

基于奇偶校验门的非破坏性贝尔态测量

王洁琼, 张勇*

北京邮电大学理学院, 北京 100876

摘要 由于贝尔态测量是量子信息处理的前提, 因此提出了一种针对贝尔态的非破坏性测量方案。在该方案中, 将奇偶校验门作为关键器件, 利用奇偶校验门不改变输入光子状态的特性实现了 C-NOT 门和 Toffoli 门。然后, 将 Toffoli 门和 Hadamard 门结合实现了对 4 种贝尔态的确定性测量。所提方案可用于双光子纠缠态测量, 并可推广到三光子纠缠态的应用场景中, 为贝尔态测量与量子信息处理提供了新的思路。

关键词 量子光学; 量子信息与处理; 贝尔态测量; 奇偶校验门; 量子逻辑门

中图分类号 O431.2

文献标志码 A

doi: 10.3788/AOS202141.2027002

Non-Destructive Bell State Measurement Based on Parity Gates

Wang Jieqiong, Zhang Yong*

School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China

Abstract Because Bell state Measurement is the prerequisite for quantum information processing, a non-destructive measurement scheme for Bell state is proposed. In this scheme, the parity gates are introduced as key components, and C-NOT gates and Toffoli gates are implemented using the property that parity gates do not change the states of the input photons. Then, Toffoli gates combined with Hadamard gates are used to measure the 4 Bell states deterministically. The proposed scheme can be used to measure two-photon entangled states and extended to the application scenarios of three-photon entangled state, providing a new idea for Bell state measurement and quantum information processing.

Key words quantum optics; quantum information and processing; Bell state measurement; parity gate; quantum logic gate

OCIS codes 270.5585; 270.5565

1 引言

量子纠缠作为量子通信与量子计算中的独特资源, 在光学系统^[1-4]、离子阱^[5]、固态系统^[6-7]等物理系统中的研究和应用都有了长足的进步。光子是一种较容易产生和操控的量子信息载体^[8]。目前无论是采用线性或非线性光学方法, 均可实现双光子及多光子纠缠^[9-12]。其中, 双光子纠缠态最早被应用于量子信息中^[13], 可以完成许多与量子信息处理相关的任务^[14-17]。但是, 不同量子协议需要使用不同的贝尔态, 例如在早期的量子隐形传态协议中, 使用的是 $|\Psi^-\rangle = (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$ 贝尔态^[18]。因此, 实

现贝尔态的测量与校验是量子信息和量子计算领域中最基本的要求。Kim 等^[19]利用非线性光学手段测量了贝尔态, 然而为了保证空间模式重叠, 实际的测量效率并不高。Grice^[20]利用线性光学方法将辅助量子比特的数量增加到三个以提高测量的准确率。Walborn 等^[21]利用偏振分束器(PBS)和由光子极化与动量组成的超纠缠态来测量贝尔态, 该方法要求光子在多个自由度下纠缠。Zhang 等^[22]虽然实现了高维度的贝尔态测量, 但是在测量过程中, 需要将其他维度的纠缠作为辅助量子比特。Kim 等^[23]提出的方案中虽然不需要辅助量子比特, 但是需要线路图具有高度对称性。在本文所提方案中,

收稿日期: 2021-03-31; 修回日期: 2021-04-24; 录用日期: 2021-05-06

通信作者: *zhyong98@bupt.edu.cn

通过辅助量子比特以及由奇偶校验门实现的量子逻辑门来确保光子只需要在极化维度上纠缠。

在所提的双光子贝尔态测量方案中,需要保证贝尔态在测量后不会发生状态塌缩,故选用了可以确保量子比特输入状态与输出状态相同的奇偶校验门。首先,本文详细讨论了奇偶校验门的特性。接着,利用奇偶校验门的特性实现了 C-NOT 门以及 Toffoli 门。最后,利用量子逻辑门实现了对双光子贝尔态的确定性测量,并将其推广到了对三光子纠缠态的测量。

