

基于快速迭代有限差分强度传输方程的相位恢复

张雅彬¹, 陈贤瑞¹, 刘磊^{1**}, 刘彬¹, 钟志^{1,2}, 单明广^{1,2*}

¹哈尔滨工程大学信息与通信工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150001;

²哈尔滨工程大学先进船舶通信与信息技术工业和信息化部重点实验室, 黑龙江 哈尔滨 150001

摘要 强度传输方程(TIE)是用于非干涉相位恢复的重要手段之一。传统方法受限于输入图像的形状或收敛速度,进而限制了 TIE 的普遍性和相位恢复效率。因此,提出了一种基于快速迭代有限差分法(FIFDM)的 TIE 相位恢复方法。该方法在基于有限差分法(FDM)的 TIE 求解方法的基础上,考虑迭代过程中各点的相关性并引入松弛因子来实现相位恢复。仿真和实验结果表明,与离散余弦变换(DCT)法、FDM 相比,所提方法具有更快的恢复速度、更高的准确性和更强的抗噪性能。

关键词 测量; 相位恢复; 强度传输方程; 有限差分法; 快速迭代

中图分类号 O439

文献标志码 A

doi: 10.3788/AOS202141.2212004

Phase Retrieval Using Transport of Intensity Equation with Fast Iterative Finite Difference

Zhang Yabin¹, Chen Xianrui¹, Liu Lei^{1**}, Liu Bin¹, Zhong Zhi^{1,2}, Shan Mingguang^{1,2*}

¹College of Information and Communication Engineering, Harbin Engineering University, Harbin, Heilongjiang 150001, China;

²Key Laboratory of Advanced Marine Communication and Information Technology, Ministry of Industry and Information Technology, Harbin Engineering University, Harbin, Heilongjiang 150001, China

Abstract Transport of intensity equation (TIE) is one of the important methods for non-interferometric phase retrieval. Traditional methods are restricted by the shape of the input image or the convergence speed, which limits the universality and phase recovery efficiency of TIE. Therefore, a TIE phase retrieval method based on fast iterative finite difference method (FIFDM) is proposed. On the basis of the TIE solution method based on the finite difference method (FDM), the correlation of each point in the iterative process is considered and the relaxation factor is introduced in FIFDM to realize the phase retrieval. Simulation and experimental results show that, compared with discrete cosine transform (DCT) method and FDM, the proposed method has faster recovery speed, higher accuracy and stronger anti-noise performance.

Key words measurement; phase retrieval; transport of intensity equation; finite difference method; fast iteration

OCIS codes 120.5050; 200.4740; 110.1758

1 引言

相位信息是诸多领域中不可或缺的信息,如光学测量、电子和 X 射线显微、衍射成像^[1-3]等。人眼

或光电探测器只能识别物体强度的变化而无法直接识别相位的变化,故无法判断相位物体的厚度或折射率的变化。因此,相位恢复在上述领域中显得尤为重要,是定量相位成像研究的重要课题之一。纵

收稿日期: 2021-01-28; 修回日期: 2021-03-16; 录用日期: 2021-06-03

基金项目: 国家自然科学基金(62175048)、黑龙江省自然科学基金(LC2018027)、中央高校基本科研业务费(3072021CFJ0801, 3072021CF0803)

通信作者: *smgsir@gmail.com; **liulei2015@hrbeu.edu.cn

观目前的定量相位成像技术,大致可以分为两类,即干涉法^[4-6]和非干涉法^[7-8]。其中,干涉法经过数十年的发展已日趋成熟,形成了如电子散斑干涉^[9]、数字全息^[10-12]等分支。由于干涉法是基于干涉原理的,故干涉法不仅对光源等质量要求较高,还需要复杂的干涉装置,同时对测量环境的要求也较为苛刻。然而,非干涉法是利用直接测量的强度信息来实现相位恢复的,进而具有结构简单、适应性强等特点。

强度传输方程(TIE)是非干涉相位恢复中最具代表性的方法之一,由 Teague^[13]利用傍轴近似条件下的亥姆霍兹方程推导而出,可利用格林方程法^[7, 14]、泽尔尼克多项式法^[15]、快速傅里叶变换(FFT)法^[16-18]、多重网格法^[19]等对其进行求解。在诸多求解方法中,FFT法具有无需迭代、算法实现简单、速度快、恢复效果良好的优点,从而被广泛使用。但是,FFT法中假设有限信号是周期性的且是重复的,而在实际中这种假设并不是普遍成立的^[18, 20]。为此,有学者提出对图像进行镜像填充,以满足周期性边界条件^[21-22],但是这类方法未在物理上获得证明,故在相位恢复方面的应用仍受到一定的限制。之后,针对FFT法的边界伪影问题,Zuo等^[23-24]利用离散余弦变换(DCT)法来求解TIE,实现了复杂边界条件下的高质量快速相位恢复。因此,DCT法引起了广泛关注,并衍生出了多种技术^[25-27]。然而,为了将诺伊曼格林函数分解为傅里叶余弦谐波的叠加,DCT法需假设输入图像为正方形。虽然在增加软边界(孔径)约束条件后,DCT法可适用于矩形输入图像,但是依然对矩形图像的尺寸有严格的限制,故无法满足实际工程中输入图像尺寸不同的需求。2018年,Zhang等^[28]提出利用有限差分法(FDM)来实现TIE的数值求解。与FFT法相比,FDM法的限定条件相对较宽松,故在重建简单物体时能够达到较高的精度。此外,FDM法能够较好地适应不同的边界条件,从而拥有较好的延拓性,能够处理不同尺寸的矩形输入图像。但是,在FDM法中每个像素点是独立迭代更新的,未考虑相邻两次迭代相位变化的影响。因此,利用FDM法处理较为复杂的物体或尺寸较大的图像时,存在迭代收敛速度缓慢、相位恢复结果出现畸变的问题,从而该方法目前处理的图像尺寸均较小,仅为64 pixel×64 pixel。

纵观目前的研究成果,TIE数值求解方法的普适性、准确性和有效性,很大程度上由限制性的预处理、假设和预先信息等保证,并依赖于边界条件的严

苛性、输入图像的形状等。但是,上述限定条件在实际中是难以同时严格满足的。因此,本文关注的是在对输入图像的形状以及边界条件上进行适当兼容,使TIE求解在相对FDM有较大速度提升的前提下,提高其相位恢复结果的准确度并能够具有较强的普适性。

