

## 基于傅里叶变换的 Gamma 因子快速自标定方法

孙丽君<sup>1,2,3</sup>, 黄志远<sup>1,2,3</sup>, 陈天飞<sup>1,2,3\*</sup><sup>1</sup>河南工业大学粮食信息处理与控制教育部重点实验室, 河南 郑州 450001;<sup>2</sup>河南工业大学郑州市机器感知与智能系统重点实验室, 河南 郑州 450001;<sup>3</sup>河南工业大学信息科学与工程学院, 河南 郑州 450001

**摘要** 为减少测量系统中由非线性响应引起的相位误差, 提出一种基于傅里叶变换的 Gamma 因子快速自标定方法。首先, 对捕获的光栅条纹进行傅里叶变换, 将图像由灰度值域转换到频率值域; 其次, 在频率值域找到畸变光栅条纹的高次谐波分量与基波分量, 通过优化函数在实数范围内搜索最佳预编码 Gamma 值, 使高次谐波分量与基波分量的功率比值最小, 完成测量系统的 Gamma 值自标定, 进而有效减小实际测量过程中的相位误差; 最后, 在标准平面及实际测量物体上对所提方法进行实验验证, 并与经典的相位误差校正算法进行对比。实验结果表明, 所提方法能极大地抑制 Gamma 非线性响应, 比已有相位误差校正方法更简单高效, 具有更高的测量精度和测量效率。

**关键词** 测量; 条纹投影轮廓术; 相位误差; Gamma 模型; 傅里叶变换

中图分类号 TP391.4

文献标志码 A

doi: 10.3788/AOS202141.2412002

## Fast Self-Calibration Method of Gamma Factor Based on Fourier Transform

Sun Lijun<sup>1,2,3</sup>, Huang Zhiyuan<sup>1,2,3</sup>, Chen Tianfei<sup>1,2,3\*</sup><sup>1</sup>Key Laboratory of Food Information Processing and Control of Ministry of Education, Henan University of Technology, Zhengzhou, Henan 450001, China;<sup>2</sup>Zhengzhou Key Laboratory of Machine Perception and Intelligent System, Henan University of Technology, Zhengzhou, Henan 450001, China;<sup>3</sup>College of Information Science and Engineering, Henan University of Technology, Zhengzhou, Henan 450001, China

**Abstract** To reduce the phase error caused by the nonlinear response in the measurement system, this paper proposed a fast self-calibration method of the Gamma factor based on the Fourier transform. In this method, Fourier transform of the captured grating fringes was performed to convert the image from the gray-scale domain to the frequency domain. Then, the high-order harmonic components and fundamental components of the distorted grating fringes were found in the frequency domain. The optimal pre-encoded Gamma value within the real number range was searched by an optimization function to minimize the power ratio of the high-order harmonic components to the fundamental components and complete the Gamma value self-calibration of the measurement system, which thereby effectively reduced the phase error in the actual measurement process. On standard planes and actual measurement objects, the method in this paper was verified by experiments and compared with classic phase-error

收稿日期: 2021-04-08; 修回日期: 2021-05-13; 录用日期: 2021-06-24

基金项目: 国家自然科学基金(61803146, 61973104)、河南省优秀青年科学基金(212300410036)、河南省高校科技创新人才支持计划(21HASTIT029)、河南省高等学校青年骨干教师培养计划(2019GGJS089)、河南省科技攻关项目(212102210169, 212102210086)、河南工业大学自科创新基金支持计划(2020ZKCJ06)、河南工业大学青年骨干教师培育计划(21420080)

通信作者: \*chen\_tianfei@163.com

correction algorithms. Experimental results prove that this method can suppress Gamma nonlinear response to a great extent. It is simpler and more efficient than existing phase-error correction methods and improves measurement accuracy and measurement efficiency.

**Key words** measurement; fringe projection profilometry; phase error; Gamma model; Fourier transform

**OCIS codes** 120.5050; 050.5080; 100.5070

## 1 引言

传统三维测量方法由于测量过程复杂、计算量大、精度较低,不能满足当前精密测量的需求。条纹投影相移轮廓术作为结构光投影三维测量的代表性方法,具有高效率、低成本、非接触、测量范围广等优点,被广泛应用于文物保护、医学诊断、工业检测、虚拟现实等领域<sup>[1-2]</sup>。条纹投影相移轮廓术的基本原理是:首先,利用计算机产生特定结构的光栅条纹图案,经过数字投影仪投射至被测物体表面;然后,采用 CCD 相机捕获经被测物体表面调制的形变条纹图像,使用标准  $N$  步相移算法解得相位主值图配合相位解包裹运算,得到被测物体的绝对相位图;最后,根据相位信息、数字投影仪与 CCD 相机之间的参数关系,计算出被测物体的三维信息<sup>[3-7]</sup>。

在条纹投影相位测量中,正弦光栅条纹以其独特优势成为使用频率最高的结构光栅。在测量过程中,由于系统噪声、相移偏差、数字投影仪和 CCD 相机非线性响应的影响,相位测量结果出现误差,严重影响三维测量精度。在光栅条纹投影测量系统中,通过图像预处理和数字相移可以消除系统噪声和相移偏差的影响。因此,数字投影仪和 CCD 相机的非线性响应应成为测量系统的主要误差源,这种非线性响应一般被称为 Gamma 畸变。为了降低测量系统的相位误差,国内外学者进行了深入研究并提出了多种相位误差校正方法<sup>[8-25]</sup>,主要分为被动相位误差校正法、主动相位误差校正法、逆向相位误差校正法三大类。

被动相位误差校正法不改变数字投影仪的输入条纹图案,而是通过不同的标定方法求出畸变条纹图像在相位值域的误差分布规律,如误差分布多项式、相位误差查找表<sup>[8-14]</sup>等。根据相位误差的分布规律,对相机捕获的畸变条纹图像进行相应的相位误差校正。例如 Xiong 等<sup>[8-10]</sup>提出利用捕获的条纹图案记录全场相位差值,得到整场的相位误差补偿曲线,建立相位误差补偿表对相位进行校正。Yatabe 等<sup>[11]</sup>利用多项式拟合技术得到输入输出条纹关系,进而对条纹图像进行补偿。Liu 等<sup>[12]</sup>利用条纹谐波方程推导出相位误差模型,只要获得模型

系数,即可补偿相位误差。吴蜀予等<sup>[13]</sup>通过对解得的相位值进行最小二乘单调光顺拟合来校正相位误差。被动相位误差校正方法在稳定的测量环境(环境光不随时间而变化)中可获得较好的校正效果,但当测量环境改变时,需要重新标定;当进行全场相位误差补偿时,需要标定出全部像素点的相位误差,标定过程复杂、费时。

主动相位误差校正法根据预先标定的系统非线性关系,通过直接改变数字投影仪的输入光栅条纹图案,得到高精度的正弦条纹图像<sup>[15-19]</sup>,经预编码的光栅条纹图案被相机捕获后仍能保持良好的正弦性。Hoang 等<sup>[15]</sup>使用标准三步和标准  $N(N>12)$  步相移算法标定出测量系统的最佳预编码 Gamma 值,将预编码后的正弦条纹图案投射至被测物体表面,经相机捕获后,不需要进行相位误差校正就能得到较高精度的相位值。李付谦等<sup>[16-17]</sup>建立了相位误差的分布模型,主动改变光栅条纹的编码来抑制非线性误差。与被动相位误差校正方法相比,主动相位误差校正方法受环境等因素的影响较小,主动相位误差校正法的测量效率高,但其误差校正效果与相位误差的标定精度有关,标定精度越高,捕获的预编码条纹越准确。

