

# 改进的椭圆拟合算法及振动传感相位解调

梅泽, 吕海飞, 文晓艳, 黎敏\*

武汉理工大学理学院, 湖北 武汉 430070

**摘要** 已有的椭圆拟合算法利用李萨如图形解决了非理想  $3 \times 3$  耦合器带来的解调结果误差问题, 但是当信号变弱时, 所对应的李萨如图形将偏离椭圆, 造成解调困难。针对相位变化量极小的弱信号, 基于同一系统中李萨如图形唯一的特点, 提出利用参考信号确定椭圆参数并精准实现弱信号解调的改进椭圆拟合算法。实验结果显示, 相较于常规椭圆拟合算法, 改进的算法可以准确地解调弱振动信号, 使探测分辨率提高 400 倍, 且解调的相位与应变存在良好的线性关系。研究结果表明改进的算法可以很好地解决常规椭圆拟合算法无法解调弱信号的问题, 提高了系统的测量分辨率。

**关键词** 测量; 相位解调; 非理想  $3 \times 3$  耦合器; 椭圆拟合算法; 弱信号探测; 振动传感

中图分类号 O436

文献标志码 A

doi: 10.3788/AOS202141.2412001

## Modified Ellipse Fitting Algorithm and Phase Demodulation of Vibration Sensing

Mei Ze, Lü Haifei, Wen Xiaoyan, Li Min\*

School of Science, Wuhan University of Technology, Wuhan, Hubei 430070, China

**Abstract** The existing ellipse fitting algorithm uses the Lissajous figure to solve the demodulation error caused by the non-ideal  $3 \times 3$  coupler. However, it is difficult to demodulate the signal when it is weak and the corresponding Lissajous figure deviates from the ellipse. This paper proposes a modified ellipse fitting algorithm on the basis of a fixed Lissajous figure for the same system. The algorithm uses the reference signal to determine ellipse parameters and thereby accurately demodulate the weak signal with small phase changes. The experimental results show that compared with the conventional ellipse fitting algorithm, the modified algorithm can accurately demodulate the signals with weak vibration. The detection resolution is increased by 400 times and the demodulated phase has a good linear relationship with the strain. The results prove that the modified algorithm solves the problem that the conventional ellipse fitting algorithm cannot demodulate weak signals and improves the measurement resolution of the system.

**Key words** measurement; phase demodulation; non-ideal  $3 \times 3$  coupler; ellipse fitting algorithm; weak signal detection; vibration sensing

**OCIS codes** 100.5070; 120.7280

### 1 引言

基于  $3 \times 3$  耦合器的解调算法是一种广泛应用于干涉相位解调的方法<sup>[1-5]</sup>, 但是  $3 \times 3$  耦合器的分光比和相位特性会受到输入光偏振态及外界环境的

影响(分光比不是理想的  $1:1:1$ 、相邻两路输出端口的相位差不等于  $2\pi/3$ , 即非理想  $3 \times 3$  耦合器), 因此, 需要解决基于理想  $3 \times 3$  耦合器解调时存在的问题。针对该问题, 中科院半导体研究所的何俊等<sup>[6]</sup>分析了光偏振态对  $3 \times 3$  耦合器相邻两路输出信号

收稿日期: 2021-04-29; 修回日期: 2021-06-03; 录用日期: 2021-06-21

基金项目: 国家自然科学基金(62075174, 11974266, 11704293)

通信作者: \*minli@whut.edu.cn

相位差的影响,得到相位差与理想值( $2\pi/3$ )的偏差在  $0.006\pi$  以内;美国海军研究实验室的 Todd 等<sup>[7]</sup>通过调校改进了反正切算法,消除了分光比和相位差不稳定对解调结果的影响;中科院声学研究所的 Liu 等<sup>[8]</sup>利用最小二乘法对每两路输出信号构成的李萨如图形进行椭圆拟合,反解出交直流项系数,进而求解出相位变化量。