本文从分析FDM的数学模型着手,通过利用迭代过程各点的相关性并引入松弛因子,建立了快速迭代有限差分法(FIFDM)的数学模型,实现了矩形输入图像复杂相位的快速高精度重建。此外,将利用所提方法得到的相位恢复结果与DCT、FDM的相位恢复结果进行了比较。

2 基本原理

当平面波光束透过相位不均匀的物体时,光束的波前会产生变化,在某些区域波前会发生会聚或者发散现象,从而导致光强在传输过程中产生变化。Teague在傍轴条件下对亥姆霍兹方程进行推导,建立了相干光束纵向强度变化与相位之间的定量关系,得到了TIE,即

$$\nabla \cdot (I \cdot \nabla \varphi) = -k \frac{\partial I}{\partial z}, \quad (1)$$

式中: I 是聚焦面的强度分布; φ 是获得的物体相位分布; k 是波数,且 $k=2\pi/\lambda$, λ 是入射光束的波长; $\partial I/\partial z$ 是强度图在 z 轴上的导数。(1)式中的 $\partial I/\partial z$ 可利用两幅轻微离焦的相邻强度分布的微分近似形式表示为

$$\frac{\partial I}{\partial z} \approx \frac{I(+\Delta z) - I(-\Delta z)}{2\Delta z}, \quad (2)$$

式中: Δz 为离焦距离; $I(+\Delta z)$ 与 $I(-\Delta z)$ 分别表示后焦面与前焦面的强度分布。本文中的实验对象为相位物体,其光场强度分布是均匀的,进而(1)式可以简化为

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{k}{I} \left[\frac{I(+\Delta z) - I(-\Delta z)}{2\Delta z} \right], \quad (3)$$

式中: ∇^2 为拉普拉斯算子,其表达式为

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}. \quad (4)$$

将(4)式表示成离散形式,即在 x 和 y 方向上分别对 φ 进行二阶有限差分近似

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{\Delta y^2} \end{cases}, \quad (5)$$

式中: $\varphi_{i,j}$ 表示网格点 (i, j) 处的相位信息,其中 i 、

j 分别表示 x 和 y 方向的网格坐标; Δx 和 Δy 分别表示 x 和 y 方向上的差分间隔。由此可见,在实际实验中,强度图像中单个像素的尺寸会影响差分的效果。将(5)式代入(3)式可以得到

$$\frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{\Delta y^2} \approx -k \left[\frac{I(+\Delta z) - I(-\Delta z)}{2\Delta z} \right]. \quad (6)$$

鉴于电荷耦合器件(CCD)等图像传感器的单个像素形状均为方形,令 $\Delta x = \Delta y = h$,将(6)式变形为 FDM 的迭代求解表达式

$$\varphi_{i,j}^{(n+1)} \approx \frac{1}{4} \cdot \left\{ h^2 \cdot k \left[\frac{I(+\Delta z) - I(-\Delta z)}{2\Delta z} \right] + \varphi_{i+1,j}^{(n)} + \varphi_{i-1,j}^{(n)} + \varphi_{i,j+1}^{(n)} + \varphi_{i,j-1}^{(n)} \right\}, \quad (7)$$

式中: $\varphi_{i,j}^{(n+1)}$ 的上标为 (i,j) 点处的迭代次数; $n=0, 1, 2, \dots$ 。

在传统 FDM 中,当前点每一次的迭代结果都只与上一次相邻点的迭代结果相关,而不是将每一次得到的结果在所有点遍历结束后再更新,这造成该方法的恢复结果精度不高且收敛速度缓慢,甚至会发生无法收敛的情况。从(7)式中可以看出,每一点处每一次的迭代结果都是与周围点相关的,进而可以利用这一相关性,将每一次迭代的结果进行全域更新以加快收敛速度。此外,每一点处每一次的迭代结果与上一次的迭代结果也是具有相关性的。因此,可通过引入松弛因子 ω ,并联系上一次该点的迭代结果,调整本次的迭代结果,实现收敛速度的进一步加快。基于上述思想,调整(7)式的表达形式,可得到所提 FIFDM 的数学模型表达式

$$\varphi_{i,j}^{(n+1)} \approx \frac{1}{4-\omega} \cdot \left\{ h^2 \cdot k \left[\frac{I(+\Delta z) - I(-\Delta z)}{2\Delta z} \right] + \varphi_{i+1,j}^{(n)} + \varphi_{i-1,j}^{(n+1)} + \varphi_{i,j+1}^{(n)} + \varphi_{i,j-1}^{(n+1)} - \omega \cdot \varphi_{i,j}^{(n)} \right\}. \quad (8)$$

从上述过程中可以看出,所提 FIFDM 衍生自 FDM,采用逐点运算方式,从而能够较好地适应不同的边界条件,且不受图像尺寸和形状的影响。此外,与 FDM 相比,所提 FIFDM 是将每个像素点的迭代更新延拓到整个像面,充分利用了像面各点的互相关性以及目标点的自相关性。此外,所提方法利用松弛因子对迭代结果进行修正,加快了收敛速度。在迭代过程中,将每一轮迭代结果与上一轮迭代结果进行比较,当两者误差值在给定的误差范围内或迭代次数达到预设值^[27]时,则认为本轮结果为

精确解,结束迭代并输出期望的相位恢复结果。

合理地利用每个点之间的相关性并选择合适松弛因子,可达到快速收敛的效果。然而,需要注意的是,只有在某些范围内,松弛因子才与求解速度和相位信息的恢复精度成正比。松弛因子受制于物体表面的相位梯度,当梯度过大时,相邻像素间的相关性会减小,此时松弛因子应取小值。当松弛因子过大时,会造成上一轮的迭代结果在新一轮的迭代结果中所占比重过大,进而影响到相位信息的恢复效果甚至会引起相位畸变。因此,松弛因子的取值范围一般为 $0 \sim 2$ 。

为了评价相位恢复质量,利用均方根误差(RMSE, φ_{RMSE})来衡量,其定义为

$$\varphi_{\text{RMSE}} = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \sqrt{\frac{[\varphi(m,n) - \varphi_r(m,n)]^2}{M \times N}}, \quad (9)$$