逆向相位误差校正法根据光栅条纹的相位误差分布规律,额外投射与原始条纹相位误差大小相等、方向相反的条纹图案,对两次相位测量结果取均值即可消除条纹图案的相位误差<sup>[20-24]</sup>。Huang 等<sup>[20]</sup>最早提出逆向相位误差校正方法。毛翠丽等<sup>[21]</sup>将倍频法与逆向相位误差校正法相结合,能在较大程度上抵消相位误差,但需要多投影一倍的条纹图案,导致测量效率降低。Cai 等<sup>[22]</sup>使用希尔伯特变换对捕获的光栅条纹进行处理,得到与原始条纹相位误差大小相等、方向相反的形变条纹,两者求和取平均后,得到高精度相位值,但是要求测量物体不能间断。逆向相位误差校正法的原理简单、易操作,且不受测量环境影响,但条纹图案数量的增多导致测量效率降低。

本文在频域范围内分析 Gamma 畸变中高次谐波对相位精度的影响,提出一种基于傅里叶变换的 Gamma 因子快速自标定方法。通过优化函

数在实数范围内搜索最佳预编码 Gamma 值,使频域内高次谐波分量与基波分量的功率比值最小,最大限度地抑制畸变光栅条纹的高次谐波分量,降低测量系统中 Gamma 畸变对相位的影响,提高测量精度。所提方法利用光栅条纹在平面上的投影特性,只需一幅畸变条纹图案即可完成测量系统的 Gamma 值自标定,不需要复杂的计算和额外的投射光栅条纹,操作简单,速度快。最后,通过计算机软件仿真和实际测量,验证了本文方法的有效性。

## 2 原理

### 2.1 相位测量原理

实际测量时投射的光栅条纹为计算机生成的标准正弦光栅条纹,投射的第  $N$  条标准正弦光栅条纹的数学表达式为

$$I_n(x, y) = a(x, y) + b(x, y)\cos[\varphi(x, y) + \delta_n], \quad (1)$$

式中:  $(x, y)$  为光栅条纹的像素坐标;  $I_n(x, y)$  表示第  $n$  幅光栅条纹图像的光强分布;  $a(x, y)$  为控制光栅条纹强度范围的背景光强,  $b(x, y)$  为调制幅度,且满足  $0 \leq a(x, y) + b(x, y) \leq 1$ , 使光栅条纹保持在良好的灰度响应范围内,避免出现过饱和现象;  $\delta_n = 2\pi n/N$  为第  $n$  条光栅条纹的初始相位,其中  $N$

为相移步数,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ ;  $\varphi(x, y)$  为目标物体的待求相位值,其求解公式<sup>[12]</sup>为

$$\varphi(x, y) = -\arctan \frac{\sum_{n=0}^{N-1} I_n(x, y) \sin \delta_n}{\sum_{n=0}^{N-1} I_n(x, y) \cos \delta_n}. \quad (2)$$

### 2.2 相位误差分析

相机采集光栅条纹图像的流程如图 1 所示。

随机噪声、相移误差、光栅条纹图像的离散化及光栅条纹图像的非正弦化会导致测量时产生相位误差。利用数字投影仪投射由计算机生成的标准光栅条纹,可避免产生相移误差;标准  $N$  步相移算法<sup>[7]</sup>能较大幅度地抑制随机噪声;在计算相位前,通过滤波等图像预处理方法来降低光栅图像中的随机误差;光栅条纹图像的离散化问题可通过预先设定合适的条纹周期、灰度范围来解决。但是,在由投影仪和相机构成的测量系统中,测量仪器间的 Gamma 畸变无法消除,导致数字投影仪和 CCD 相机之间的光传递函数不满足线性关系,相机捕获的光栅条纹产生畸变。由图 1 可知,假设光栅条纹投射在待测物体上的反射率为  $q(x, y)$ , 测量系统的环境光为  $d_1(x, y)$ , 经被测物体反射回来的光栅灰度分布为

$$I_n^o(x, y) = q(x, y)[I_n^p(x, y) + d_1(x, y)]. \quad (3)$$

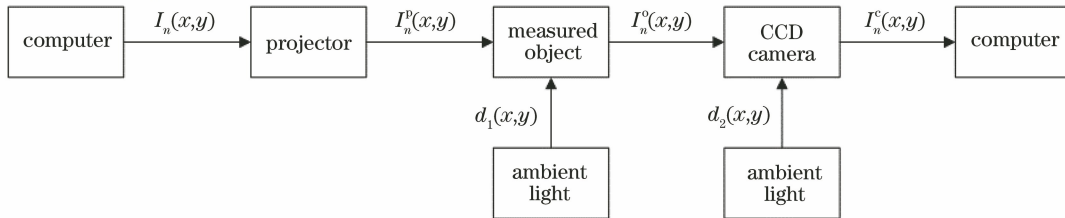


图 1 CCD 相机采集光栅条纹图像的流程

Fig. 1 Flow chart of CCD camera collecting grating fringe image

被测物体反射回来的光  $I_n^o(x, y)$  被 CCD 相机捕获,假设进入 CCD 相机内的环境光为  $d_2(x, y)$ , CCD 相机捕获的光栅条纹灰度分布为

$$I_n^c(x, y) = p_c\{[I_n^o(x, y) + d_2(x, y)]\}, \quad (4)$$

式中:  $p_c(\cdot)$  表示相机对输入光强的响应函数。

综上所述,相机和投影仪的 Gamma 非线性响应使得捕获的正弦光栅条纹发生畸变,改变了标准光栅条纹的光强分布。因此,CCD 相机捕获的非正弦光栅条纹图像  $I_n^c(x, y)$  可表示为

$$I_n^c(x, y) = h\{I_n(x, y)\} = h\{a(x, y) + b(x, y)\cos[\varphi(x, y) + \delta_n]\}, \quad (5)$$

式中:  $h(\cdot)$  为测量过程中的非线性映射关系。根

据(2)式和(5)式, CCD 相机实际捕获的相位信息  $\varphi'(x, y)$  可表示为

$$\varphi'(x, y) = -\arctan \frac{\sum_{n=0}^{N-1} I_n^c(x, y) \sin \delta_n}{\sum_{n=0}^{N-1} I_n^c(x, y) \cos \delta_n}. \quad (6)$$

由三角函数公式可知,

$$\tan \Delta\varphi(x, y) = \tan[\varphi'(x, y) - \varphi(x, y)], \quad (7)$$

则相位误差函数  $\Delta\varphi(x, y)$  可表示为

$$\Delta\varphi(x, y) = \arctan \left[ \frac{\tan \varphi'(x, y) - \tan \varphi(x, y)}{1 + \tan \varphi'(x, y) \tan \varphi(x, y)} \right]. \quad (8)$$

研究表明,光栅投影测量系统中的非线性响应可用 Gamma 模型<sup>[15]</sup>表示,联立(3)式和(4)式,相机捕获的光栅条纹  $I_n^c(x, y)$  可简化为

$$I_n^c(x, y) = [I_n(x, y)]^{\gamma_0}, \quad (9)$$

式中:  $\gamma_0$  为光栅条纹投影测量系统的 Gamma 畸变值。理想情况下  $\gamma_0 = 1$ , 输出条纹图案和输入条纹图案相同, 测量系统不存在相位误差; 在实际测量环

