

## 一种自由曲面光学系统初始结构设计方法

罗越<sup>1,2</sup>, 李立波<sup>1</sup>, 冯玉涛<sup>1\*</sup>, 赵珩翔<sup>1</sup>, 李西杰<sup>1</sup>, 白清兰<sup>1</sup><sup>1</sup>中国科学院西安光学精密机械研究所光谱成像技术重点实验室, 陕西 西安 710119;<sup>2</sup>中国科学院大学, 北京 100049

**摘要** 针对自由曲面光学系统设计中初始结构难以取得的问题, 提出了一种自由曲面光学系统的直接构建方法。将理想物像关系和费马原理作为单模块迭代的判据, 利用逐点光线追迹的方式可直接从平面无光焦度光学系统中获得具有良好优化潜力的初始结构。在迭代的阶段, 可通过采样疏密不同的特征光线的方式加快初始结构求解速度。在得到初始光学结构后, 可利用光学设计软件进一步优化像质。利用所提方法实现了空间尺寸小于 40 mm×70 mm×60 mm 的紧凑型 150 mm 焦距离轴两反光学系统的设计, 验证了所提方法在自由曲面光学系统设计中的可行性。

**关键词** 光学设计; 几何光学; 离轴两反系统; 光学自由曲面

中图分类号 O439

文献标志码 A

doi: 10.3788/AOS202141.2422002

## Design Method for Initial Structure of Freeform Surface Optical System

Luo Yue<sup>1,2</sup>, Li Libo<sup>1</sup>, Feng Yutao<sup>1\*</sup>, Zhao Hengxiang<sup>1</sup>, Li Xijie<sup>1</sup>, Bai Qinglan<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Key Laboratory of Spectral Imaging Technology, Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Xi'an, Shaanxi 710119, China;

<sup>2</sup>University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

**Abstract** A direct construction method for freeform surface optical system is proposed to address the problem that the initial structure is difficult to obtain in the design of such system. With the ideal object-image relationship and the Fermat principle as the criteria of single module iteration, an initial structure with favorable optimization potential can be directly obtained from a plane optical system without optical power by tracing light rays point by point. It can be solved faster by sampling feature light rays with different densities at different iteration stages. After the initial optical structure is obtained, optical design software can be used to further optimize the image quality. A compact off-axis two-mirror optical system with a 150 mm focal length and a physical size less than 40 mm×70 mm×60 mm is designed by the proposed method, which verifies the feasibility of this method in the design of freeform surface optical systems.

**Key words** optical design; geometrical optics; off-axis two-mirror system; optical freeform surface

**OCIS codes** 220.2740; 080.4035; 080.2740; 080.4228

## 1 引言

光学自由曲面一般是指不具有旋转对称性的光学面形<sup>[1-3]</sup>。相较于使用传统光学表面, 使用自由曲

面可以获得更多的自由度, 进而更容易获得具有良好像质、紧凑体积以及特殊空间布局的光学系统。自由曲面在非成像领域中取得了较成功的应用<sup>[3]</sup>, 如车灯照明、路灯照明、激光整形等<sup>[4-6]</sup>。随着自由

收稿日期: 2021-05-26; 修回日期: 2021-06-23; 录用日期: 2021-06-28

基金项目: 国家自然科学基金(41005019)、中科院西部青年学者(XAB2016A07)、中国科学院西部之光交叉创新团队项目(E1294301)、陕西省自然科学基金基础研究计划(2019JQ-931)

通信作者: \*fytciom@126.com

曲面加工与检测技术的升级<sup>[7-9]</sup>,自由曲面也开始被应用于成像领域,如离轴反射望远镜<sup>[10]</sup>、虚拟现实(VR)头盔<sup>[11]</sup>、车载机载抬头显示(HUD)<sup>[12]</sup>以及成像光谱仪<sup>[13]</sup>等。由于上述系统的设计指标要求高、优化变量多、初始结构少,故如果从一个与最终目标相去甚远的初始结构出发,不仅会增大设计难度,还难以获得令人满意的成像质量。因此,选择一个较好的初始结构在自由曲面光学系统设计中十分重要。