2 奇偶校验门

2004 年,Beenakker 等^[24]提出了奇偶校验门,并实现了对双电子纠缠态的测量与校验。在本文中,将奇偶校验门进行了改进,结构如图 1 所示,其中 x 和 y 代表输入光子的状态。改进后的奇偶校验门可用于光子系统中。在图 1 中,最上方和最下方的两条水平实线代表全反射镜,其作用为将两光子传递到下一个 PBS 处,使输入光子与输出光子的状态保持一致。非破坏性测量装置在方案中充当奇偶表, D 代表非破坏性测量装置测量值,即入射光子对的奇偶性。当两光子的状态为 $|H\rangle|V\rangle$ 或 $|V\rangle|H\rangle$ 时, $D=0$,代表光子为聚束。当两光子的状态为 $|H\rangle|H\rangle$ 或 $|V\rangle|V\rangle$ 时, $D=1$,代表光子为反聚束。例如,当一对光子的输入状态为 $|H\rangle|H\rangle$ 时,输出光子的状态仍为 $|H\rangle|H\rangle$,此时 $D=1$ 。当一对光子的输入状态为 $|H\rangle|V\rangle$ 时,其输出状态不变,此时 $D=0$ 。PBS 的作用是使水平极化的光子入射并反射垂直极化的光子。光子的传递过程为两个光子首先通过第一个 PBS,随后经过探测装置,在全反射镜的作用下传递至第二个 PBS。

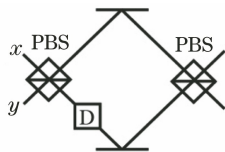


图 1 奇偶校验门结构示意图

Fig. 1 Structural diagram of parity gate

由此可见,奇偶校验门不改变入射光子对的状态,而只输出其奇偶性 $D = p_x \oplus p_y + 1$,其中 \oplus 代表模 2 加运算。将水平偏振状态 $|H\rangle$ 记为 0,垂直偏振状态 $|V\rangle$ 记为 1。只要确定其中一个光子的状态,另一个光子的状态即可通过 D 值判断。假设从 x 处射入的光子状态为 $|H\rangle$,未知状态的光子从 y 处射入。若 $D=1$,则说明待测光子的状态与已知光

子态相同,即为 $|H\rangle$ 。若 $D=0$,则说明待测光子的状态与已知光子态相反,即为 $|V\rangle$ 。由于在待测光子状态判定过程中并没有对待测光子进行直接测量,因此其状态不受影响。

奇偶校验门不仅可以测量单个光子的偏振状态,还可以测量未知光子对的奇偶性。两个光子分别通过 x 和 y 入射,然后依次经过 PBS 和测量装置。以一般的两光子态 $|\phi\rangle = g|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle$ (非归一化,下同) 为例,其中 $|g|^2$ 表示 $|\phi\rangle$ 处于 $|00\rangle$ 的概率, $|b|^2$ 表示 $|\phi\rangle$ 处于 $|01\rangle$ 的概率, $|c|^2$ 表示 $|\phi\rangle$ 处于 $|10\rangle$ 的概率, $|d|^2$ 表示 $|\phi\rangle$ 处于 $|11\rangle$ 的概率。在两光子态通过奇偶校验门后,当 $D=1$ 时,两光子的输出状态为 $g|00\rangle + d|11\rangle$,对应的概率为 $(|g|^2 + |d|^2) / (|g|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2)$ 。当 $D=0$ 时,两光子的输出状态为 $b|01\rangle + c|10\rangle$,对应的概率为 $(|b|^2 + |c|^2) / (|g|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2)$ 。

3 利用奇偶校验门实现量子逻辑门

利用奇偶校验门实现的 C-NOT 门的功能为:当控制比特为 $|1\rangle$ 时,目标比特的状态被翻转;当控制比特为 $|0\rangle$ 时,目标比特状态不变。利用奇偶校验门实现的 C-NOT 门结构示意图如图 2 所示。其中, C 代表控制比特, t 代表目标比特。 $X^{(D_1+1)}$ 和 $X^{(D_2+1)}$ 代表根据两组奇偶校验门的结果来判断是否对目标比特施加泡利-X 门操作,当 $D_1=0$ 时,对目标比特施加泡利-X 门操作。当 $D_1=1$ 时,目标比特的状态保持不变。