境中, 测量系统的  $\gamma_0 > 1$ , 导致理想正弦波发生畸变, 相位出现周期性误差<sup>[13, 25]</sup>。如图 2(a) 所示, 实线为理想正弦输入信号, 虚线为受到测量系统 Gamma 畸变影响时的输出信号; 解得的相位主值如图 2(b) 所示, 输入的理想相位主值单调增长, 畸变的输出相位主值呈现周期性变化; 模拟 Gamma 畸变产生的相位误差如图 2(c) 所示。

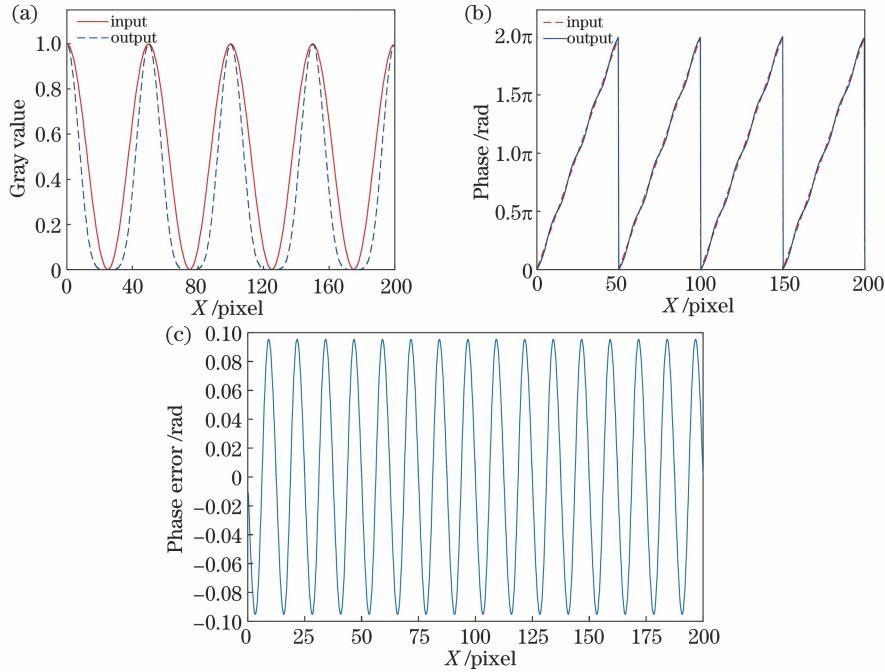


图 2 相位误差分析。(a)标准正弦输入和非正弦输出;(b)理想相位主值和实际输出相位主值;  
(c) Gamma 非线性引起的相位误差

Fig. 2 Phase error analysis results. (a) Standard sinusoidal input and non-sinusoidal output; (b) ideal phase main value and actual output phase main value; (c) phase error caused by Gamma nonlinearity

### 2.3 Gamma 预编码校正思想

光栅条纹投影测量系统中 Gamma 非线性畸变的大小是由整个测量系统决定的, (9) 式中  $\gamma_0$  为整个系统的 Gamma 畸变值。在不同的测量系统中, Gamma 畸变值各不相同, 通常情况下测量系统的 Gamma 畸变值  $\gamma_0$  在  $1 < \gamma_0 < 3$  范围内。因此, 如果在测量前已知测量系统的 Gamma 畸变值  $\gamma_0$ , 就可以在生成光栅条纹时加入一个合适的预编码值  $\gamma$ , 使得

$$\gamma \times \gamma_0 \approx 1, \quad (10)$$

预编码 Gamma 值与测量系统中的 Gamma 畸变值互为倒数。经预编码后, 相机捕获的光栅条纹图案灰度分布为

$$I_n^{c*}(x, y) = [I_n(x, y)^\gamma]^{\gamma_0}. \quad (11)$$

光栅条纹经预编码后, 在极大程度上抑制了测

量系统的 Gamma 非线性响应, 保证了光栅条纹的正弦性, 即使使用简单的  $N$  步相移算法也能获得较高的相位恢复精度。

当测量系统发生变化时, 测量系统的 Gamma 畸变值也发生变化。对测量系统的 Gamma 值标定需要大量的相移图像和复杂的计算过程, 通常采用 20 步相移算法求出准确的相位信息来完成测量系统的 Gamma 值标定。投射和处理大量光栅条纹图像的过程十分繁琐, 从而导致计算难度增大、处理时间延长。如何能够准确快速地标定出测量系统的 Gamma 值并对畸变光栅条纹图像进行相位误差校正, 这在高精度的三维测量中十分重要。因此, 本文提出一种简单高效的测量系统 Gamma 值自标定方法, 它能够快速准确地计算出校正测量系统 Gamma 畸变的光栅图像预编码值  $\gamma$ 。

### 3 Gamma 值标定方法

#### 3.1 基于傅里叶变换的失真校正准则

当光栅条纹投影在标准平面上,测量系统的 Gamma 非线性畸变会将标准的单一频率正弦波信号变成一个复杂的多频信号,使其在频率域产生具有无限长频谱宽度的高次谐波。为了更直观地分析误差,可将(5)式转变为

$$I_n^c(x, y) = \{a(x, y) + b(x, y) \cos[\varphi(x, y) + \delta_n]\}^{\gamma_0} + c_0, \quad (12)$$

式中: $c_0$  为测量系统的环境光响应; $\gamma_0$  为三维测量系统的 Gamma 畸变值。(12)式可简化为

$$I_n^c(x, y) = c_0 + a(x, y)^{\gamma_0} \left\{ 1 + \frac{b(x, y)}{a(x, y)} \cos[\varphi(x, y) + \delta_n] \right\}^{\gamma_0}. \quad (13)$$

根据二项式定理,二项式的幂次代数展开式为

$$(1+x)^t = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{t}{k} x^k. \quad (14)$$

根据三角函数的降幂公式将三角函数的幂次方转换为连续相位相加的线性组合:

$$\cos^k(x) = 0.5^k \sum_{m=0}^k \cos[(k-2m)x]. \quad (15)$$

将(14)、(15)式代入(13)式,可得:

$$I_n^c(x, y) = c_0 + 0.5^k a^{\gamma_0}(x, y) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \binom{\gamma_0}{k} \binom{k}{m} \times \cos\{(k-2m)[\varphi(x, y) + \delta_n]\}, \quad (16)$$

对(16)式化简后,畸变的光栅条纹图案  $I_n^c(x, y)$  可用  $k$  阶傅里叶级数表示为

$$I_n^c(x, y) = a_0(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k(x, y) \cos[k\varphi(x, y) + \delta_n]\}, \quad (17)$$

式中: $a_k(x, y) = 0.5^k a^{\gamma_0}(x, y) \sum_{m=0}^{\infty} a_{k,m}$ ;  $a_{k,m} = \binom{\gamma_0}{2m+k} \binom{2m+k}{m}$ 。显然,当  $k=1$  时,相机捕获的光栅条纹为理想正弦光栅条纹;当  $k \geq 2$  时,出现高次谐波分量,光栅条纹产生畸变。在(17)式中,当高次谐波分量的系数为 0 时,相机捕获的光栅条纹为无畸变的理想正弦光栅条纹。传统的相位误差校正方法首先在灰度值域中标定出测量系统的 Gamma 畸变值,然后对光栅条纹进行相应补偿以消除高次谐波的影响,但在灰度值域消除高次谐波并不容易,需要高精度的标定及复杂的计算。为了解决这一难