传统的初始结构选择方法是从球面系统渐进优化,逐步逼近满足系统要求的设计结果。周欣茹等<sup>[14]</sup>使用分视场拓展优化的方法,选用孔径离轴的方式设置光路,设计了一款紧凑型离轴两反望远镜,且望远镜的空间长度基本与焦距相等。Xie 等<sup>[15]</sup>将球面系统作为初始结构,使用自由曲面逐个替换球面,设计了一款大视场离轴两反望远镜,并完成了望远镜的加工、检测、装配和实验工作。文献[14-15]中的方法需要设计人员多次修改系统优化起点,并通过人工干预的方式让光学软件跳出局部极值,以获得令人满意的自由曲面系统优化起点。因此,文献[14-15]中的方法较依赖设计人员的经验,并且工作量也很大。另一类方法则是利用合适的算法直接构建具有良好优化潜力的初始结构。Yang 等<sup>[16]</sup>使用构建-迭代(C-I)方法,设计了球形轮廓离轴三反系统。操超等<sup>[17]</sup>基于节点像差理论和费马原理,设计了大视场离轴三反系统。采用直接构建初始结构的方法便于设计人员找到合适的初始结构,降低了后续的优化难度并减少了设计耗时,有利于自动化光学设计的实现。

本文提出了一种自由曲面光学系统的直接构建方法,从平面离轴光学系统出发,通过逐点光线追迹的方式,以理想物像关系和费马原理作为迭代判据,直接生成具有良好优化潜力的光学系统初始结构。不同于文献[16]中提到的 C-I 方法,所提方法没有将设计过程拆分为构建、迭代两个模块,而是利用一个通用模块完成初始结构求解。在迭代的阶段可通过改变采样光线数量的方法,加快系统收敛速度,进而减少求解初始结构的时间。在迭代完成后,以具有较好成像质量的迭代结果为起点,利用光学设计软件简单优化后,即可得到最终的紧凑型离轴反射光学系统,表明了所提方法的有效性。

## 2 设计原理

### 2.1 基于理想物像关系的光线追迹

根据理想物像关系,当系统一阶光学参数确定

时,每个视场对应的理想像点位置也唯一确定。对于共轭距离为无穷远的光学系统,这一关系可表示为

$$\begin{bmatrix} I_X \\ I_Y \\ I_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \times \tan \omega_X \\ f \times \tan \omega_Y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中: $I_X$ 、 $I_Y$ 、 $I_Z$  分别表示理想像点  $I_{\text{ideal}}$  在  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  方向的位置坐标; $\alpha$  表示像面关于  $X$  轴的倾斜角度(光学系统一般关于  $YOZ$  平面对称); $f$  表示光学系统的焦距; $\omega_X$ 、 $\omega_Y$  表示系统在  $X$ 、 $Y$  方向的视场角; $x_c$ 、 $y_c$ 、 $z_c$  表示像面中心的全局坐标。

所提的直接构建方法是在满足理想物像关系的前提下,通过构建具有特殊面形参数的光学表面,使光学系统的任一视场、任一孔径光线,在经过光学表面反射后,都向理想像点会聚。图 1 为光线追迹模型。特征光线  $OP$  为任一入射光线,当它入射到光学表面  $S_1$  上时会发生反射。根据反射定律,入射光线  $OP$ 、出射光线  $PE$  及两条光线与表面交点  $P$  处的光学表面单位法向量  $N_1$  应当满足

$$N_1 = \frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|}, \quad (2)$$

式中: $r_1$  为入射光线  $OP$  的方向向量; $r_2$  为出射光线  $PE$  的方向向量。对于任一光学表面,入射光线方向向量、出射光线方向向量及其与光学表面的交点处对应的单位法向量均应满足(2)式。

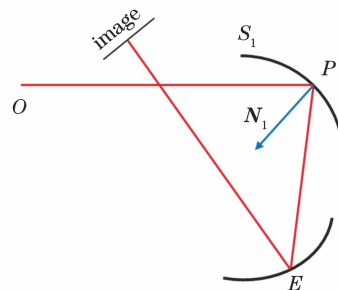


图 1 光线追迹模型

Fig. 1 Ray tracing model

当待构建表面( $k$ )为系统最后一个表面( $k_{\text{max}}$ )时,入射光线及出射光线向量可以通过确定的坐标点获得。当待构建表面不为系统最后一个表面时,出射光线向量则要通过费马原理<sup>[18]</sup>(光线的总光程为极值,总光程的一阶变分为零)求取

$$\delta L = \delta \int_O^{I_{\text{ideal}}} n ds, \quad (3)$$

式中: $\delta$  为变分符号; $L$  为光线的总光程; $n$  为折射率; $s$  为路径长度。

在整个构建过程中,保持获得的坐标信息不变,求解所有采样光线在表面上交点处对应的理想法向量。同时,利用残差方法,结合获得的坐标信息以及法向量,将获得的离散数据点拟合成新的自由曲面参数<sup>[19]</sup>。对系统中的每一个表面重复这一过程,直到每一个表面都完成这一拟合过程。然而,在一次完全拟合后,并不一定能获得令人满意的光学系统初始结构。为解决上述问题,可将得到的自由曲面重新放入系统中进行多次迭代,进而获得具有良好优化潜力的初始结构。