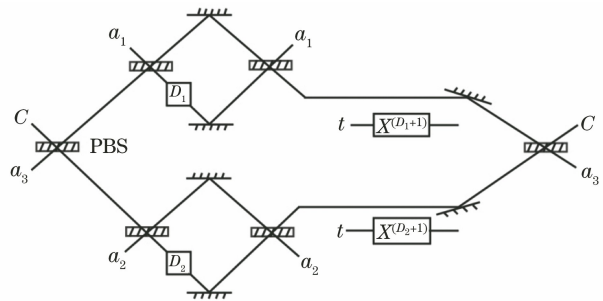


图 2 利用奇偶校验门实现的 C-NOT 门结构示意图

Fig. 2 Structural diagram of C-NOT gate implemented by parity gate

利用三组奇偶校验门和两组泡利-X 门来实现 C-NOT 门。将辅助量子比特 a_1, a_2 设为 $|H\rangle$ 态, a_3 设为空态。当控制比特为单量子态时,该线路的上半部分和下半部分均可独立实现 C-NOT 门功能。当控制比特处于 $|H\rangle$ 态时,上下两条线路中的奇偶

校验结果均为 1, 此时 $D_1+1=D_2+1=0$, 两条线路中的 X 门均不作用于目标比特, 故两条线路中目标比特的状态均不变。当控制比特的状态为 $|V\rangle$ 时, 两条线路中的 X 门都将作用于目标比特使其状态发生翻转, 进而实现 C-NOT 门。此外, 当控制比特处于叠加态时, 图 2 中的结构同样适用。假设控制比特的状态为 $|H\rangle+|V\rangle$, 目标比特的状态为 $|H\rangle$, 此时, D_1 和 D_2 分别为 0 和 1。在经过线路后, 目标比特将位于叠加态 $|HH\rangle+|VV\rangle$ 。C-NOT 门不仅可以保持入射光子的状态不变, 而且不需要因控制比特状态的改变而去调整线路。通过 D_1 和 D_2 的值可以确定控制比特的状态, 当 $D_1=D_2$ 时, 表明控制比特为单量子态; 当 $D_1 \neq D_2$ 时, 表明控制比特处于叠加态。

将实现 C-NOT 门的思路延伸至 Toffoli 门, C-NOT 门与 Toffoli 门的主要区别在于控制比特的数目。图 3 展示了三种类型的 Toffoli 门, 其中实心圆形代表控制比特状态为 $|1\rangle$, 空心圆形代表控制比特状态为 $|0\rangle$, 最下方的圆形代表泡利-X 门。在图 3(a) 所示的 Toffoli 门中, 当且仅当两个控制比特都为 $|1\rangle$ 时, 目标比特的状态才会被翻转, 其么正算子可以表示为

$$U_T = |000\rangle\langle 000| + |001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010| + |011\rangle\langle 011| + |100\rangle\langle 100| + |101\rangle\langle 101| + |110\rangle\langle 110| + |111\rangle\langle 110|. \quad (1)$$

在图 3(b) 所示的 Toffoli 门中, 当且仅当控制比特均为 0 时, 目标比特才会被翻转。在图 3(c) 所示的 Toffoli 门中, 当控制比特均为 $|0\rangle$ 或均为 $|1\rangle$ 时, 目标比特会被翻转。图 3(b)、(c) 中的 Toffoli 门都是图 3(a) 中标准 Toffoli 门的泛化, 其么正算子不再给出。