题,本研究将相机捕获的畸变光栅条纹由灰度值域转换到频率值域,通过最大限度地抑制频域中的高次谐波分量来降低测量系统中 Gamma 畸变对正弦光栅条纹的影响。简而言之,光栅条纹经过傅里叶变换后,通过最小化高频分量与基频分量的功率比值来完成相位误差校正。

#### 3.2 Gamma 因子自标定及相位误差校正

首先对相机捕获的畸变光栅条纹进行傅里叶变换,即

$$\mathcal{F}[I_n^c(\omega)] = \int_R I_n^c(x) \exp(-j2\pi\omega x) dx, \quad (18)$$

式中: $\omega \in \mathbf{R}$  为频率。计算机生成的标准单一频率条纹代表测量中需要的基频(低频)分量  $\Omega_{Low}$ ,引起畸变的高次谐波分量代表测量中要消除的高频分量  $\Omega_{High}$ ,为了减少高频分量对光栅条纹图像的影响,应当最大限度地降低高频分量在频率域中所占的比例。该比例的计算公式为

$$R(I_n^c) = \frac{\int_{\Omega_{High}} |\mathcal{F}[I_n^c(\omega)]|^2 d\omega}{\int_{\Omega_{Low}} |\mathcal{F}[I_n^c(\omega)]|^2 d\omega}, \quad (19)$$

式中: $\int_{\Omega_{High}} |\mathcal{F}[I_n^c(\omega)]|^2 d\omega$  为光栅图像中高频分量的功率值; $\int_{\Omega_{Low}} |\mathcal{F}[I_n^c(\omega)]|^2 d\omega$  为光栅图像中低频分量的功率值。高频功率值与低频功率值的大小取决于光栅条纹畸变的程度以及光栅条纹图像的大小。

需要注意的是,低频分量中不包含直流分量。在傅里叶变换前,可将捕获的条纹图像强度减去条纹图像的平均强度  $\bar{I}_n^c(x, y)$  得到去除直流分量,这是因为在光栅条纹图像中直流分量所占比例较大,它会降低高频分量在总功率中的占比,影响标定的准确性。 $\bar{I}_n^c(x, y)$  可表示为

$$\bar{I}_n^c(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} I_n^c(x, y) / N. \quad (20)$$

频率域高低功率比值准则提供了高次谐波分量与基波分量功率的近似比值,通过  $R(I_n^c)$  的值可判断测量系统的 Gamma 非线性畸变的程度。根据此准则,在实际测量中通过寻找一个映射关系  $f(I_n^c)$  使得  $R[f(I_n^c)]$  最小化,完成测量系统的 Gamma 非线性畸变补偿,使相位误差校正问题转变成寻找  $R(I_n^c)$  最小值的优化问题。

$$f^* \in \operatorname{argmin}_f R[f(I_n^c)], \quad (21)$$

式中: $f^*$  表示最优解。理想情况下, $f^*$  应等于(5)式中的  $h(\cdot)^{-1}$ ,此时引起条纹畸变的高次谐波系

数全部变为 0。与低通滤波不同,  $f^*$  并不影响客观相位  $\varphi(x, y)$ , 因为它是直接对灰度响应图像进行校正, 而不是在频率域操作。

(21)式中的高频分量与低频分量的比值  $R(I_n^c)$  能够通过简单的运算得到, 但  $f^*$  可能是一个多维空间上的非线性连续函数, 求解其最小值并不容易, 必须用一个有限参数集来表示优化函数, Gamma 模型恰好满足这个条件。此外, 与多变量优化相比, 单变量模型优化更加简单。

$$\gamma^* = \underset{\gamma_c}{\operatorname{argmin}} R \{ [I_n(x, y)]^{\gamma_c} \}^{\gamma_0}, \quad (22)$$

式中:  $\gamma_c$  为迭代的预编码 Gamma 值;  $\gamma^*$  为优化函数解得的测量系统最佳预编码值。

本研究使用 MATLAB 软件中的 `fminsearch` 函数来搜索测量系统的最佳 Gamma 预编码值。`fminsearch` 是一个用来求解多维无约束优化问题的函数, 采用 derivative-free 的方法自动搜索多变量无约束函数的最小值。函数从自定义的迭代初始值  $x_0$  开始, 以优化参数指定的结构去寻找目标函数的

最小值。

根据实验结果, 目标函数  $\gamma^*$  相对于测量系统的 Gamma 模型是一个凸函数, 使用快速傅里叶变换可以轻松求解出  $R(\cdot)$ , 只需几次迭代搜索就能找到测量系统的最佳预编码 Gamma 值  $\gamma^*$ , 完成测量系统的 Gamma 值自标定。同时, 频域中的谐波分布只需一幅畸变光栅条纹图像即可求得, 相较于需要多幅图像参与计算来标定测量系统 Gamma 值的方法, 该方法的测量效率得到较大提升。

## 4 实验验证及误差分析

### 4.1 计算机仿真验证

为了验证所提相位误差校正方法的可行性, 在计算机上进行仿真验证。考虑到在不同的测量系统中 Gamma 畸变程度不同, 模拟了三种测量系统, 这三种系统的 Gamma 畸变值  $\gamma_0$  分别为 0.6、1.5、2.1。相机捕获的光栅条纹如图 3 所示, 捕获条纹图案的灰度值变化曲线如图 4 所示。

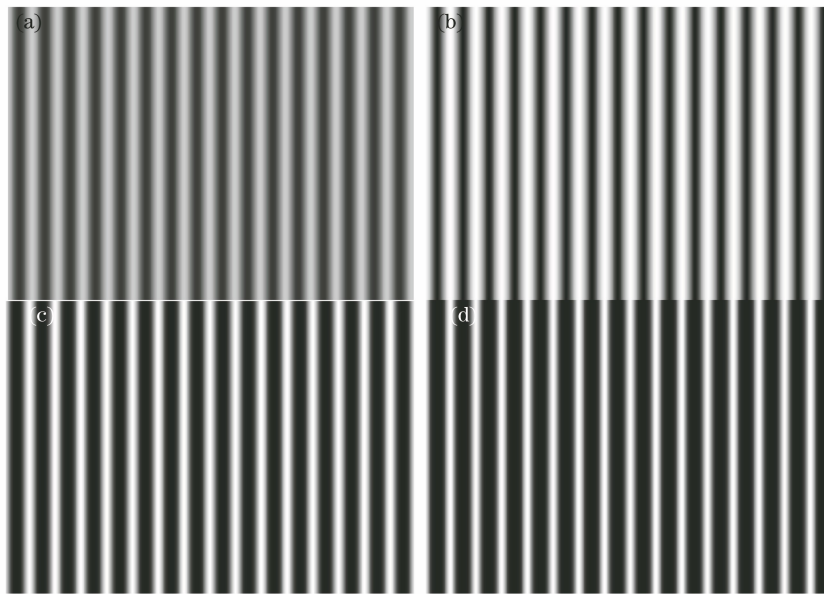


图 3 仿真 CCD 相机捕获的条纹图案。(a)标准正弦条纹  $\gamma_0=1$ ; (b)畸变条纹  $\gamma_0=0.6$ ;  
(c)畸变条纹  $\gamma_0=1.5$ ; (d)畸变条纹  $\gamma_0=2.1$