改进的反正切算法虽然能够消除非理想  $3\times 3$  耦合器对解调结果的影响,但其运算复杂。而椭圆拟合算法可以直接利用两路输出信号进行解调,简单方便,因而得到广泛研究<sup>[9-12]</sup>。华中科技大学的 Fan 等<sup>[9]</sup>利用椭圆拟合算法解调了  $0.8\sim 250$  Hz 的声压信号。国防科技大学的 Xia 等<sup>[10]</sup>利用该算法实现了 EFPI(Extrinsic Fabry-Perot interferometer)的解调。中国船舶重工集团公司第七一五研究所的高晓文等<sup>[11]</sup>通过椭圆拟合算法有效降低了  $3\times 3$  耦合器分光比差异引起的信号畸变。西安工业大学的王伟等<sup>[12]</sup>利用双参数椭圆拟合算法实现了法布里-珀罗腔长的解调。但当两路信号所构成的李萨如图形偏离

椭圆时,解调结果存在很大误差,由此限制了该算法的弱信号解调能力。

本文针对弱信号的解调,深入分析非理想  $3\times 3$  耦合器对解调结果的影响,提出了改进的椭圆拟合算法。相比常规椭圆拟合算法,本文所提算法的信号解调分辨率提升 400 倍。本文算法在不引入额外器件的前提下,提高了系统的测量分辨率,具有良好的应用潜力。

## 2 改进的椭圆拟合算法与系统结构

基于  $3\times 3$  耦合器的迈克尔孙干涉仪结构如图 1 所示。它由环形器、 $3\times 3$  耦合器、压电陶瓷(PZT)和法拉第反射镜组成。光信号通过环形器 1-2 端口,首先经  $3\times 3$  耦合器的两臂分为 2 束光进入干涉仪,然后分别被法拉第反射镜反射后,在  $3\times 3$  耦合器重新会合并发生干涉,最终包含振动相位调制信息的光信号分别由 3 个光电探测器接收。引入法拉第反射镜的目的是消除偏振态对干涉信号的影响。

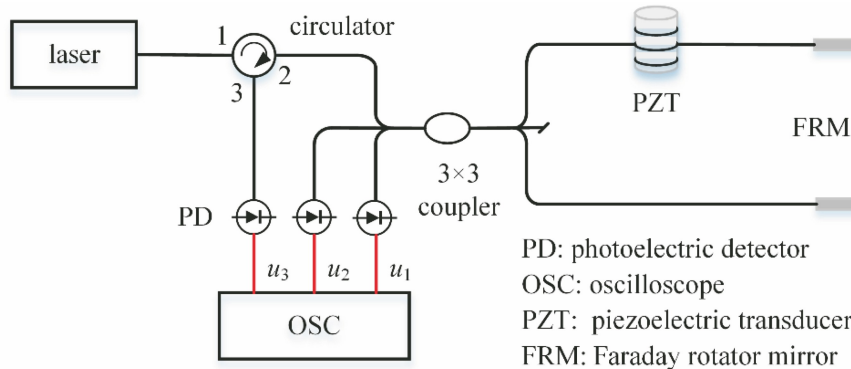


图 1 基于  $3\times 3$  耦合器解调的迈克尔孙干涉仪结构

Fig. 1 Structure of Michelson interferometer demodulated based on  $3\times 3$  coupler

### 2.1 非理想 $3\times 3$ 耦合器的相位解调误差与椭圆拟合算法

理想  $3\times 3$  耦合器的三路输出信号表达式可以表示为

$$u_n(t) = A + B \cos \left[ \varphi(t) + \varphi_0 + (n-1) \frac{2}{3} \pi \right], \quad n=1,2,3, \quad (1)$$

式中,  $\varphi_0$  为系统初始相位,  $\varphi(t)$  为外界信号作用下的相位变化量,  $n$  为输出端口的序号。图 2 绘制了基于  $3\times 3$  耦合器的解调原理图,其中  $A_n$  ( $n=1, 2, \dots, 7$ ) 为增益系数,通常取值为 1。