式中: φ 为原始相位; φ_r 为恢复相位; M 和 N 为输入图像的尺寸。RMSE 越小,相位恢复质量越好。

3 仿真验证与分析

为验证所提方法的有效性,利用计算机进行仿真验证。在仿真过程中,假设照明光源是波长为 572 nm 的平面波,图像探测器的像素尺寸为 $4.8 \mu\text{m} \times 4.8 \mu\text{m}$,待测物体均为相位物体,生成的聚焦图像的强度分布均匀。同时,利用角谱法^[29]生成两幅离焦图像,其强度分布分别为 $I(+\Delta z)$ 和 $I(-\Delta z)$,离焦距离 Δz 为 $10 \mu\text{m}$ 。为计算松弛因子,首先利用二分法^[30]确定松弛因子 ω 的取值域。然后,以 0.0005 步长搜索松弛因子 ω 的取值域,以确定 RMSE 最小时对应的 ω 值。最后,确定 ω 为 1.9885。当相邻迭代的相位误差绝对值的最大值小于 $1 \mu\text{rad}$ 时,认为迭代结果收敛,相位恢复过程结束。

在第一个仿真中,待测相位物体聚焦分布在正方形的像素网格平面上,所得图像大小为 $512 \text{ pixel} \times 512 \text{ pixel}$,由二维 peaks 函数生成所得,强度分布如图 1(a)所示,相位分布如图 1(b)所示。可以看出,强度分布中是无法获得物体相位信息的。在生成三幅强度图像(一幅聚焦、两幅离焦)后,利用所提 FIFDM 进行相位恢复,并与 DCT、FDM 的相位恢复结果进行比较,如图 2 所示。可以看出,三种方法均可重建出待测物体的相位,但是 DCT 和 FDM 的相位重建误差较大。DCT 的恢复结果不仅存在较大的偏差,还产生了残差平面漂移现象,这是图像尺寸较大且物体相对较复杂造成的。FDM 各

点未利用迭代过程中自身的相位梯度变化信息,在造成较大畸变的同时,产生了偏差和残差。虽然所提 FIFDM 的恢复结果在边界处残差较大,造成色标幅度跨度较大,但是其沿图像中心对称分布,且集

中于边界处非常狭窄部分,故不影响恢复质量。此外,主体部分残差的分布与物体的相位分布相关,没有出现分散或集中现象,且数值非常小,即 FIFDM 能够准确且无偏移地重建出待测物体的相位信息。

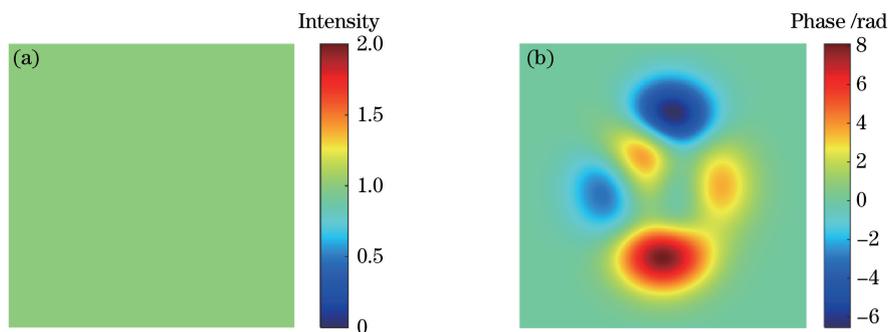


图 1 聚焦在正方形网格平面上的相位物体的强度分布和相位分布。(a)强度分布;(b)相位分布

Fig. 1 Intensity distribution and phase distribution of phase object focused on square grid plane.

(a) Intensity distribution; (b) phase distribution

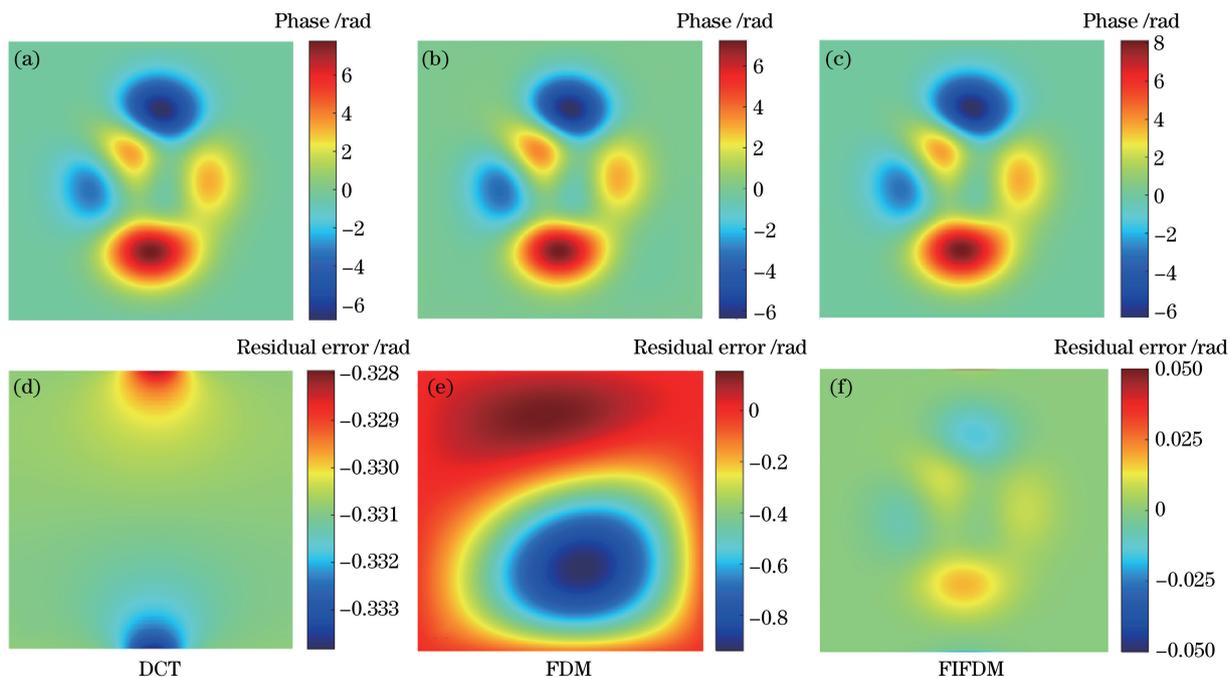


图 2 正方形输入图像的相位恢复结果。(a)~(c)相位分布;(d)~(f)残差分布

Fig. 2 Phase retrieval result of square input image. (a)~(c) Phase distribution; (d)~(f) residual error distribution