Fig. 3 Simulated fringe patterns captured by a CCD camera. (a) Standard sinusoidal fringe  $\gamma_0=1$ ;  
(b) distorted fringe  $\gamma_0=0.6$ ; (c) distorted fringe  $\gamma_0=1.5$ ; (d) distorted fringe  $\gamma_0=2.1$

首先对仿真 CCD 相机捕获的条纹图像进行傅里叶变换, 图像由灰度值域变换到频率值域。转换结果如图 5 所示。由图 5(a)可知, 理想情况下, 光栅条纹频谱图中非零成分只有基波。在图 5(b)~(d)中, 受到测量系统 Gamma 畸变的影响, 光栅图像在频率域中除了基波外, 还出现了若干高次谐波

分量, 正是这些高次谐波使得标准正弦光栅非正弦化, 严重影响三维测量精度。

根据(22)式, 在不考虑直流分量的情况下, 计算频率域中高次谐波与基波的功率比值, 使用 `fminsearch` 函数在实数范围内搜索最佳预编码 Gamma 值, 使得高频功率与低频功率的比值最小,

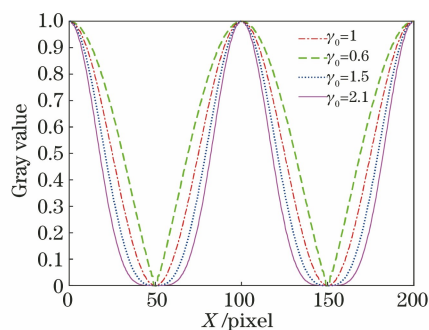


图 4 不同 Gamma 值条纹正弦性对比

Fig. 4 Comparison of the sine characteristics of fringes with different Gamma values

检索结果如图 6 所示。

图 6 中菱形标记点为优化函数搜索到的最佳 Gamma 预编码值,与模拟的 Gamma 畸变值成倒数

关系。由图 6 可知,在频率域可以通过最小化高次谐波与基波的功率比值来快速完成系统自标定,找到测量系统的最佳预编码 Gamma 值。考虑到实际测量过程中的噪声影响,在 Gamma 畸变  $\gamma_0 = 2.1$  的测量系统中加入均值为 0、标准差为 0.01 的高斯噪声,并重新搜索最佳预编码 Gamma 值,仿真结果如图 7 所示。由于噪声的影响,搜索的最佳预编码值略有改变,从图 6(c)中的 0.4760 变为 0.4604,但该方法仍然能够根据当前的测量环境搜索到最佳预编码值。

由图 8 所示的単行光栅条纹校正前、后的相位误差信息可得:在仿真条件下,测量系统引起的 Gamma 畸变经过本文算法校正后相位误差明显降低,仿真结果从理论上验证了本文算法的有效性与可行性。

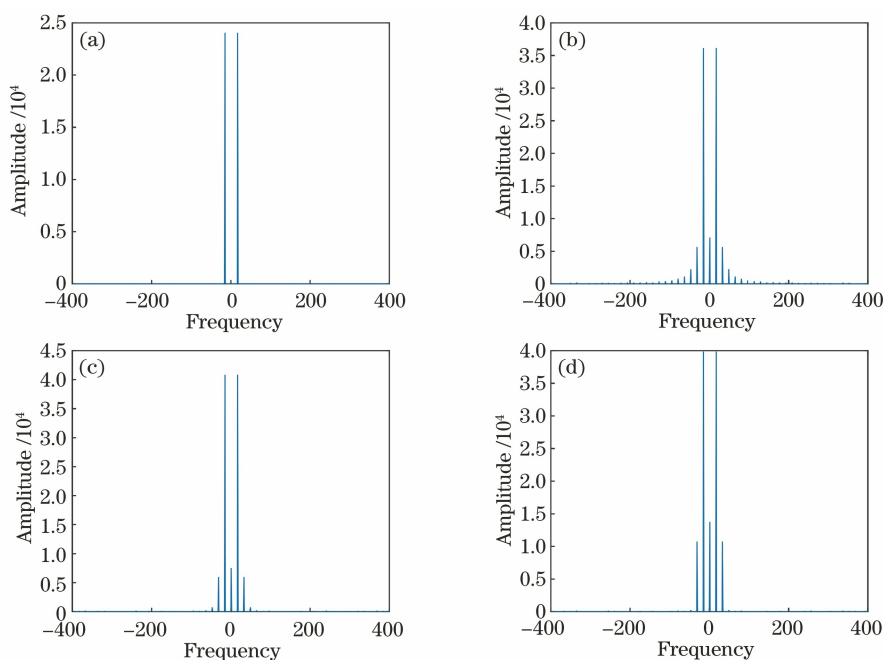


图 5 不同 Gamma 畸变下的第 300 行频谱图。(a)  $\gamma_0 = 1$ ; (b)  $\gamma_0 = 0.6$ ; (c)  $\gamma_0 = 1.5$ ; (d)  $\gamma_0 = 2.1$

Fig. 5 Spectrograms of the 300th line under different Gamma distortions. (a)  $\gamma_0 = 1$ ; (b)  $\gamma_0 = 0.6$ ; (c)  $\gamma_0 = 1.5$ ; (d)  $\gamma_0 = 2.1$

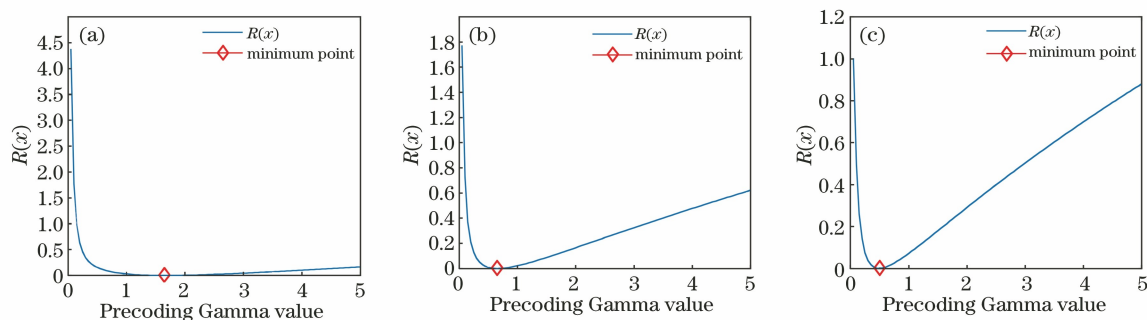


图 6 不同 Gamma 畸变下频域最低功率比值搜索曲线。(a)  $\gamma_0 = 0.6$ ; (b)  $\gamma_0 = 1.5$ ; (c)  $\gamma_0 = 2.1$

Fig. 6 The lowest power ratio search curves in the frequency domain under different Gamma distortions.