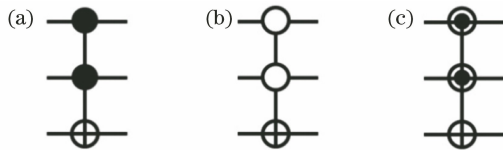


图 3 三种类型的 Toffoli 门

Fig. 3 Three types of Toffoli gates

利用奇偶校验门实现的三量子比特 Toffoli 门结构示意图如图 4 所示。两个控制比特依次通过 C-NOT 门, 依据两组奇偶校验门的结果来判断两个控制比特的状态以及是否对目标比特施加泡利-X 门操作。其真值表如表 1 所示, 展示了当控制比特处于不同状态时, 线路中奇偶校验门的测量结果。

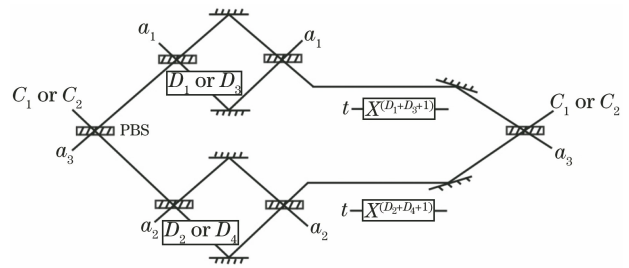


图 4 利用奇偶校验门实现的三量子比特 Toffoli 门结构示意图

Fig. 4 Structural diagram of three-qubit Toffoli gate implemented by parity gates

表 1 Toffoli 门的真值表

Table 1 Truth table of Toffoli gates

$C_1 C_2$	$ C_1 C_2\rangle$	$D_1 D_3$	$D_2 D_4$	D_1+D_3+1	D_2+D_4+1
$ 0\rangle 0\rangle$	$ 00\rangle$	1	1	1	1
$ 1\rangle 1\rangle$	$ 11\rangle$	0	0	0	0
$ 0\rangle 1\rangle$	$ 01\rangle$	1	0	1	0
$ 1\rangle 0\rangle$	$ 10\rangle$	0	1	0	1

从表 1 中可以看出, 当测量结果 $D_1=D_2=D_3=D_4$ 时, 对应的控制比特状态为 $|00\rangle$ 。当测量结果为 $D_1=D_2=1, D_3=D_4=0$ 时, 对应的控制比特的状态为 $|01\rangle$ 。根据两对奇偶校验门的测量值即可判断出控制比特的状态以及是否对目标比特施加泡利-X 门操作。

4 利用量子逻辑门测量纠缠态

4.1 双光子贝尔态测量

利用第 3 节中实现的量子逻辑门进行确定性贝尔态测量的过程分为两步, 贝尔态第一步测量过程示意图如图 5 所示。

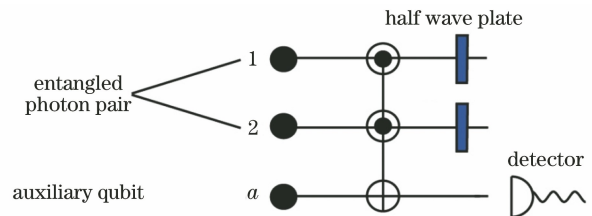


图 5 贝尔态第一步测量过程示意图

Fig. 5 Schematic diagram of the first step of Bell state measurement process

首先, 将 4 种贝尔态分为两组, 即偶组 $|\Phi^\pm\rangle$ 和奇组 $|\Psi^\pm\rangle$ 。以 $|\Phi^+\rangle$ 和 $|\Psi^+\rangle$ 为例说明测量过程, 系统的初始状态为

$$\begin{cases} |\phi\rangle_1 = |\Phi^+\rangle_{12} \otimes |0\rangle_a = \\ \quad (|0\rangle_1|0\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2)|0\rangle_a, \\ |\phi\rangle_2 = |\Psi^+\rangle_{12} \otimes |0\rangle_a = \\ \quad (|0\rangle_1|1\rangle_2 + |1\rangle_1|0\rangle_2)|0\rangle_a \end{cases}, \quad (2)$$