求解过程中的光线追迹是通过光学设计软件 Zemax 的数据接口 ZOS-API 与 Matlab 通信的方式实现的。首先,利用 Zemax 提供的 IBatchRayTrace 方法,指定需要追迹的光线的视场、孔径及波长信息,并获得光线与待构建光学表面的交点坐标。然后,Zemax 的数据接口将坐标矩阵传递给 Matlab 以进行进一步的数据处理,进而得到所需要的向量

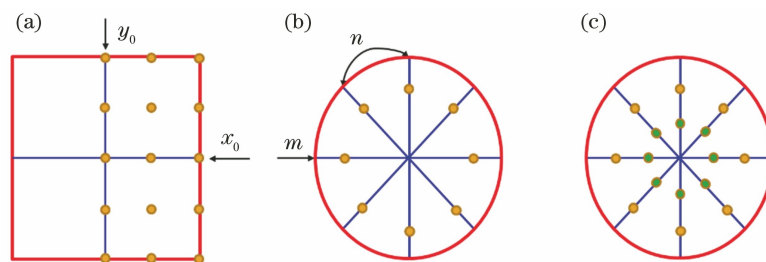


图 2 特征光线采样。(a)视场采样;(b)稀疏的光瞳采样;(c)密集的光瞳采样

Fig. 2 Feature ray sampling. (a) Field of view sampling; (b) sparse pupil sampling; (c) dense pupil sampling

对光瞳半径做归一化处理,可直接用于确定光学软件中进行光线追迹的光瞳位置,可描述为

$$\begin{cases} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & \frac{2}{m} & \frac{3}{m} & \dots & \frac{m}{m} \end{bmatrix} \\ \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2n} \times \pi & \frac{2}{2n} \times \pi & \frac{3}{2n} \times \pi & \dots & \frac{2n}{2n} \times \pi \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{P}_X = \mathbf{R} \times \mathbf{M} \\ \mathbf{P}_Y = \mathbf{R} \times \mathbf{N} \end{cases} \quad (5)$$

式中: $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{T}$  分别代表光瞳采样时径向、切向的采样情况;坐标矩阵  $\mathbf{P}_X$ 、 $\mathbf{P}_Y$  分别代表光瞳采样归一化坐标的 X、Y 分量; $\mathbf{M}$  是对  $\mathbf{T}$  中所有元素进行余弦运算后得到的矩阵; $\mathbf{N}$  是对  $\mathbf{T}$  中所有元素进行正弦运算后得到的矩阵。

在迭代的开始阶段,几百条光线足够使得光学系统朝着满足设计要求的方向快速收敛。然而,在迭代进行一段时间后,如果仍旧使用与迭代初期相同的光线追迹数量,收敛将会变得相当缓慢。若只

信息。

## 2.2 变光线采样

由于光学系统的自由曲面构建依赖于离散数据点的拟合,而离散数据点的个数又与采样光线的条数直接相关,故从获得最佳成像质量的角度出发,应该选用较多的光线。然而,随着追迹光线条数的增加,光线追迹的耗时也相应增加。针对这一现象,设计时应该合理选取追迹的光线条数,在最佳成像质量以及求解耗时之间获得较好的平衡。

图 2 为特征光线采样图。对视场进行矩形均匀采样,如图 2(a)所示。由于光学系统关于 YOZ 平面对称,故只需采样 X 正方向的视场。X 方向采样  $x_0$  个视场,Y 方向采样  $y_0$  个视场。系统具有圆形光瞳,对光瞳做径向、切向两个方向的采样,如图 2(b)所示。径向有  $m$  个采样点,切向有  $n$  个采样点。在实际结构构建过程中的光线追迹数量  $K$  为

$$K = x_0 \times y_0 \times m \times n. \quad (4)$$

简单地扩大特征光线的数量,又会严重降低求解速度。为此,采用了一种变光线采样的办法。在系统迭代的初始阶段,采用较为稀疏的采样模式,使初始结构自动根据空间结构分配光焦度,并使得各条特征光线向理想像点处收敛。当系统收敛速度逐渐减缓后,切换至如图 2(c)所示的密采样模式,利用更多的特征光线,完成系统的最佳初始结构求解。在整个收敛过程中,不断调整系统的采样光线数量,以确保求解速度与成像质量间达到良好的平衡。基于直接构建方法的离轴光学系统设计流程图如图 3 所示。