(a)  $\gamma_0 = 0.6$ ; (b)  $\gamma_0 = 1.5$ ; (c)  $\gamma_0 = 2.1$

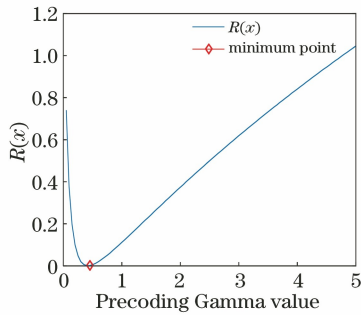


图 7  $\gamma_0=2.1$  的频域最低功率比值搜索曲线

Fig. 7 The lowest power ratio search curve in the frequency domain when  $\gamma_0=2.1$

为了更直观地体现畸变校正前、后光栅条纹的变化情况,对比了  $\gamma_0=2.1$  的测量系统校正前、后单行光栅条纹曲线及相位误差曲线,如图 8 所示。

#### 4.2 实际测量及误差分析

为了验证本文算法在实际测量中的校正效果,搭建一个数字光栅投影测量系统进行实际测量。

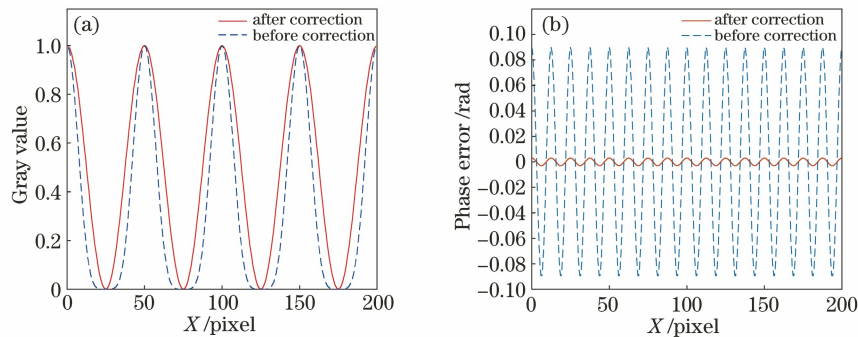


图 8 单行条纹校正前后对比。(a)灰度对比;(b)相位误差对比

Fig. 8 Comparison before and after single-line fringe correction. (a) Gray scale comparison; (b) phase error comparison

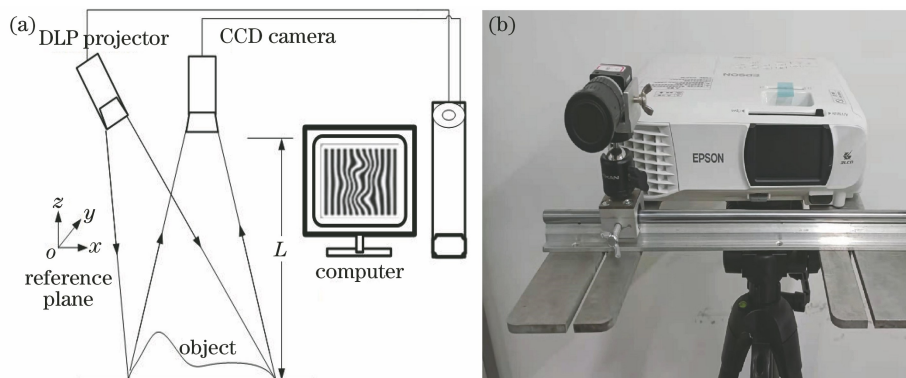


图 9 光栅条纹投影测量系统。(a)测量系统结构图;(b)实际测量设备

Fig. 9 Grating fringe projection measurement system. (a) Structure diagram of the measurement system; (b) actual measurement equipment

在上述实验环境中,利用 CCD 相机捕获的原始光栅条纹如图 10(a)所示;对捕获的光栅条纹进行傅里叶变换,将条纹图像转换到频率域,使用

图 9(a)为测量系统结构图,该测量系统由数字投影仪 (EPSON CH-TW610)、CCD 相机 (GUPPY PRO GPF 201C IPC)以及相应的计算机组成。实际测量装置如图 9(b)所示,测量平面距投影仪约为 100 cm,投影仪光心与 CCD 相机光心的距离约为 25 cm,利用数字投影仪将计算机生成的标准光栅条纹投影到被测平面,将相机垂直于被测平面用于捕获返回的光栅条纹,并将捕获的光栅条纹传输到计算机中,经过相位解包裹后求得绝对相位。

对参考平面投射光栅条纹,根据最低功率比值方法完成 Gamma 值自标定,并根据标定结果对光栅条纹进行预编码。实验中使用四步相移法求得相位主值,再采用多频外差法进行相位展开,解得绝对相位值。在多频外差法中,三种光栅条纹图像的周期数  $T$  分别为 59、64 和 70,最终解得周期数  $T=1$  的绝对相位。

fminsearch 函数搜索测量系统最佳预编码 Gamma 值,图 10(b)所示为预编码校正后捕获的光栅条纹图像。



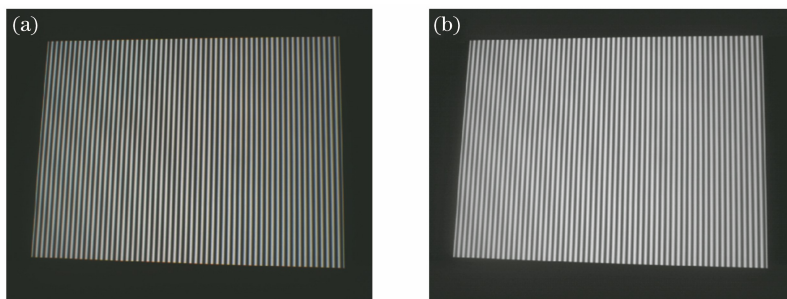


图 10 畸变光栅条纹校正前、后对比。(a)校正前捕获的光栅条纹;(b)校正后捕获的光栅条纹

Fig. 10 Comparison before and after the distortion grating fringe correction. (a) Captured grating fringes before correction; (b) captured grating fringes after correction

校正前的光栅条纹图像经傅里叶变换后,第 500 行频谱如图 11(a)所示。可以看到,受到测量系统 Gamma 畸变的影响,相机捕获的单一频率理想正弦光栅条纹在频率域中产生高次谐波,从而降低

了相位求解精度。经优化函数标定出测量系统的最佳预编码 Gamma 值,光栅条纹经校正后第 500 行频谱如图 11(b)所示,频率域中的高次谐波受到极大抑制,相位恢复精度明显提高。

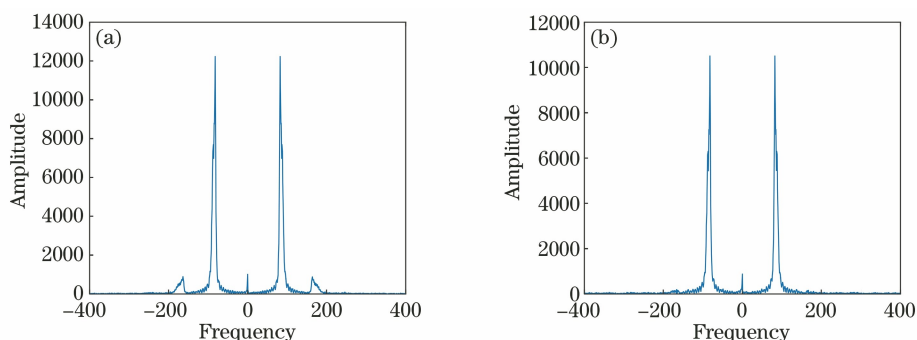


图 11 畸变光栅条纹校正前、后单行频谱。(a)校正前光栅条纹第 500 行频谱;(b)校正后光栅条纹第 500 行频谱

Fig. 11 Single-line spectrograms before and after the distortion grating fringe correction. (a) Spectrogram of the 500th line of grating fringes before correction; (b) spectrogram of the 500th line of grating fringes after correction