式中： $|\Phi^+\rangle_{12}$ 表示 1、2 两个比特所处的偶组贝尔态； $|\Psi^+\rangle_{12}$ 表示 1、2 两个比特所处的奇组贝尔态； \otimes 表示直积。经过图 4 中的 Toffoli 门后，方程(2)中的状态变为

$$\begin{cases} |\phi'\rangle_1 = (|0\rangle_1|0\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2)|1\rangle_a = \\ \quad |\Phi^+\rangle_{12} \otimes |1\rangle_a \\ |\phi'\rangle_2 = (|0\rangle_1|1\rangle_2 + |1\rangle_1|0\rangle_2)|0\rangle_a = \\ \quad |\Psi^+\rangle_{12} \otimes |0\rangle_a \end{cases} \quad (3)$$

因此，这两组贝尔态的组间识别可以通过对辅助量子比特的测量来完成。要完成组内区分，即测量区分 $|\Phi^+\rangle$ 和 $|\Phi^-\rangle$ 、 $|\Psi^+\rangle$ 和 $|\Psi^-\rangle$ ，则需要在经过 Toffoli 门后让两个光子继续通过半波片，此时 4 个贝尔态的状态转变为

$$\begin{cases} |\Phi^+\rangle = |0\rangle_1|0\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2 \rightarrow |0\rangle_1|0\rangle_2 + \\ \quad |1\rangle_1|1\rangle_2 = |\Phi^+\rangle \\ |\Phi^-\rangle = |0\rangle_1|0\rangle_2 - |1\rangle_1|1\rangle_2 \rightarrow |0\rangle_1|1\rangle_2 + \\ \quad |1\rangle_1|0\rangle_2 = |\Psi^+\rangle \\ |\Psi^+\rangle = |0\rangle_1|1\rangle_2 + |1\rangle_1|0\rangle_2 \rightarrow |0\rangle_1|0\rangle_2 - \\ \quad |1\rangle_1|1\rangle_2 = |\Phi^-\rangle \\ |\Psi^-\rangle = |0\rangle_1|1\rangle_2 - |1\rangle_1|0\rangle_2 \rightarrow |1\rangle_1|0\rangle_2 - \\ \quad |0\rangle_1|1\rangle_2 = |\Psi^-\rangle \end{cases} \quad (4)$$

可见贝尔态 $|\Phi^+\rangle$ 没有变化，但贝尔态 $|\Phi^-\rangle$ 变为状态 $|\Psi^+\rangle$ 。因此，对 $|\Phi^+\rangle$ 和 $|\Phi^-\rangle$ 的测量区分从组内识别转换为组间识别。此时只要再重复第一步的过程，即可彻底测量区分出两种贝尔态。同样可用该过程来测量区分奇组组内的两个贝尔态。至此，4 种贝尔态可以被彻底区分并确定状态。在测量过程中，因为光子对经过了两次半波片，即 Hadamard 门，所以其状态不改变。利用辅助量子比特的测量结果实现了 4 种贝尔态的确定性测量区分。例如，若辅助量子比特的两次测量结果为 $|1\rangle$ 和 $|1\rangle$ ，则意味着双光子处于贝尔态 $|\Phi^+\rangle$ 。若测量结果为 $|1\rangle$ 和 $|0\rangle$ ，则原始状态为 $|\Psi^-\rangle$ 。

4.2 三光子 GHZ 态测量

将该方法扩展至三光子纠缠态。在双光子贝尔态测量过程中，基本思想是先将 4 种贝尔态分为两组，然后两两区分。在三光子 GHZ 态的测量中仍

使用该思路。将三个光子分成两组，进而将该问题转换为贝尔态测量，其示意图如图 6 所示。

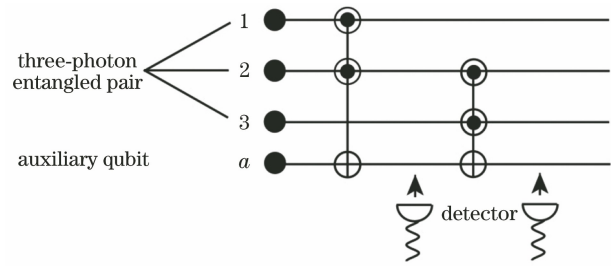


图 6 三光子 GHZ 态的测量过程示意图

Fig. 6 Schematic diagram of the measurement process of three-photon GHZ state

辅助量子比特的初始状态设为 $|0\rangle$ 。在测量过程结束后，若辅助量子比特的两次测量结果为 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ ，则三光子的初始状态为 $|1\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 \pm |0\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3$ 。若测量结果为 $|1\rangle$ 和 $|0\rangle$ ，则初始状态为 $|0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 \pm |1\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3$ 。利用该方案可实现对三光子 GHZ 态的概率性测量。