$3\times 3$  耦合器解调算法的基本思路是:首先消除三路信号的直流项,接着计算每路交流信号与其他两路交流信号微分差值的乘积之和( $N$ )、交流信号

的平方和( $D$ ),然后求解相位变化的微分信号( $N/D$ ),最后通过积分运算即可求解出外界信号作用下的相位信号。故输出相位信号表示为

$$V_{\text{out}} = \int \frac{N}{D} dt = \sqrt{3} \varphi(t). \quad (2)$$

实际的  $3\times 3$  耦合器是非理想耦合器,按照图 2 所示的流程解调将引入较大误差。为了不失一般性,将三路信号表达为

$$\begin{cases} u_1(t) = A_1 + B_1 \cos[\varphi(t) + \varphi_0] \\ u_2(t) = A_2 + B_2 \cos \left[ \varphi(t) + \varphi_0 + \frac{2\pi}{3} + \varphi_1 \right] \\ u_3(t) = A_3 + B_3 \cos \left[ \varphi(t) + \varphi_0 + \frac{4\pi}{3} + \varphi_2 \right] \end{cases} \quad (3)$$

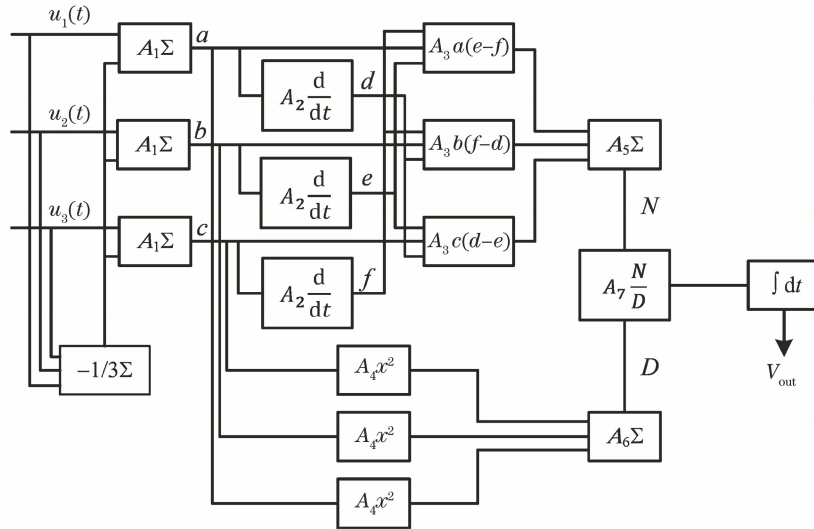


图 2 基于 3×3 耦合器解调原理

Fig. 2 Demodulation schematic based on 3×3 coupler

式中,  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  为非理想 3×3 耦合器引入的额外相位, 并且  $\varphi_1 \neq \varphi_2$ 。

通过实验选取  $A_1, A_2, A_3$  和  $B_1, B_2, B_3$  分别为 1.77、1.96、1.04、1.49、1.63、0.93,  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  分别为  $0.056\pi$  和  $0.111\pi$ , 对输入信号  $\varphi(t) = 1.2\cos(2000\pi t)$  进行仿真。设置系统采样频率为 100 kHz, 采样时间为 0.01 s, 最终得到的结果如图 3 所示。图 3(a) 为非理想 3×3 耦合器的三路输出信号, 图 3(b) 为解调信号的时域和频域图。

从图 3(a) 中可以看出, 各路输出信号之间仍保持一定的相位差, 但是并不相等, 这与上述公式所表示的结果一致。从图 3(b) 的时域图可以看出, 解调信号存在失真(虚圆圈标注的时域信号上下非对