当迭代至系统光学参数收敛时(一般为有效焦距偏离量小于 3%),终止迭代过程,此时可获得满足后续设计要求的光学系统初始结构。在一些情况下,采用该初始结构的光学系统可直接达到满足设计要求的成像质量,但在大多数情况下,还需要在光学设计软件中进行进一步优化。



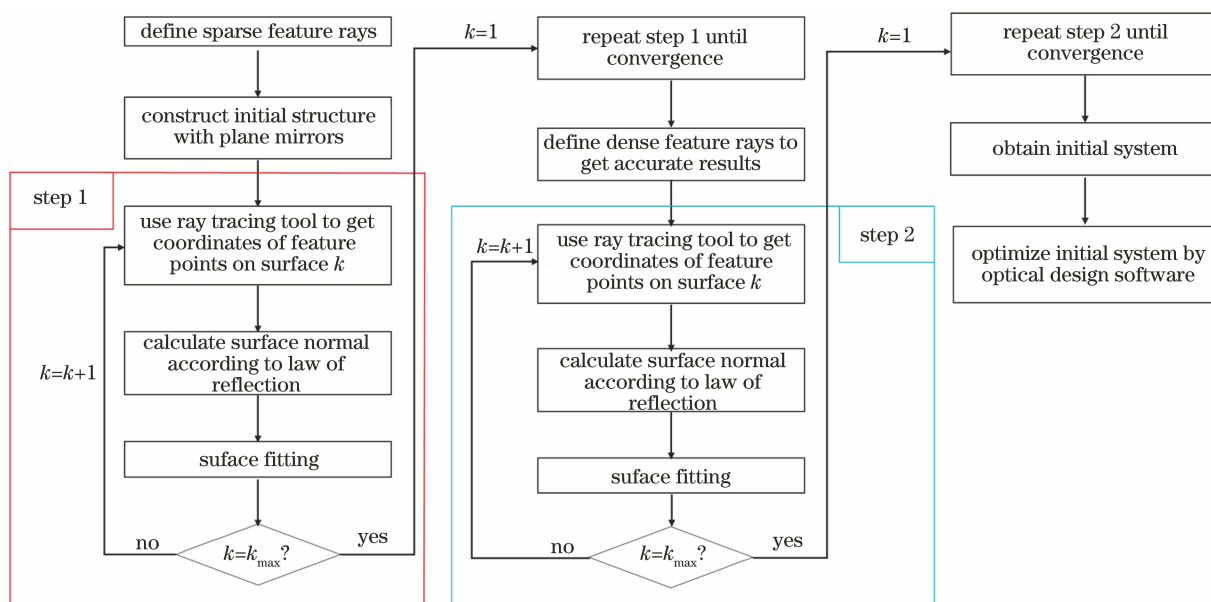


图 3 基于直接构建方法的离轴光学系统设计流程图

Fig. 3 Design flow chart of off-axis optical system based on direct construction method

### 3 紧凑型离轴两反光学系统设计

#### 3.1 设计要求

为验证所提方法的可行性,借鉴文献[14-15]中的传统光学设计方法所能实现的离轴两反光学系统的参数,设定了所提系统的参数,如表 1 所示,其中 MTF 为调制传递函数。考虑到光学表面加工、检测的可行性,系统最高只使用 6 阶扩展多项式。同时,为了验证所提方法在紧凑光学系统设计方面的能力,对系统的空间尺寸提出了较高的要求,限制为 40 mm×70 mm×60 mm。

表 1 离轴两反系统的设计要求

Table 1 Design requirements of off-axis two-mirror system

Parameter	Value
Wavelength range /nm	400–800
Relative aperture	1/4
Effective focal length /mm	150
Field of view /[(°)×(°)]	2×1.5
Pixel size /μm	13.5
MTF at 37 lp/mm	>0.6