为了进一步揭示所提算法的优越性,利用 DCT、FDM、FIFDM 分别重建具有不同图像尺寸(128 pixel \times 128 pixel、256 pixel \times 256 pixel、512 pixel \times 512 pixel,分别记为 picture 1、picture 2、picture 3)的待测物体。图 3 展示了利用 DCT、FDM、FIFDM 对不同图像尺寸的待测物体进行相位恢复的计算时间与 RMSE。可以看出,与 DCT 相比,所提 FIFDM 的耗时略有增加。与 FDM 相

比,所提 FIFDM 的耗时明显缩减,即显著地提升了相位恢复速度。同时,与 DCT 和 FDM 相比,所提 FIFDM 的 RMSE 值极小,即显著提升了恢复质量。此外,随着图像尺寸的增大,所提 FIFDM 的 RMSE 值有减小趋势,出现该现象的原因是随着图像尺寸的增大,对于相同待测物体,像素间相位分布的相关性增强,抑制了恢复误差,算法稳定性得到了提升。因此,所提算法适用于较大尺寸相位图像的恢复。

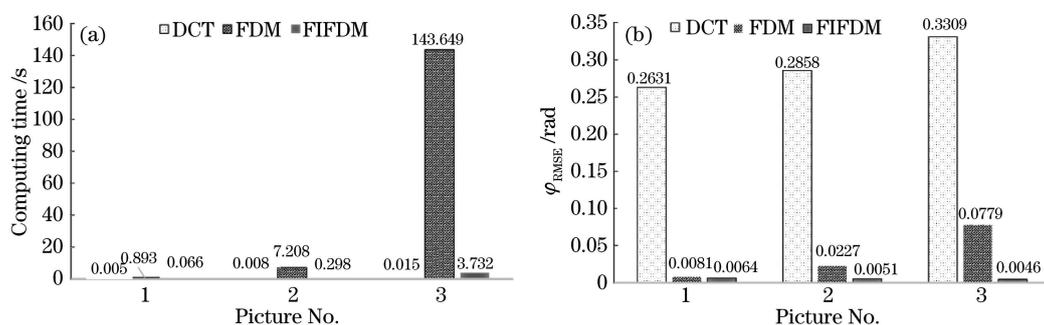


图 3 不同尺寸图像的相位恢复结果。(a)计算时间;(b) φ_{RMSE}

Fig. 3 Phase retrieval results of images with different sizes. (a) Computing time; (b) φ_{RMSE}

在第二个仿真中,待测相位物体聚焦分布在矩形的像素网格平面上,所得图像大小为 $480 \text{ pixel} \times 320 \text{ pixel}$,强度分布如图 4(a)所示,相位分布如图 4(b)所示。利用 DCT、FDM、FIFDM 恢复出的相位分布和残差图如图 5 所示,恢复相位的 RMSE 值分别为 9.6424×10^6 , 0.0452 , 0.0059 rad 。可以看出,对于矩形输入图像,DCT 的恢复结果中虽然保留了待测相位的形貌,但出

现了巨大的相位偏差和残差。此外,通过大量的仿真后发现,DCT 造成的偏差无规律可循,且无法有效消除,这就意味着在实际应用中,DCT 失效。FDM 可以较好地完成恢复工作,但恢复图像中仍存在较大的畸变、偏差和残差。所提 FIFDM 不仅可以很好地完成相位图像恢复,还具有较小的残差,且主要集中分布在边缘部分,这表明所提 FIFDM 具有较好的恢复质量和较强的普遍性。

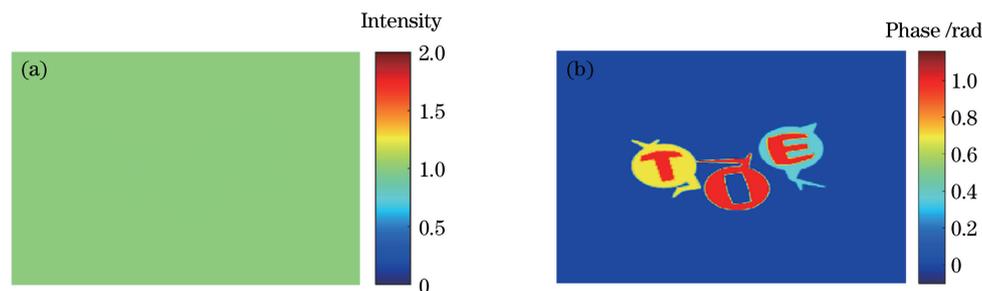


图 4 聚焦在矩形网格平面上的相位物体的强度分布和相位分布。(a)强度分布;(b)相位分布
Fig. 4 Intensity distribution and phase distribution of phase object focused on rectangular grid plane.

(a) Intensity distribution; (b) phase distribution

为了验证所提方法在噪声情况下的准确性和稳定性,在图 4 所示的相位物体中加入伪随机加性噪声,即

$$\varphi_{\text{noise}}(x, y) = \varphi(x, y) + \vartheta_{\text{random}}(x, y), \quad (10)$$

式中: $\varphi_{\text{noise}}(x, y)$ 为加入噪声后的相位分布; $\vartheta_{\text{random}}(x, y)$ 为伪随机加性噪声,取值范围为 $[-0.05 \text{ rad}, 0.05 \text{ rad}]$ 。利用 DCT、FDM、FIFDM 恢复出的相位分布和残差图如图 6 所示,恢复相位的 RMSE 值分别为 2.8489×10^7 , 0.0477 , 0.0166 rad 。可以看出,虽然三种方法均能保留待测相位的形貌,但是因为噪声的影响,三种方法的恢复质量均有所下降。DCT 的恢复结果中出现了严重的相位偏差和残差。FDM 的恢复结果中存在较大的畸变、偏差和残差。所提 FIFDM