对同一测量平面采用最小二乘单调光顺算法<sup>[13]</sup>、双四步相移算法<sup>[23]</sup>与本文算法进行相位误差对比分析。将二十步相移算法解得的相位值作为理想相位值<sup>[15]</sup>,实际测量的条纹相位值与理想条纹相位值相减得到相位误差。对比不同算法补偿后的单行相位误差,相位误差最大值及标准差如表 1 所示,

单行相位误差对比如图 12 所示。由表 1 和图 12 可知:与最小二乘单调光顺算法相比,本文算法的标准差减少了 18.86%;与双四步相位校正法相比,本文算法的标准差减少了 10.08%;相对于传统 Gamma 畸变补偿方法,本文方法校正后相位精度更高。表 2 给出 3 种算法的运行时间,相较于最小二乘单调光顺算

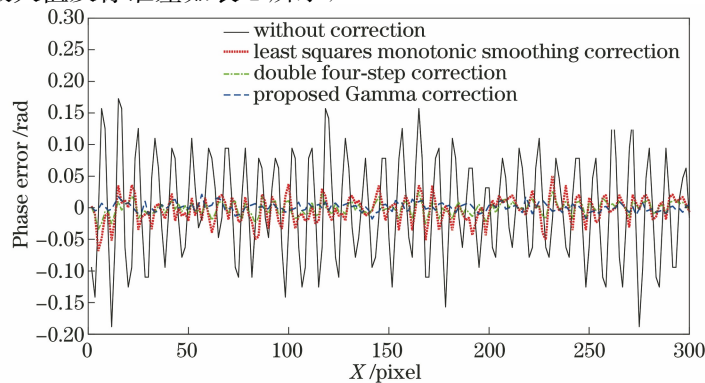


图 12 不同相位校正方法下第 500 行相位误差

Fig. 12 Phase error of the 500th line under different phase correction methods

法与双四步相移算法,本文方法所需的相位校正处理时间明显缩短,测量效率显著提高。

表 1 标准平面上利用不同方法校正后的相位误差

Table 1 Phase error corrected by different methods on the standard plane

Method	Maximum phase error /rad	Standard deviation of phase error /rad
Without correction	0.1882	0.1129
Least squares monotonic smoothing	0.0628	0.0310
Double four-step	0.0341	0.0211
Proposed method	0.0245	0.0097

表 2 不同校正方法的运行时间

Table 2 Running time of different correction methods

Method	Running time /s
Least squares monotonic smoothing	10.1646
Double four-step	76.2850
Proposed method	2.1610

图 13(a)为未进行相位误差校正的绝对相位图,图 13(b)为经本文方法相位误差校正后的绝对相位图。可以看到:未进行校正的绝对相位图存在明显的周期性误差,严重影响相位恢复精度;经本文方法校正后,相位误差明显减小,测量精度显著提高。

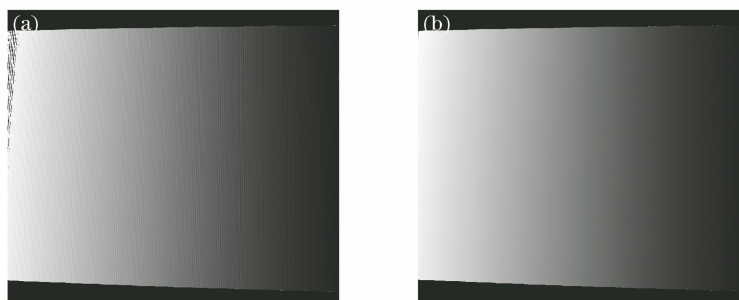


图 13 相位误差校正前、后的绝对相位图。(a)校正前;(b)校正后

Fig. 13 Absolute phase maps before and after phase error correction. (a) Before correction; (b) after correction

下面以一件花瓶石膏像为验证对象,图 14(a)所示为测量对象,图 14(b)为未进行相位误差校正

时得到的绝对相位图,图 14(c)所示为经单调光顺算法校正后的绝对相位值,图 14(d)所示为使用双

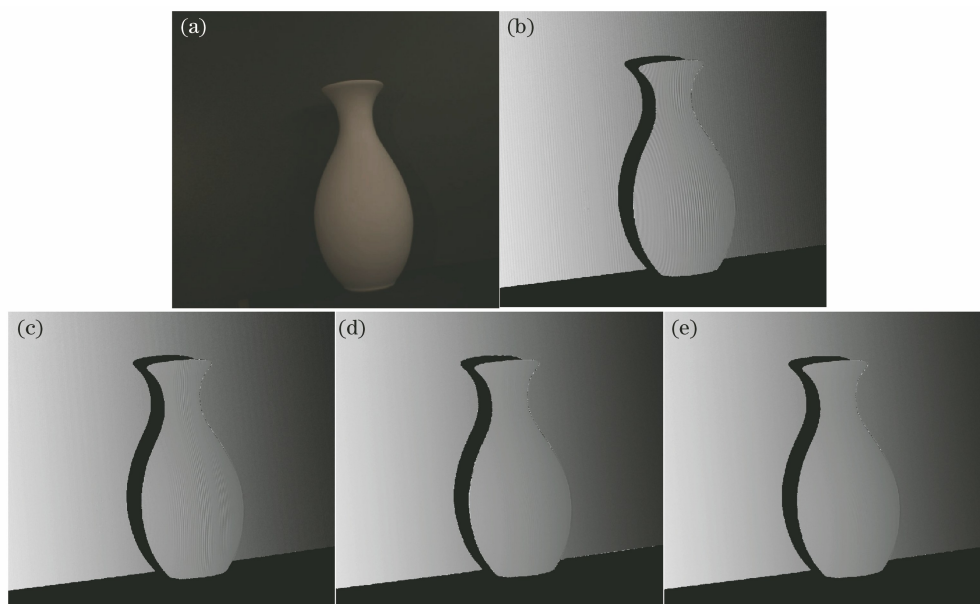


图 14 花瓶石膏像的绝对相位恢复。(a)测量对象;(b)未校正的绝对相位;(c)单调光顺法校正后绝对相位;(d)双四步算法校正后绝对相位;(e)所提方法校正后绝对相位

Fig. 14 Absolute phase restoration of plaster vase. (a) Measuring object; (b) uncorrected absolute phase; (c) absolute phase after monotonic smoothing correction; (d) absolute phase after double four-step correction; (e) absolute phase after correction by the proposed method

四步算法校正后的绝对相位值,图 14(e)所示为使用所提方法得到的绝对相位值。

在不同方法校正后的花瓶石膏像绝对相位图中选取同一行频谱进行相位误差分析,结果如图 15 所示,相位误差最大值及标准差如表 3 所示。由上述实

验结果可知:未对光栅条纹进行校正时,解得的相位图有较大相位误差;用所提方法对光栅条纹进行预编码后,求解出的绝对相位图更平滑,细节恢复得更清楚,相位误差更小,相位恢复结果得到较大改善,与对比算法相比,本文方法效果最佳且运行速度快。