#### 3.2 初始结构求解

图 4 展示了初始结构求解过程。首先将图 4 (a)所示的光学结构作为迭代起点,在该光学系统中未设置与反射镜独立的孔径光阑。当孔径光阑从反射镜上独立出来时,光学系统会拥有更多的优化自由度,同时两个反射面都拥有校正离轴视场像差的能力。然而,对于交叉式离轴两反光学系统的光路结构,添加与反射镜独立的孔径光阑必定会导致系

统体积扩大,这不利于光学系统的小型化。综合考虑光阑位置对系统像差平衡以及系统空间尺寸的影响后,决定将光学中的第一个反射镜 M1 作为系统的孔径光阑。因此,离轴两反光学系统的全视场无遮拦是通过孔径离轴的方式以及对各反射镜离轴角进行调整获得的。离轴两反无光焦度光学系统结构参数如表 2 所示。其中, $d_i$  代表第  $i$  个反射面中心到第  $i+1$  个反射面中心的距离, $\alpha_i$  表示第  $i$  个反射面相对第  $i-1$  个反射面的旋转角,正号表示顺时针旋转,负号表示逆时针旋转。

表 2 离轴两反无光焦度光学系统结构参数

Table 2 Configuration parameters of off-axis two-mirror optical system without optical power

Parameter	Value
$d_1$ /mm	50
$d_2$ /mm	70
$\alpha_1$ /(°)	-19
$\alpha_2$ /(°)	-14

在利用所提方法求解初始结构时,首先定义系统的视场采样。由于光学系统关于 YOZ 平面对称,因此在进行视场采样时,只采样 X 正方向的视场。然后,确定自由曲面的面形参数。在进行曲面拟合时,只使用扩展多项式中 1~6 阶的  $x$  偶次方项,共 15 项。稀疏采样共定义 540 条特征光线,包括 9 个视场以及 60 个光瞳采样点。稀疏采样共迭代 35 次。图 5 为求解初始结构的收敛过程。可以发现,迭代过程中系统点列图的均方根(RMS)直径以及系统焦距均在向理想情况收敛。然而,随着迭代次

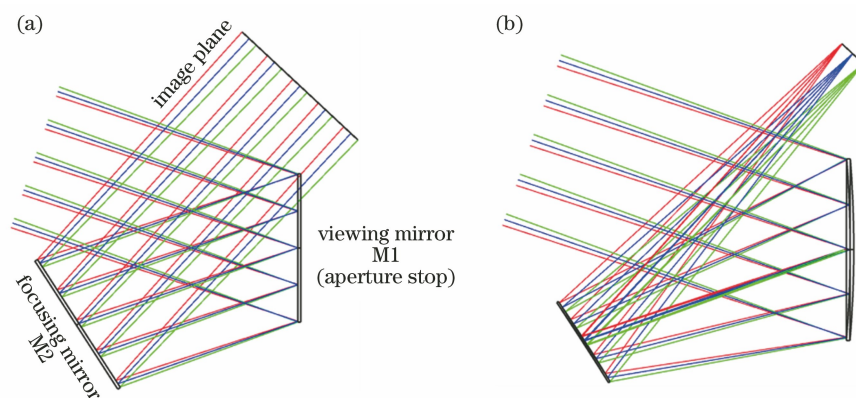


图 4 初始结构求解过程。(a)迭代前;(b)迭代后

Fig. 4 Solving process of initial structure. (a) Before iteration; (b) after iteration

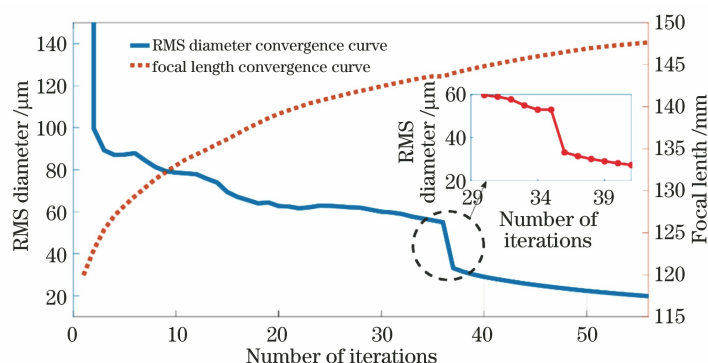


图 5 求解初始结构的收敛过程

Fig. 5 Convergence process of solving initial structure

数的增加,系统收敛速度逐渐减缓,并且在迭代过程中,收敛曲线也存在跳变情况。利用 2.2 节中提到的变光线采样方法,定义更密集的光线采样,有助于解决上述问题。

在密集采样中,共定义了 2160 条特征光线。从图 5 的插图中可以发现,系统的 RMS 直径在切换光线采样方式后迅速下降,采用密集采样方式后的 16 次迭代中像质收敛过程明显加速,且收敛更加平稳,没有出现稀疏采样时的跳变情况。采用变光线采样直接构建方法在迭代完成后的光路结构如图 4(b)所示,该初始结构已经具有较好的像质,下一步将获得的初始结构放入光学设计软件中进行进一步优化。