的恢复结果中仅有较小的残差,且主要集中于边缘部分,从而证明了所提方法具有较高的准确性和较强的抗噪性能。

图 7 展示了噪声情况下不同离焦距离对恢复结果的影响,恢复相位的 RMSE 值分别为 0.0167 rad ($\Delta z = 10 \mu\text{m}$)和 0.0159 rad ($\Delta z = 500 \mu\text{m}$)。从图 7 (b1)、(b2)中可以看出,与 $\Delta z = 10 \mu\text{m}$ 的情况相比, $\Delta z = 500 \mu\text{m}$ 时的强度轴向导数已经出现了模糊,轮廓信息不再清晰明确。从 7(d1)、(d2)中可以发现,与文献[31]中的结果相同,选取 $\Delta z = 500 \mu\text{m}$ 时虽然可显著提升恢复结果的信噪比,但是会使得恢复结果的非线性误差增大,尤其是高频信息丢失严重,主要表现在边缘部分。因此,在实验中应合理选择离焦距离。

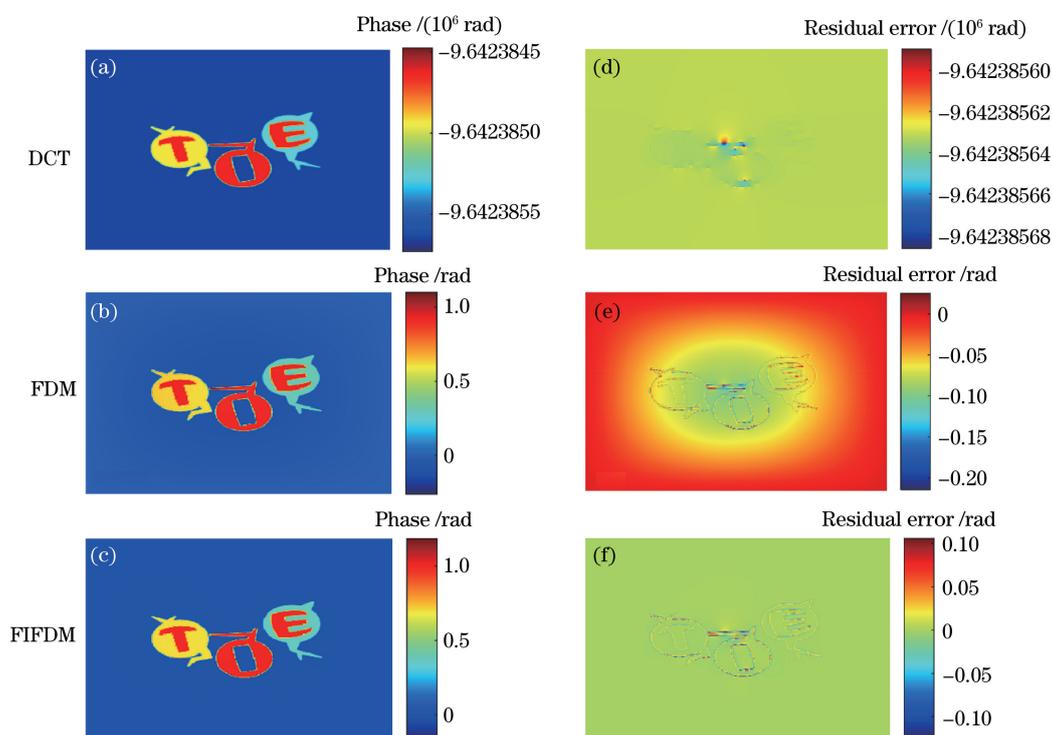


图 5 矩形输入图像的相位恢复结果。(a)~(c)相位分布;(d)~(f)残差分布

Fig. 5 Phase retrieval result of rectangular input image. (a)~(c) Phase distribution; (d)~(f) residual error distribution

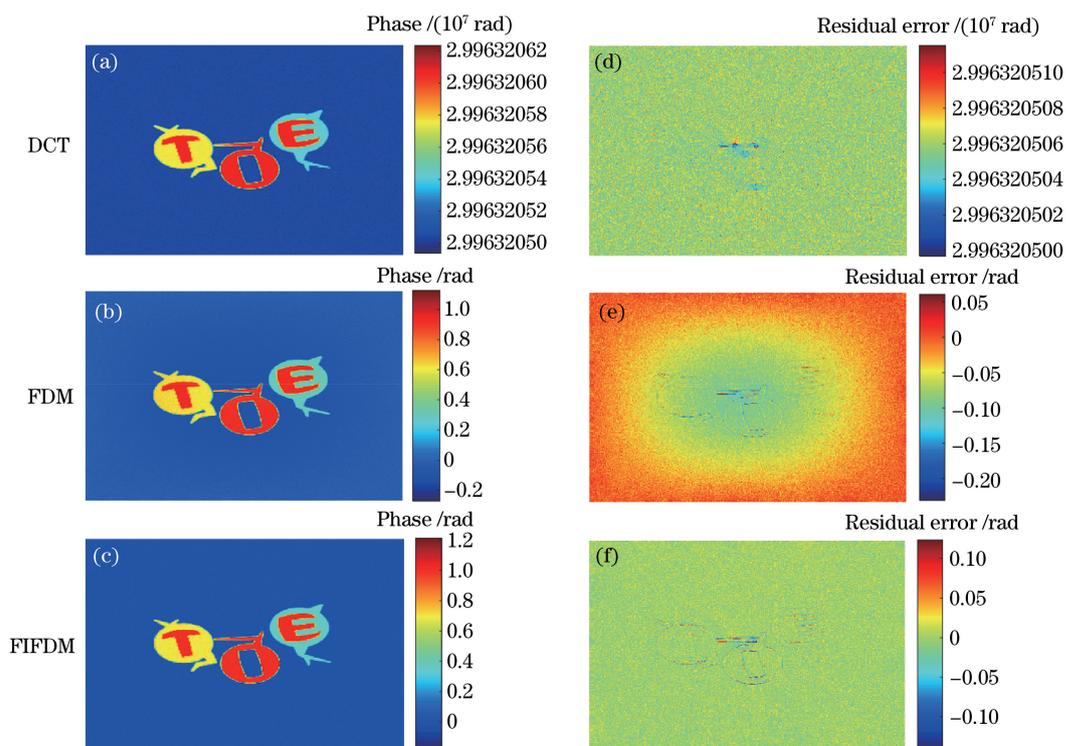


图 6 加噪图像的相位恢复结果。(a)~(c)相位分布;(d)~(f)残差分布

Fig. 6 Phase retrieval result of noisy image. (a)~(c) Phase distribution; (d)~(f) residual error distribution