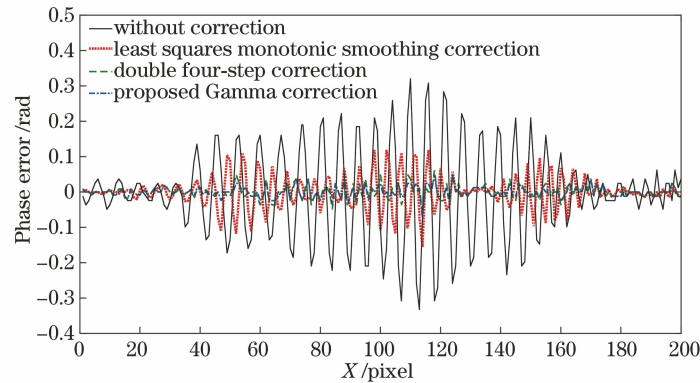


图 15 不同校正方法下花瓶石膏像的绝对相位误差

Fig. 15 Absolute phase error of plaster vase under different correction methods

表 3 不同校正方法下花瓶石膏像的相位误差

Table 3 Phase error of plaster vase under different correction methods

Method	Maximum phase error /rad	Standard deviation of phase error /rad
Without correction	0.3325	0.1279
Least squares monotonic smoothing	0.1552	0.0478
Double four-step	0.0739	0.0289
Proposed method	0.0593	0.0164

## 5 结 论

针对光栅条纹投影测量系统中的相位误差问题,对测量系统的非线性响应进行了详细分析。测量系统的 Gamma 畸变是因为标准光栅条纹在测量过程中产生了高次谐波,导致解包裹后出现周期性相位误差,影响测量精度。因此,本文提出一种基于傅里叶变换的 Gamma 因子快速自标定方法,通过对捕获的光栅条纹进行频谱分析,使用优化函数搜索最佳预编码 Gamma 值,最小化频率域中的高次谐波分量,完成测量系统的 Gamma 值自标定,并对光栅条纹进行预编码处理,最大限度地降低高次谐波对解相位的影响。通过仿真实验与实际测量证明了所提方法的有效性。所提方法只需一幅光栅图像即可完成系统 Gamma 值自标定,不需要复杂的计算和额外投射光栅。相对于传统相位误差校正算法,所提方法更加简单高效,减小了相位误差,提高

了测量精度,且具有较强的实用性。

## 参 考 文 献

- [1] Zhang S, Yau S T. High-resolution, real-time 3D absolute coordinate measurement based on a phase-shifting method[J]. Optics Express, 2006, 14(7): 2644-2649.
- [2] Lei H, Chang X Y, Wang F, et al. A novel algorithm based on histogram processing of reliability for two-dimensional phase unwrapping [J]. Optik, 2015, 126(18): 1640-1644.
- [3] Ke F K, Xie J M, Chen Y P. A flexible and high precision calibration method for the structured light vision system[J]. Optik, 2016, 127(1): 310-314.
- [4] Da F P, Gai S Y. Grating projection 3D precision measurement [M]. Beijing: Science Press, 2011: 154-174.  
达飞鹏, 盖绍彦. 光栅投影三维精密测量[M]. 北京: 科学出版社, 2011: 154-174.
- [5] Gorthi S S, Rastogi P. Fringe projection techniques: whither we are? [J]. Optics and Lasers in Engineering, 2010, 48(2): 133-140.
- [6] Jiang C F, Bell T, Zhang S. High dynamic range real-time 3D shape measurement [J]. Optics Express, 2016, 24(7): 7337-7346.
- [7] Surrel Y. Design of algorithms for phase measurements by the use of phase stepping [J]. Applied Optics, 1996, 35(1): 51-60.
- [8] Xiong C, Yao J, Chen J B, et al. A convenient look-up-table based method for the compensation of non-linear error in digital fringe projection[J]. Theoretical

- and Applied Mechanics Letters, 2016, 6(1): 49-53.
- [9] Cai W J, Cao Y P, Fu G K, et al. A full-field compensation method for nonlinear phase error [J]. Acta Optica Sinica, 2019, 39(3): 0312001.  
蔡文娟, 曹益平, 付光凯, 等. 一种非线性相位误差的全场补偿方法 [J]. 光学学报, 2019, 39(3): 0312001.
- [10] Zhang C W, Zhao H, Zhang L, et al. Full-field phase error detection and compensation method for digital phase-shifting fringe projection profilometry [J]. Measurement Science and Technology, 2015, 26(3): 035201.
- [11] Yatabe K, Ishikawa K, Oikawa Y. Compensation of fringe distortion for phase-shifting three-dimensional shape measurement by inverse map estimation [J]. Applied Optics, 2016, 55(22): 6017-6024.
- [12] Liu K, Wang Y C, Lau D L, et al. Gamma model and its analysis for phase measuring profilometry [J]. Journal of the Optical Society of America A, 2010, 27(3): 553-562.
- [13] Wu S Y, Yang Y M, Zhong Z Y, et al. Phase error correction algorithm for grating projection measurement system [J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(7): 0712005.  
吴蜀予, 杨宜民, 钟震宇, 等. 光栅投影测量系统中的相位误差校正算法 [J]. 光学学报, 2014, 34(7): 0712005.
- [14] Nakayama S, Toba H, Fujiwara N, et al. Enhanced Fourier-transform method for high-density fringe analysis by iterative spectrum narrowing [J]. Applied Optics, 2020, 59(29): 9159-9164.
- [15] Hoang T, Pan B, Nguyen D, et al. Generic gamma correction for accuracy enhancement in fringe-projection profilometry [J]. Optics Letters, 2010, 35(12): 1992-1994.
- [16] Li F Q, Chen W J. Phase error analysis and correction for phase shifting profilometry using crossed grating [J]. Acta Optica Sinica, 2021, 41(14): 1412002.  
李付谦, 陈文静. 正交光栅相移轮廓术的相位误差分  
析及其校正 [J]. 光学学报, 2021, 41(14): 1412002.
- [17] Pan B, Kemao Q, Huang L, et al. Phase error analysis and compensation for nonsinusoidal waveforms in phase-shifting digital fringe projection profilometry [J]. Optics Letters, 2009, 34(4): 416-418.
- [18] Xu Z X, Chan Y H. Removing harmonic distortion of measurements of a defocusing three-step phase-shifting digital fringe projection system [J]. Optics and Lasers in Engineering, 2017, 90: 139-145.
- [19] Wu G X, Wu Y X, Hu X L, et al. Exponential Taylor Series Method to eliminate the gamma distortion in phase shifting profilometry [J]. Optics Communications, 2019, 452: 306-312.
- [20] Huang P S, Hu Q J, Chiang F P. Double three-step phase-shifting algorithm [J]. Applied Optics, 2002, 41(22): 4503-4509.
- [21] Mao C L, Lu R S. Inverse error compensation method for improvement of phase recovery accuracy of multi-frequency fringe projection [J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38(4): 0412005.  
毛翠丽, 卢荣胜. 提高多频条纹投影相位提取精度的反向误差补偿法 [J]. 光学学报, 2018, 38(4): 0412005.
- [22] Cai Z W, Liu X L, Jiang H, et al. Flexible phase error compensation based on Hilbert transform in phase shifting profilometry [J]. Optics Express, 2015, 23(19): 25171-25181.
- [23] Zheng D L, Da F P. Gamma correction for two step phase shifting fringe projection profilometry [J]. Optik, 2013, 124(13): 1392-1397.
- [24] Wu M X, Fan N J, Wu G X, et al. An inverse error compensation method for color-fringe pattern profilometry [J]. Journal of Optics, 2020, 22(3): 035705.
- [25] Xing S, Guo H W. Correction of projector nonlinearity in multi-frequency phase-shifting fringe projection profilometry [J]. Optics Express, 2018, 26(13): 16277-16291.