称), 对应频域图中存在多种谐波分量; 这说明非理想 3×3 耦合器直接采用如图 2 所示的算法时, 相位解调的最终结果存在偏差。椭圆拟合算法为此提供了一种有效的解决方案。

由(3)式可知, 任意两路信号可构成椭圆曲线,  $u_1(t)$  和  $u_2(t)$  可表示为

$$\begin{cases} u_1(t) = A_1 + B_1 \cos[\phi(t)] \\ u_2(t) = A_2 + B_2 \cos[\phi(t) + \Delta\varphi] \end{cases} \quad (4)$$

式中,  $\phi(t) = \varphi(t) + \varphi_0, \Delta\varphi = 2\pi/3 + \varphi_1$ 。且  $u_1(t)$  和  $u_2(t)$  符合椭圆的一般方程, 即

$$u_1^2(t) + au_1(t)u_2(t) + bu_2^2(t) + cu_1(t) + du_2(t) + e = 0, \quad (5)$$

式中  $a, b, c, d, e$  均为方程系数。

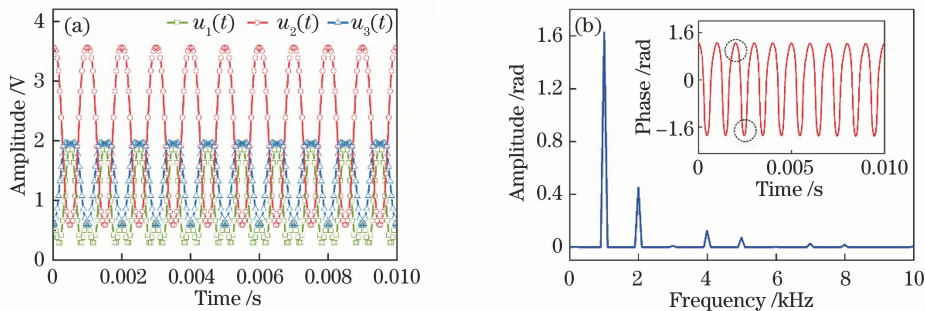


图 3 非理想 3×3 耦合器的仿真结果。(a) 三路输出信号; (b) 解调结果

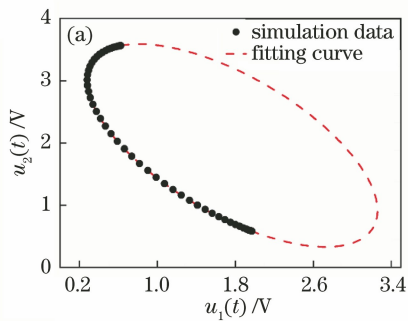
Fig. 3 Simulation results of non-ideal 3×3 coupler. (a) Output signal of three paths; (b) demodulation results

通过最小二乘法求解出两路信号构成的椭圆曲线方程之后, 根据椭圆曲线方程和各路信号之间的

关系求解(4)式中的各项系数  $A_1, A_2, B_1, B_2$ , 其满足

$$\begin{cases} A_2 = \frac{2d-ac}{a^2-4b} \\ A_1 = \frac{-2bA_2-d}{a} \\ B_1 = \sqrt{\left\{A_1^2\left(1-\frac{a^2}{4b}\right)+\left[A_2+\left(\frac{aA_1}{2b}\right)\right]^2b-e\right\}/\left(1-\frac{a^2}{4b}\right)} \\ B_2 = B_1/\sqrt{b} \\ \sin(\Delta\varphi) = \sqrt{1-\frac{a^2}{4b}} \end{cases} \quad (6)$$

从(6)式可以看出,  $A_1$  与  $A_2$ ,  $B_1$  与  $A_1$ 、 $B_2$  之间存在内在关系。  $A_2$ 、 $B_1$ 、 $B_2$  最终取决于  $A_1$ , 而



$A_1$  是通过求解实际测量信号(构成的李萨如图形)拟合的椭圆方程的系数得到的, 因此  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $B_1$ 、 $B_2$  需要根据测量信号取值, 不能任意取值。