### 3.3 系统优化

在光学设计软件中的优化采用的是多参数联合优化的方式,系统共设置 9 个视场。优化评价函数采用光学设计软件的默认评价函数,只添加一阶光学参数限制,采用变量从少到多、阶数从低到高的方式渐进优化。3.2 节中的初始结构已基本满足一阶光学参数的要求且像质较好,故只需要对该初始结构的优化变量个数进行逐步扩展,从而进一步优化该光学系

统的像质。在每一步优化完成后,均对系统的结构和成像质量进行观察,判断是否需要继续增加优化变量。在简单优化后,便得到了满足要求的无遮拦自由曲面离轴两反光学系统。优化后光学系统的自由曲面多项式系数如表 3 所示,其中  $x, y$  为多项式中的变量。

表 3 自由曲面的多项式系数

Table 3 Polynomial coefficients of freeform surface

Item	Viewing mirror	Focusing mirror
$y$	$8.459 \times 10^{-2}$	$-6.622 \times 10^{-2}$
$x^2$	$1.334 \times 10^{-2}$	$1.886 \times 10^{-2}$
$y^2$	$-9.381 \times 10^{-4}$	$-4.459 \times 10^{-2}$
$x^2 y$	$8.309 \times 10^{-4}$	$-3.316 \times 10^{-3}$
$y^3$	$1.059 \times 10^{-3}$	$3.604 \times 10^{-3}$
$x^4$	$8.323 \times 10^{-5}$	$1.672 \times 10^{-4}$
$x^2 y^2$	$1.084 \times 10^{-4}$	$3.076 \times 10^{-4}$
$y^4$	$3.081 \times 10^{-5}$	$1.944 \times 10^{-4}$
$x^4 y$	$-4.333 \times 10^{-7}$	$1.139 \times 10^{-5}$
$x^2 y^3$	$7.028 \times 10^{-7}$	$2.816 \times 10^{-5}$
$y^5$	$-7.484 \times 10^{-7}$	$1.704 \times 10^{-5}$
$x^6$	$-5.156 \times 10^{-8}$	$-2.643 \times 10^{-6}$
$x^4 y^2$	$-9.504 \times 10^{-7}$	$-2.895 \times 10^{-5}$
$x^2 y^4$	$-5.134 \times 10^{-7}$	$-3.074 \times 10^{-5}$
$y^6$	$-1.196 \times 10^{-7}$	$-1.310 \times 10^{-5}$

优化完成后的离轴两反光学系统的光路布局如图 6(a)所示,该光学系统光路结构紧凑,空间尺寸小于  $40\text{ mm} \times 70\text{ mm} \times 60\text{ mm}$ ,各方向长度均小于一半焦距。全视场波前误差分布如图 6(b)所示,系统全视场波前误差的平均值为  $0.0521\lambda$ ,其中  $\lambda$  为系统中心波长。从图 6(c)中可以发现,该系统的最大点列图 RMS 直径小于  $13\ \mu\text{m}$ ,在  $(-0.75^\circ, 0^\circ)$  标注中,  $-0.75^\circ$  和  $0^\circ$  分别表示 X 方向的视场角和 Y

方向的视场角。从图 6(d)中可以发现,全视场调制传递函数在截止频率  $37\ \text{lp/mm}$  处大于  $0.6$ 。设计结果表明,采用所提方法设计的初始结构具有良好的优化潜力,整个设计过程简单、清晰,减轻了光学设计人员的设计难度。相对于采用传统设计方法,所提方法减少了设计耗时。利用所提方法优化后的光学系统满足设计要求、结构紧凑、具有良好的成像质量,验证了所提方法在自由曲面光学系统设计中的可行性。