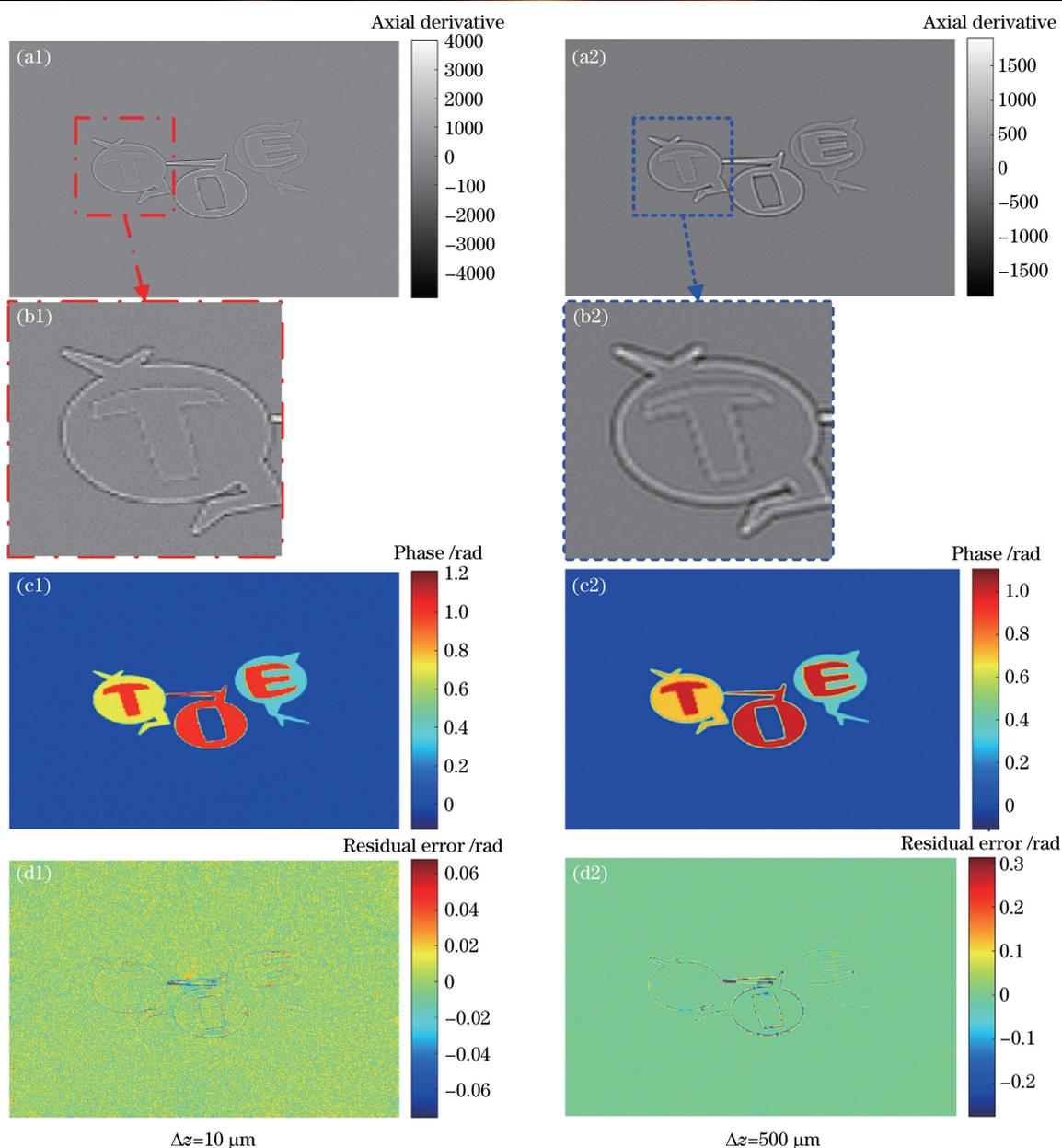


图 7 利用所提方法得到的在不同离焦距离下加噪图像的恢复结果。(a1)(a2)强度的轴向导数分布；(b1)(b2)图 7(a1)、(a2)中虚线框中区域的放大；(c1)(c2)相位恢复结果；(d1)(d2)残差分布

Fig. 7 Retrieval results of noisy images at different defocus distances obtained by proposed method. (a1)(a2) Axial derivative distribution of intensity. (b1)(b2) magnification of regions in dashed boxes in Figs. 7 (a1) and (a2); (c1)(c2) phase retrieval result; (d1) (d2) residual error distribution

4 实验结果与分析

为了进一步证明 FIFDM 的优越性,在上述仿真分析的基础上,利用实际实验进行验证。在实验过程中,选取显微物镜的放大倍数为 40,待测物为红细胞。

在第一个实验中,待测物体分布在正方形的像素网格平面上,所得图像大小为 $256 \text{ pixel} \times 256 \text{ pixel}$ 。不同离焦距离处采集到的强度图如图 8

(a)~(c)所示,DCT、FDM、FIFDM 的相位恢复结果如图 8(d)~(f)所示。可以看出,三种方法均能很好地实现相位恢复,但与 DCT 和 FDM 相比,所提 FIFDM 的恢复结果中边缘部分的细节更加丰富。

在第二个实验中,待测物体分布在矩形的像素网格平面上,得到的图像大小为 $256 \text{ pixel} \times 380 \text{ pixel}$ 。不同离焦距离处采集到的强度图如图 9 (a)~(c)所示,DCT、FDM、FIFDM 的相位恢复结