取上述的  $u_1(t)$  和  $u_2(t)$  进行椭圆拟合算法研究, 得到的拟合椭圆与解调结果如图 4 所示。 分别以图 3(a)中的  $u_1(t)$  作  $x$  轴、 $u_2(t)$  作  $y$  轴, 绘制李萨如图形, 如图 4(a)中的圆点所示, 虚线是以仿真数据点拟合的椭圆。 从中可以看出, 仿真数据点均落在了拟合椭圆曲线上。 最终的解调结果如图 4(b)所示, 可知采用椭圆拟合算法能够很好地还原输入信号, 即有效地解决了由非理想  $3 \times 3$  耦合器带来的解调误差问题。

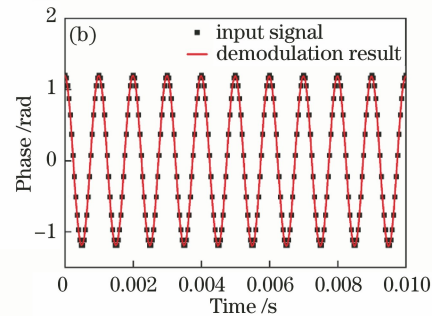


图 4 椭圆拟合算法的仿真结果。(a)李萨如图形;(b)解调结果

Fig. 4 Simulation results of ellipse fitting algorithm. (a) Lissajous figure; (b) demodulation results

### 2.2 椭圆拟合算法的缺陷及改进

表 1 给出了不同输入信号幅值下椭圆拟合算法的解调结果, 可以看出, 椭圆拟合算法的解调误差与输入信号幅值相关, 即解调误差随着输入信号幅值减小而增大。 这是因为输入信号幅值越小, 李萨如图形的形状越偏离椭圆, 这样基于椭圆拟合算法求解的各项参数就越不准确, 解调误差越大, 因此椭圆拟合算法对弱信号的探测能力有限。

表 1 不同幅值输入信号的椭圆拟合算法解调结果

Table 1 Demodulation results of input signals with different amplitudes by ellipse fitting algorithm

Input signal amplitude /rad	Demodulation signal amplitude /rad	Error /%
1.200	1.2003	0.025
0.600	0.6002	0.033
0.120	0.1255	4.6
0.012	0.0199	56

由上述分析可知, 李萨如图形由系统中的  $3 \times 3$  耦合器和输入光强来确定。 因此, 一旦  $3 \times 3$  耦合器和输入光强确定, 则(4)式对应的系数随之确定,

而输入信号幅值变化并不会改变该系数, 即同一系统中不同幅值输入信号的李萨如图形重合。 据此, 可以通过利用信噪比好的参考信号先确定系统的李萨如图形, 再进行弱信号的解调。

### 3 改进的椭圆拟合算法与振动传感实验

为验证所提改进椭圆拟合算法的有效性, 设计了一组由 PZT 模拟的振动传感验证实验。 实验光源采用超窄线宽激光器, 中心波长为 1550.12 nm, 圆筒形 PZT 的厚度为 3 mm, 缠绕的光纤长度为 10 m。

图 5 分别给出了由 PZT 模拟的振动(频率为 1 kHz, 对应应变为  $0.15 \mu\epsilon$ )信号采用  $3 \times 3$  耦合器直接解调算法(图 2)和椭圆拟合算法的解调结果。 从图中可以看出: 利用直接解调算法所得到的解调信号存在失真(虚圆圈标注的时域信号上下非对称); 而通过椭圆拟合算法解调得到的信号为良好的正弦函数, 即椭圆拟合算法可以克服非理想  $3 \times 3$  耦合器对解调结果的影响。