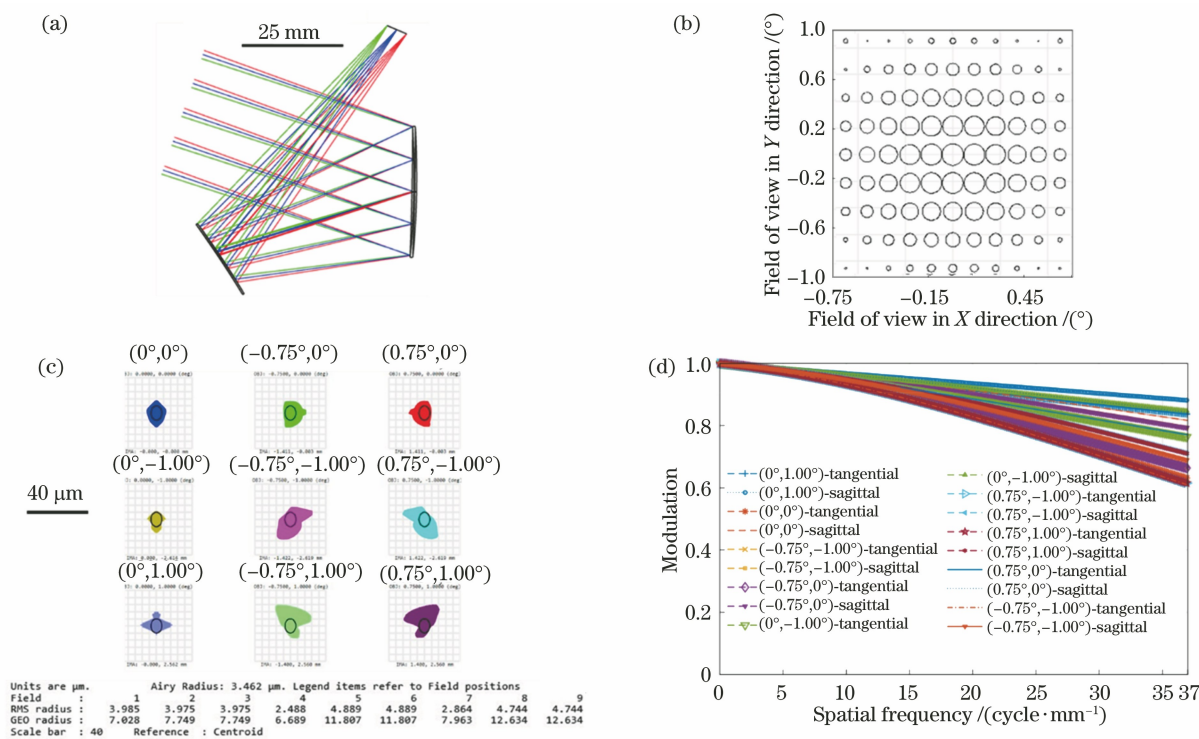


图 6 离轴两反自由曲面光学系统的设计结果。(a)光路布局;(b)全视场波前误差分布;(c)点列图 RMS 直径;(d) MTF  
Fig. 6 Design results of off-axis two-mirror freeform surface optical system. (a) Optical path layout; (b) wavefront error distribution in full field of view; (c) RMS diameter of spot diagram; (d) MTF

## 4 结 论

针对自由曲面离轴反射光学系统中存在的初始面形参数难以取得的问题,提出了一种自由曲面光学系统的直接构建方法。通过逐点光线追迹的方式,从平面无光焦度系统出发,完成了一款紧凑型无遮拦自由曲面离轴两反光学系统的光学设计工作。通过使用单个迭代模块构建系统以及在设计的不同阶段改变光线采样密度,在加快初始结构求解过程的同时,促进初始结构向理想情况更好地收敛,在求解速度与成像质量间获得了很好的平衡。以获得的具有良好优化潜力的光学系统的初始结构为基础,对自由曲面光学系统进行优化,降低了设计难度,提升了系统的优化效率。设计的紧凑型离轴两

反自由曲面光学系统成像质量良好,验证了所提方法在自由曲面光学系统设计中的可行性。

## 参 考 文 献

- [1] Wills S. Freeform optics: notes from the revolution [J]. Optics and Photonics News, 2017, 28(7): 34-41.
  - [2] Thompson K P, Rolland J P. Freeform optical surfaces: a revolution in imaging optical design [J]. Optics and Photonics News, 2012, 23(6): 30-35.
  - [3] Yang T, Duan Y Z, Cheng D W, et al. Freeform imaging optical system design: theories, development, and applications [J]. Acta Optica Sinica, 2021, 41(1): 0108001.
- 杨通, 段璎哲, 程德文, 等. 自由曲面成像光学系统设计: 理论、发展与应用 [J]. 光学学报, 2021, 41