果如图 9(d)~(f)所示。可以看出,DCT 法已经失效,FDM 和 FIFDM 均能很好地实现相位恢复,但

由图 3 可知,与 FDM 相比,所提 FIFDM 的耗时更短。

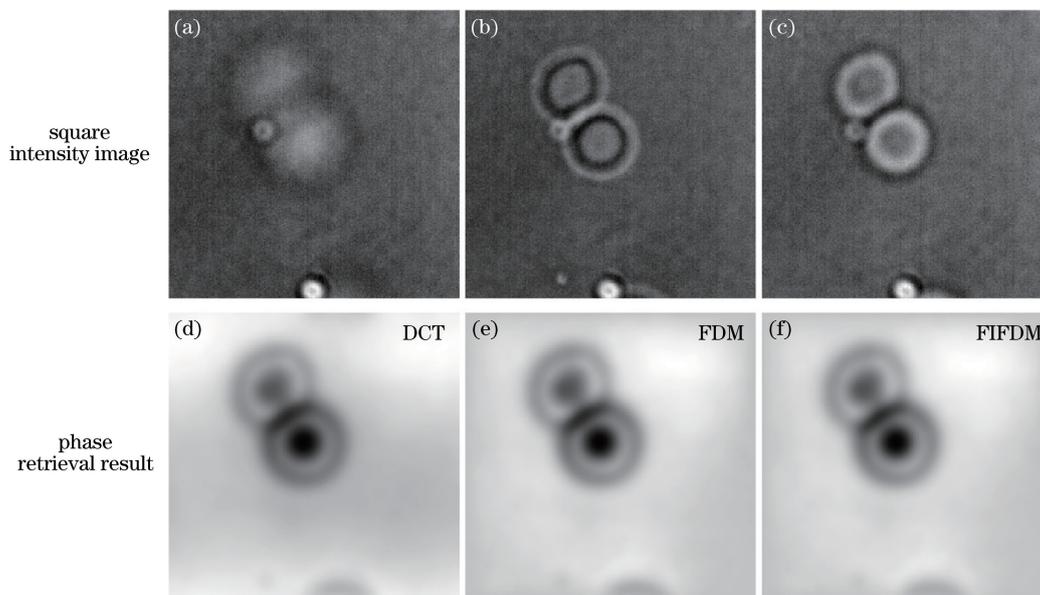


图 8 不同离焦距离处的正方形强度图像和相位恢复结果。(a)(d) $\Delta z = -10 \mu\text{m}$; (b)(e) $\Delta z = 0$; (c)(f) $\Delta z = 10 \mu\text{m}$

Fig. 8 Square intensity images and phase retrieval results at different defocus distances.

(a)(d) $\Delta z = -10 \mu\text{m}$; (b)(e) $\Delta z = 0$; (c)(f) $\Delta z = 10 \mu\text{m}$

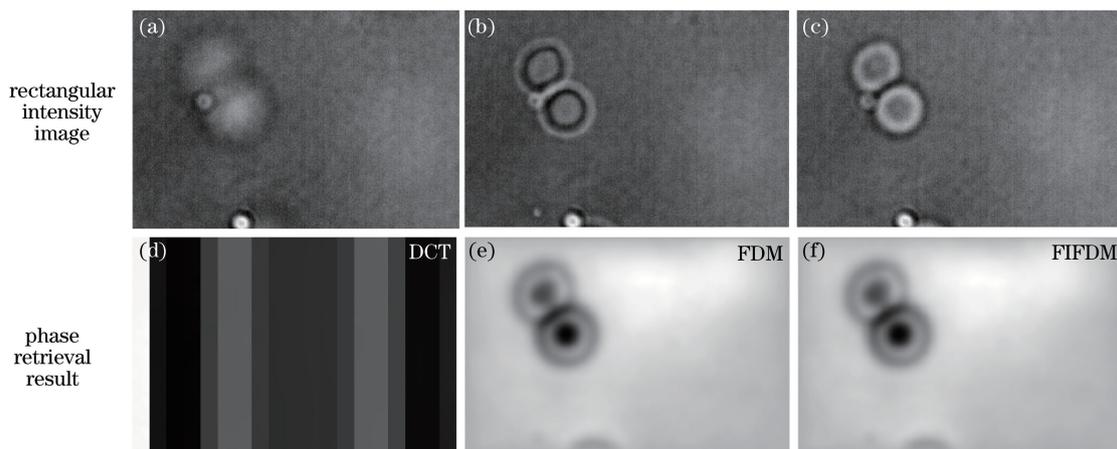


图 9 不同离焦距离处的矩形强度图像和相位恢复结果。(a)(d) $\Delta z = -10 \mu\text{m}$; (b)(e) $\Delta z = 0$; (c)(f) $\Delta z = 10 \mu\text{m}$

Fig. 9 Rectangular intensity images and phase retrieval results at different defocus distances.

(a)(d) $\Delta z = -10 \mu\text{m}$; (b)(e) $\Delta z = 0$; (c)(f) $\Delta z = 10 \mu\text{m}$

5 结 论

在基于 FDM 的 TIE 求解方法的基础上,考虑迭代过程中各点的相关性并引入松弛因子,建立了基于 FIFDM 的 TIE 相位恢复模型,并将其相位恢复结果与 DCT、FDM 的相位恢复结果进行了比较。分析结果表明,与 DCT 法相比,所提方法不仅能够准确地实现正方形输入图像的相位恢复,还能够准确地实现矩形输入图像的相位恢复。与 FDM 相比,所提方法具有更快的恢复速度、更高的准确性和

更强的抗噪性能,从而具有更强的普适性。然而,所提方法也存在局限性:1)所提方法将像素点迭代更新延拓到整个像面,会将只存在于一个地方的噪声或者误差扩散到整个像平面,造成测量精度的整体下降;2)所提方法只关注了纯相位物体,而对于非纯相位物体场景,在运用(2)式的差分近似时聚焦面强度分布的梯度函数^[32]会影响 TIE 求解。虽然引入 Teague 辅助函数可以消除该影响,但是会将 TIE 求解转换成两次泊松方程求解,使运算变得复杂且耗时。后续将对上述两个问题进行深入研究。