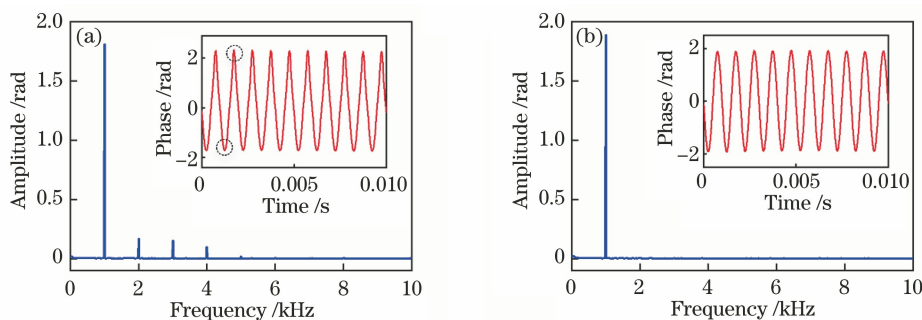


图 5 不同算法的解调结果。(a)  $3 \times 3$  耦合器解调算法;(b)椭圆拟合算法

Fig. 5 Demodulation results of different algorithms. (a)  $3 \times 3$  coupler demodulation algorithm; (b) ellipse fitting algorithm

图 6 给出了 PZT 应变分别为  $0.24 \mu\epsilon$  和  $0.045 \mu\epsilon$  时对应 1 kHz 振动信号的椭圆拟合算法解调结果。可以看出:应变为  $0.24 \mu\epsilon$  时,该算法可以很好地解调出相位,具有良好的单频正弦性;应变为  $0.045 \mu\epsilon$  时,椭圆拟合算法的解调结果出现失真

[见图 6(b)插图,虚圆圈标注的时域信号上下非对称],且含有高频噪声,不能准确地还原相位,其原因是此时两路信号构成的李萨如图形偏离椭圆,导致椭圆拟合不准确。

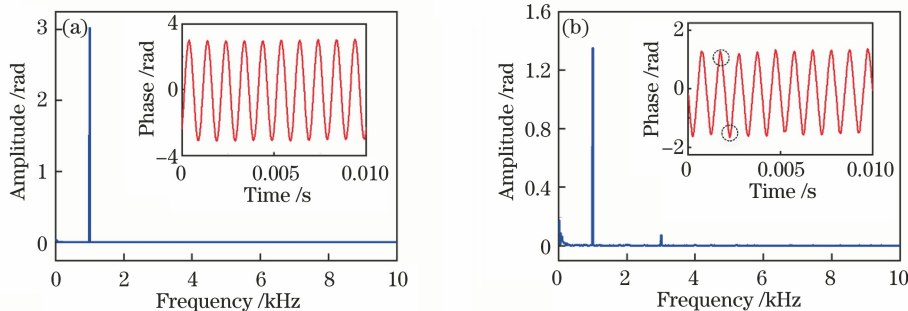


图 6 不同 PZT 应变的解调结果。(a)  $0.24 \mu\epsilon$ ;(b)  $0.045 \mu\epsilon$

Fig. 6 Demodulation results for different PZT strains. (a)  $0.24 \mu\epsilon$ ; (b)  $0.045 \mu\epsilon$

由 2.2 的理论分析可知, $3 \times 3$  耦合器和输入光强固定的干涉相位解调系统的李萨如图形唯一。图 7 给出了振动频率为 1 kHz, PZT 的应变分别为  $0.015 \mu\epsilon$ (倒三角)、 $0.038 \mu\epsilon$ (三角)、 $0.060 \mu\epsilon$ (菱形)和  $0.083 \mu\epsilon$ (方形)时,两路信号构成的李萨如图形与对应的拟合椭圆(虚线)。可以看出,各次测量的数据均落在同一椭圆上。因此,可以通过求解该系统的椭圆方程实现弱信号的解调。

