagram, and frequency domain diagram of soliton at different scanning speeds. (a) Step diagram of soliton; (b)~(d) triple-soliton at scanning speed of 0.75 nm/s; (e)~(g) double-soliton at scanning speed of 0.075 nm/s

果,必须要有较大的 Q 值,因为泵浦输入功率也有一定的限值。

半径除了会影响色散,还是影响光频梳频率间隔(即 D_1)的最主要因素。在 $R=1$ mm 时, D_1 约为 3.664×10^{10} Hz,在 $R=2$ mm 时约为 1.778×10^{10} Hz,在 $R=3$ mm 时约为 1.176×10^{10} Hz。半径与 D_1 近似呈反比关系。对于某具体的光频梳间隔需求,可以先确定微腔的半径大小,然后通过楔角的大小来调控色散。

微腔中的热效应与多方面相关。其一,当扫描速度较慢时,微腔被充分加热,热效应的影响增大;其二,当微腔的尺寸较小,其模式体积也较小,那么微腔的模式体积热容减小,热效应的影响增大;其三,当泵浦的功率较大,则进入微腔的热量也比较大,热效应的影响增大。三项因素相互制约,因此热效应需要具体分析。

4 结 论

研究了几何结构对 MgF_2 楔形腔色散的修饰作用和基于此腔的孤子仿真结果。结果表明,楔形腔的色散随着腔的半径和楔角变大而减小,与楔角的位置关系不大。在通讯波段(1550 nm)附近,反常色散腔的尺寸在 mm 量级以上。利用 LLE 和腔热效应公式,讨论了腔孤子的产生,具体研究了扫描速度、泵浦功率、 Q 值等对孤子产生的影响,发现适宜孤子产生的 MgF_2 楔形腔半径为 0.5~5 mm,在高

Q 值下具有低泵浦功率的特点。扫描速度不仅仅影响孤子的产生,同时影响腔中温度的变化。

参 考 文 献

- [1] Kippenberg T J, Spillane S M, Vahala K J. Kerr-nonlinearity optical parametric oscillation in an ultrahigh- Q toroid microcavity [J]. *Physical Review Letters*, 2004, 93(8): 083904.
- [2] Del'Haye P, Schliesser A, Arcizet O, et al. Optical frequency comb generation from a monolithic microresonator [J]. *Nature*, 2007, 450(7173): 1214-1217.
- [3] Herr T, Brasch V, Jost J D, et al. Temporal solitons in optical microresonators [J]. *Nature Photonics*, 2014, 8(2): 145-152.
- [4] Brasch V, Geiselmann M, Pfeiffer M H P, et al. Bringing short-lived dissipative Kerr soliton states in microresonators into a steady state [J]. *Optics Express*, 2016, 24(25): 29312-29320.
- [5] Wang W, Lu Z, Zhang W F, et al. Robust soliton crystals in a thermally controlled microresonator [J]. *Optics Letters*, 2018, 43(9): 2002-2005.
- [6] Wang W Q, Chu S T, Little B E, et al. Dual-pump Kerr micro-cavity optical frequency comb with varying FSR spacing [J]. *Scientific Reports*, 2016, 6: 28501.
- [7] Grudinin I S, Matsko A B, Savchenkov A A, et al. Ultra high Q crystalline microcavities [J]. *Optics Communications*, 2006, 265(1): 33-38.
- [8] Guo H, Karpov M, Lucas E, et al. Universal

- dynamics and deterministic switching of dissipative Kerr solitons in optical microresonators [J]. *Nature Physics*, 2017, 13(1): 94-102.
- [9] Xue X X, Xuan Y, Liu Y, et al. Mode-locked dark pulse Kerr combs in normal-dispersion microresonators [J]. *Nature Photonics*, 2015, 9(9): 594-600.
- [10] Xu X, Hu X H, Feng Y, et al. Spatiotemporal evolution of the light field inside the microresonator with normal dispersion [J]. *Acta Optica Sinica*, 2016, 36(6): 0619001.
徐昕, 胡晓鸿, 冯野, 等. 正色散光学微腔中光场演化过程研究 [J]. *光学学报*, 2016, 36(6): 0619001.
- [11] Ristić D, Mazzola M, Chiappini A, et al. Tailoring of the free spectral range and geometrical cavity dispersion of a microsphere by a coating layer [J]. *Optics Letters*, 2014, 39(17): 5173-5176.
- [12] Jin X Y, Wang J, Wang M Y, et al. Dispersion engineering of a microsphere via multi-layer coating [J]. *Applied Optics*, 2017, 56(28): 8023-8028.
- [13] Jiang W C, Zhang J D, Usechak N G, et al. Dispersion engineering of high-Q silicon microresonators via thermal oxidation [J]. *Applied Physics Letters*, 2014, 105(3): 031112.
- [14] Nakagawa Y, Mizumoto Y, Kato T, et al. Dispersion tailoring of a crystalline whispering gallery mode microcavity for a wide-spanning optical Kerr frequency comb [J]. *Journal of the Optical Society of America B*, 2016, 33(9): 1913-1920.
- [15] Grudinin I S, Yu N. Dispersion engineering of crystalline resonators via microstructuring [J]. *Optica*, 2015, 2(3): 221-224.
- [16] Riesen N, Zhang W Q, Monro T M. Dispersion in silica microbubble resonators [J]. *Optics Letters*, 2016, 41(6): 1257-1260.
- [17] Lin G P, Chembo Y K. On the dispersion management of fluorite whispering-gallery mode resonators for Kerr optical frequency comb generation in the telecom and mid-infrared range [J]. *Optics Express*, 2015, 23(2): 1594-1604.
- [18] Godey C, Balakireva I V, Coillet A, et al. Stability analysis of the spatiotemporal Lugiato-Lefever model for Kerr optical frequency combs in the anomalous and normal dispersion regimes [J]. *Physical Review A*, 2014, 89(6): 063814.
- [19] Matsko A B, Ilchenko V S, Savchenkov A A, et al. Active mode locking with whispering-gallery modes [J]. *Journal of the Optical Society of America B*, 2003, 20(11): 2292-2296.
- [20] Dodge M J. Refractive properties of magnesium fluoride [J]. *Applied Optics*, 1984, 23(12): 1980-1985.
- [21] Riemensberger J, Hartinger K, Herr T, et al. Dispersion engineering of thick high-Q silicon nitride ring-resonators via atomic layer deposition [J]. *Optics Express*, 2012, 20(25): 27661-27669.
- [22] Chembo Y K, Yu N. Modal expansion approach to optical-frequency-comb generation with monolithic whispering-gallery-mode resonators [J]. *Physical Review A*, 2010, 82(3): 033801.
- [23] Karpov M, Pfeiffer M H P, Guo H R, et al. Dynamics of soliton crystals in optical microresonators [J]. *Nature Physics*, 2019, 15(10): 1071-1077.
- [24] Chembo Y K, Menyuk C R. Spatiotemporal Lugiato-Lefever formalism for Kerr-comb generation in whispering-gallery-mode resonators [J]. *Physical Review A*, 2013, 87(5): 053852.
- [25] Carmon T, Yang L, Vahala K. Dynamical thermal behavior and thermal self-stability of microcavities [J]. *Optics Express*, 2004, 12(20): 4742-4750.
- [26] Kippenberg T J, Gaeta A L, Lipson M, et al. Dissipative Kerr solitons in optical microresonators [J]. *Science*, 2018, 361(6402): eaan8083.