参 考 文 献

- [1] Barone-Nugent E D, Barty A, Nugent K A. Quantitative phase-amplitude microscopy I: optical microscopy[J]. *Journal of Microscopy*, 2002, 206(3): 194-203.
- [2] Meng H J, Chen P, Pan J X, et al. X-ray multi-spectral CT imaging method based on subtraction fusion[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2020, 57(8): 083001.
孟红娟, 陈平, 潘晋孝, 等. 基于减影融合的 X 射线多谱计算机层析成像方法[J]. *激光与光电子学进展*, 2020, 57(8): 083001.
- [3] Ding H N, Zhu M M, Ma L H, et al. Elimination method of halo artifacts in white-light diffraction phase microscopy[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2020, 47(5): 0509001.
丁海宁, 朱苗苗, 马利红, 等. 白光衍射相位像光晕效应消除方法[J]. *中国激光*, 2020, 47(5): 0509001.
- [4] Kemper B, von Bally G. Digital holographic microscopy for live cell applications and technical inspection[J]. *Applied Optics*, 2008, 47(4): A52-A61.
- [5] Kemper B, Carl D D, Schnekenburger J, et al. Investigation of living pancreas tumor cells by digital holographic microscopy[J]. *Journal of biomedical optics*, 2006, 11(3): 034005.
- [6] Carl D, Kemper B, Wernicke G, et al. Parameter-optimized digital holographic microscope for high-resolution living-cell analysis[J]. *Applied Optics*, 2004, 43(36): 6536-6544.
- [7] Frank J, Altmeyer S, Wernicke G. Non-interferometric, non-iterative phase retrieval by Green's functions[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2010, 27(10): 2244-2251.
- [8] Pfeiffer F, Weitkamp T, Bunk O, et al. Phase retrieval and differential phase-contrast imaging with low-brilliance X-ray sources[J]. *Nature Physics*, 2006, 2(4): 258-261.
- [9] Liu T C, Wu S J, Li W X. Spatial carrier digital speckle pattern interferometry system with large field of view[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2020, 47(9): 0904001.
刘天承, 吴思进, 李伟仙. 大视场空间载波数字散斑干涉系统[J]. *中国激光*, 2020, 47(9): 0904001.
- [10] Liu L, Shan M, Zhong Z, et al. Simultaneous dual-wavelength off-axis flipping digital holography[J]. *Optics Letters*, 2017, 42(21): 4331-4334.
- [11] Zhang H, Cao L C, Jin G F, et al. Progress on lensless digital holography imaging based on compressive holographic algorithm[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2020, 57(8): 080001.
张华, 曹良才, 金国藩, 等. 基于压缩感知算法的无透镜数字全息成像研究[J]. *激光与光电子学进展*, 2020, 57(8): 080001.
- [12] Shan M G, Liu L, Zhong Z, et al. Single-shot dual-wavelength off-axis quasi-common-path digital holography using polarization-multiplexing[J]. *Optics Express*, 2017, 25(21): 26253-26261.
- [13] Teague M R. Deterministic phase retrieval: a Green's function solution[J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1983, 73(11): 1434-1441.
- [14] Woods S C, Greenaway A H. Wave-front sensing by use of a Green's function solution to the intensity transport equation[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2003, 20(3): 508-512.
- [15] Gureyev T E, Nugent K A. Phase retrieval with the transport-of-intensity equation. II. Orthogonal series solution for nonuniform illumination[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1996, 13(8): 1670-1682.
- [16] Gureyev T E, Nugent K A. Rapid quantitative phase imaging using the transport of intensity equation[J]. *Optics Communications*, 1997, 133(1/2/3/4/5/6): 339-346.
- [17] Pritt M D, Shipman J S. Least-squares two-dimensional phase unwrapping using FFT's[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 1994, 32(3): 706-708.
- [18] Basunia M, Banerjee P P, Abeywickrema U, et al. Recursive method for phase retrieval using transport of intensity and its applications[J]. *Applied Optics*, 2016, 55(33): 9546-9554.
- [19] Pritt M D. Phase unwrapping by means of multigrad techniques for interferometric SAR[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 1996, 34(3): 728-738.
- [20] Shanker A, Tian L, Sczyrba M, et al. Recovering curl using an iterative solver for the transport of intensity equation[C] // *Imaging Systems and Applications 2015*, June 7-11, 2015, Arlington, Virginia, United States. Washington, D.C.: OSA, 2015: ITh2A.5.
- [21] Volkov V V, Zhu Y, de Graef M. A new symmetrized solution for phase retrieval using the transport of intensity equation[J]. *Micron*, 2002, 33(5): 411-416.
- [22] Martinez-Carranza J, Falaggis K, Kozacki T. Fast and accurate phase-unwrapping algorithm based on the transport of intensity equation[J]. *Applied Optics*, 2017, 56(25): 7079-7088.
- [23] Zuo C, Chen Q, Asundi A. Boundary-artifact-free

- phase retrieval with the transport of intensity equation: fast solution with use of discrete cosine transform[J]. *Optics Express*, 2014, 22(8): 9220-9244.
- [24] Zuo C, Chen Q, Huang L, et al. Phase discrepancy analysis and compensation for fast Fourier transform based solution of the transport of intensity equation [J]. *Optics Express*, 2014, 22(14): 17172-17186.
- [25] Hu J B, Wu L F. Transport of intensity phase microscopy combined with accelerated iteration for quantitative phase imaging [J]. *Journal of Optics*, 2019, 21(8): 085703.
- [26] Hu J B, Wu L F. Hybrid method for accurate phase retrieval based on higher order transport of intensity equation and multiplane iteration [J]. *Optical Engineering*, 2019, 58(6): 063106.
- [27] Huang L, Zuo C, Idir M, et al. Phase retrieval with the transport-of-intensity equation in an arbitrarily shaped aperture by iterative discrete cosine transforms[J]. *Optics Letters*, 2015, 40(9): 1976-1979.
- [28] Zhang H B, Zhou W J, Liu Y, et al. Evaluation of finite difference and FFT-based solutions of the transport of intensity equation [J]. *Applied Optics*, 2018, 57(1): A222-A228.
- [29] Gray R M, Goodman J W. *The Fourier transform [M]//Fourier transforms. The springer international series in engineering and computer science. Boston: Springer, 1995, 322: 53-113.*
- [30] Lin Y, Ye L W, Liu W J, et al. Optimization algorithm of correlated color temperature for LED light sources by dichotomy[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, 29(10): 2791-2794.
林岳, 叶烈武, 刘文杰, 等. 二分法优化计算 LED 光源相关色温 [J]. *光学学报*, 2009, 29(10): 2791-2794.
- [31] Zhong J S, Claus R A, Dauwels J, et al. Transport of intensity phase imaging by intensity spectrum fitting of exponentially spaced defocus planes [J]. *Optics Express*, 2014, 22(9): 10661-10674.
- [32] Zuo C, Li J J, Sun J S, et al. Transport of intensity equation: a tutorial [J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2020, 135: 106187.