通过上述分析,图 8 给出振动频率为 1 kHz 的条件下,改进前后的椭圆拟合算法的解调结果。将信号强度大于  $0.12 \mu\epsilon$  的信号定义为大信号,从图中可以看出,当 PZT 产生的应变大于  $0.12 \mu\epsilon$  时,改进前后椭圆拟合算法的解调结果一致,这说明本文提出的改进椭圆拟合算法也适用于大信号的解调。改进后的椭圆拟合算法在整个测量范围内

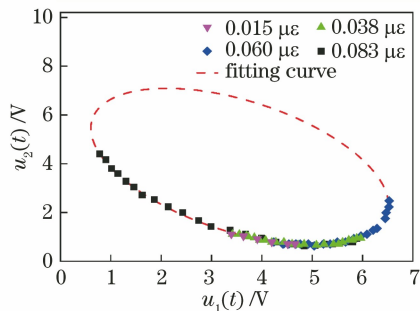


图 7 不同应变的李萨如图形和拟合椭圆

Fig. 7 Lissajous figure and fitting ellipse for different strains

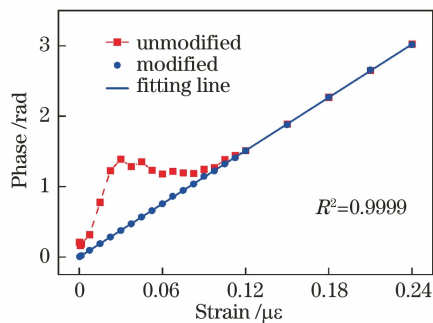


图 8 改进前和改进后椭圆拟合算法解调结果

Fig. 8 Demodulation results of unmodified and modified ellipse fitting algorithm

(0.0003~0.24  $\mu\epsilon$ )具有良好的线性度。当应变小于 0.12  $\mu\epsilon$  时,改进前后的椭圆拟合算法解调结果误差随着应变的减小呈现先增大后减小的趋势,这是因为随着应变的减小,椭圆拟合求解的参数误差先增大后减小。表 2 给出了由不同应变对应的常规椭圆拟合算法求解的参数及其相对误差  $E_{ri}$  ( $i=1, 2, 3, 4$ )。

表 2 不同应变对应的椭圆拟合算法参数

Table 2 Parameters of ellipse fitting algorithm for different strains

Parameter	$\epsilon_0 =$	$\epsilon_1 =$	$\epsilon_2 =$	$\epsilon_3 =$
	0.24 $\mu\epsilon$	0.090 $\mu\epsilon$	0.030 $\mu\epsilon$	0.015 $\mu\epsilon$
$A_2$	1.96	2.02	0.47	1.13
$A_1$	1.77	1.97	2.65	2.51
$B_1$	1.49	2.36	0.02	0.66
$B_2$	1.63	1.30	0.14	0.76
$E_{r1}$	—	0.03	0.76	0.42
$E_{r2}$	—	0.11	0.50	0.42
$E_{r3}$	—	0.58	0.97	0.56
$E_{r4}$	—	0.20	0.91	0.53

Note:  $E_{r1} = [A_2(\epsilon) - A_2(\epsilon_0)]/A_2(\epsilon_0)$ ;  $E_{r2} = [A_1(\epsilon) - A_1(\epsilon_0)]/A_1(\epsilon_0)$ ;  $E_{r3} = [B_1(\epsilon) - B_1(\epsilon_0)]/B_1(\epsilon_0)$ ;  $E_{r4} = [B_2(\epsilon) - B_2(\epsilon_0)]/B_2(\epsilon_0)$ .