- (1): 0108001.
- [4] Wei S L, Zhu Z B, Fan Z C, et al. Multi-surface catadioptric freeform lens design for ultra-efficient off-axis road illumination[J]. *Optics Express*, 2019, 27(12): A779-A789.
- [5] Zhu Z B, Ma D L, Hu Q M, et al. Catadioptric freeform optical system design for LED off-axis road illumination applications[J]. *Optics Express*, 2018, 26(2): A54-A65.
- [6] Feng Z X, Froese B D, Liang R G, et al. Simplified freeform optics design for complicated laser beam shaping[J]. *Applied Optics*, 2017, 56(33): 9308-9314.
- [7] Zhu R H, Sun Y, Shen H. Progress and prospect of optical freeform surface measurement [J]. *Acta Optica Sinica*, 2021, 41(1): 0112001.  
朱日宏, 孙越, 沈华. 自由曲面成像光学系统设计: 理论、发展与应用 [J]. *光学学报*, 2021, 41(1): 0112001.
- [8] Zhang Q, Xue C X. Optimization of tool path generation for freeform surface by slow tool servo diamond turning [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2020, 57(5): 052203.  
张琦, 薛常喜. 自由曲面的慢刀伺服车削轨迹优化 [J]. *激光与光电子学进展*, 2020, 57(5): 052203.
- [9] Chen Y Q, Zhang X D, Liu X L. Evaluation of optical performance of free-form surface imaging system [J]. *Acta Optica Sinica*, 2020, 40(24): 2412002.  
陈玉强, 张效栋, 刘现磊. 自由曲面成像系统的光学性能评价 [J]. *光学学报*, 2020, 40(24): 2412002.
- [10] Fuerschbach K, Rolland J P, Thompson K P. A new family of optical systems employing  $\varphi$ -polynomial surfaces[J]. *Optics Express*, 2011, 19(22): 21919-21928.
- [11] Cheng D W, Wang Q F, Wang Y T, et al. Lightweight spatial-multiplexed dual focal-plane head-mounted display using two freeform prisms [J]. *Chinese Optics Letters*, 2013, 11(3): 031201.
- [12] Gu L, Cheng D W, Liu Y, et al. Design and fabrication of an off-axis four-mirror system for head-up displays [J]. *Applied Optics*, 2020, 59(16): 4893-4900.
- [13] Reimers J, Bauer A, Thompson K P, et al. Freeform spectrometer enabling increased compactness [J]. *Light: Science & Applications*, 2017, 6(7): e17026.
- [14] Zhou X R, Song H T, Zhu R H, et al. Compact off-axis two-mirror freeform telescopic optical system design with large relative aperture [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2020, 49(10): 1022002.  
周欣茹, 宋华堂, 朱润徽, 等. 结构紧凑型大相对孔径离轴两反自由曲面望远光学系统设计 [J]. *光子学报*, 2020, 49(10): 1022002.
- [15] Xie Y J, Mao X L, Li J P, et al. Optical design and fabrication of an all-aluminum unobscured two-mirror freeform imaging telescope [J]. *Applied Optics*, 2020, 59(3): 833-840.
- [16] Yang T, Jin G F, Zhu J. Automated design of freeform imaging systems [J]. *Light: Science & Applications*, 2017, 6(10): e17081.
- [17] Cao C, Liao S, Liao Z Y, et al. Design of off-axis reflective optical system with large field-of-view based on freeform surfaces [J]. *Acta Optica Sinica*, 2020, 40(8): 0808001.  
操超, 廖胜, 廖志远, 等. 基于自由曲面的大视场离轴反射光学系统设计 [J]. *光学学报*, 2020, 40(8): 0808001.
- [18] Yang T, Zhu J, Wu X F, et al. Direct design of freeform surfaces and freeform imaging systems with a point-by-point three-dimensional construction-iteration method [J]. *Optics Express*, 2015, 23(8): 10233-10246.
- [19] Zhu J, Wu X, Yang T, et al. Generating optical freeform surfaces considering both coordinates and normals of discrete data points [J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2014, 31(11): 2401-2408.