## 4 结 论

研究了基于  $3 \times 3$  耦合器的相位解调算法和椭圆拟合算法,针对常规椭圆拟合算法无法解调两路信号构成的李萨如图形偏离椭圆的问题,提出了改进的椭圆拟合算法。光纤振动信号的解调实验结果验证了改进的椭圆拟合算法在弱信号解调中具有良好线性响应这一结论。该方法克服了常规椭圆拟合算法不能测量弱信号的缺点,提高了系统的测量分辨率。

## 参 考 文 献

- [1] Mao X, Huang J B, Gu H C. Demodulation technology of distributed feedback fiber laser sensor based on  $3 \times 3$  coupler [J]. Chinese Journal of Luminescence, 2017, 38(3): 395-401.  
毛欣, 黄俊斌, 顾宏灿. 采用  $3 \times 3$  耦合器的分布反馈式光纤激光传感器解调技术[J]. 发光学报, 2017, 38(3): 395-401.
- [2] Chen F F, Jiang Y, Jiang L.  $3 \times 3$  coupler based interferometric magnetic field sensor using a TbDyFe rod[J]. Applied Optics, 2015, 54(8): 2085-2090.
- [3] Qi B, Winder D E, Liu Y. Quadrature phase-shifted optical demodulator for low-coherence fiber-optic Fabry-Perot interferometric sensors [J]. Optics

Express, 2019, 27(5): 7319-7329.

- [4] Liu L, Lu P, Liao H, et al. Fiber-optic Michelson interferometric acoustic sensor based on a PP/PET diaphragm[J]. IEEE Sensors Journal, 2016, 16(9): 3054-3058.
- [5] Jing S Q, Huang L, Dong W H, et al. Positive and negative feedback judgment and high-frequency vibration detection by interferometer based on  $3 \times 3$  coupler [J]. Acta Optica Sinica, 2019, 39(7): 0712001.  
井帅奇, 黄磊, 董文辉, 等. 基于  $3 \times 3$  耦合器干涉仪的正负反馈判断及高频振动探测研究[J]. 光学学报, 2019, 39(7): 0712001.
- [6] He J, Xiao H, Feng L, et al. Analysis of phase characteristics of fiber Michelson interferometer based on a  $3 \times 3$  coupler [J]. Acta Optica Sinica, 2008, 28(10): 1867-1873.  
何俊, 肖浩, 冯磊, 等. 基于  $3 \times 3$  耦合器的迈克尔孙干涉仪相位特性分析[J]. 光学学报, 2008, 28(10): 1867-1873.
- [7] Todd M D, Seaver M, Bucholtz F. Improved, operationally-passive interferometric demodulation method using  $3 \times 3$  coupler [J]. Electronics Letters, 2002, 38(15): 784-786.
- [8] Liu T T, Cui J, Chen D S, et al. A new demodulation technique for optical fiber interferometric sensors with  $[3 \times 3]$  directional couplers [J]. Chinese Optics Letters, 2008, 6(1): 12-15.
- [9] Fan P J, Yan W, Lu P, et al. High sensitivity fiber-optic Michelson interferometric low-frequency acoustic sensor based on a gold diaphragm [J]. Optics Express, 2020, 28(17): 25238-25249.
- [10] Xia J, Xiong S D, Wang F Y, et al. Wavelength-switched phase interrogator for extrinsic Fabry-Perot interferometric sensors [J]. Optics Letters, 2016, 41(13): 3082-3085.
- [11] Gao X W, Zhang Z L, Ye B, et al. An improved demodulation algorithm of  $3 \times 3$  coupler for fiber optic hydrophone [J]. Acoustics and Electronics Engineering, 2019(3): 15-19.  
高晓文, 张自丽, 叶博, 等. 一种改进的光纤水听器  $3 \times 3$  耦合器解调算法 [J]. 声学与电子工程, 2019(3): 15-19.
- [12] Wang W, Tang Y, Zhang X X, et al. Elliptical-fitting cavity length demodulation algorithm for compound fiber-optic Fabry-Perot pressure sensor with short cavity [J]. Acta Optica Sinica, 2019, 39(6): 0606001.  
王伟, 唐瑛, 张雄星, 等. 短腔长复合式光纤法布里-珀罗压力传感器椭圆拟合腔长解调算法 [J]. 光学学报, 2019, 39(6): 0606001.