5 讨论与结论

所提方案可以成功进行贝尔态的验证性测量或贝尔态间的确定性区分测量。当双光子状态具有直积态与贝尔态两种可能时，利用所提方案能够实现概率性区分。以直积态 $|HH\rangle$ 与贝尔态 $|\Phi^+\rangle = (|HH\rangle + |VV\rangle)/\sqrt{2}$ 为例，双光子在第一次经过 Toffoli 门后，辅助量子比特 a 的测量结果为 $|1\rangle$ 。在 Hadamard 门的作用下，贝尔态 $|\Phi^+\rangle$ 的状态不变，但直积态 $|HH\rangle$ 变为 $|HH\rangle + |HV\rangle + |VH\rangle + |VV\rangle$ 。因此，再次经过 Toffoli 门后， a 的状态也随之改变。当双光子为直积态时， a 为 $|1\rangle$ 或 $|0\rangle$ 的概率均为 50%，但当其为贝尔态时， a 必为 $|0\rangle$ 。利用所提方案进行一次测量，仅可概率性地区分直积态与贝尔态。由于所提方案并不对双光子进行直接测量，且奇偶校验门并不改变光子状态，因此多次测量可实现直积态与贝尔态的区分。

利用奇偶校验门实现了量子 Toffoli 门对双光子贝尔态的测量，通过辅助量子比特的测量结果来判断双光子所处状态。虽然该方案可确认纠缠态是否为 GHZ 态，但是并不适用于同样为三光子纠缠态的 W 态和图态。当纠缠比特的数目进一步增加时，如四比特纠缠态 $|\chi\rangle = \frac{1}{2}(|0000\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle + |1111\rangle)$ ，将其转换为三组贝尔态测量即

可。因此,当纠缠比特数目增加时,所需辅助量子比特数将呈线性增长。此外,该方案中不需要很高的对称性,降低了对测量过程的要求。然而,方案也存在一定的局限性,如当双光子处于其他叠加态、乘积态与混合态时方案并不适用,针对三光子 GHZ 态只能实现概率性测量等。故后续将对上述问题进行深入研究,以提高方案的测量精度与普适性。

参 考 文 献

- [1] Kwiat P G, Mattle K, Weinfurter H, et al. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs[J]. *Physical Review Letters*, 1995, 75(24): 4337-4341.
- [2] Pan J W, Bouwmeester D, Weinfurter H, et al. Experimental entanglement swapping: entangling photons that never interacted[J]. *Physical Review Letters*, 1998, 80(18): 3891-3894.
- [3] Ni Y, Wang Q, Zhang L, et al. Entangled photon-pair source based on photonic crystal fiber[J]. *Optics Communications*, 2004, 238(1/2/3): 45-49.
- [4] Tang K, Hu Z F, Liu C P, et al. Beam splitting via non-Hermitian stimulated Raman shortcut to adiabatic passage[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2020, 47(9): 0912001.
汤开, 胡正峰, 刘呈普, 等. 非厄米受激拉曼绝热捷径的量子分束[J]. *中国激光*, 2020, 47(9): 0912001.
- [5] Blinov B B, Moehring D L, Duan L M, et al. Observation of entanglement between a single trapped atom and a single photon[J]. *Nature*, 2004, 428(6979): 153-157.
- [6] Simmons S, Brown R M, Riemann H, et al. Entanglement in a solid-state spin ensemble[J]. *Nature*, 2011, 470(7332): 69-72.
- [7] Neumann P, Mizuochi N, Rempp F, et al. Multipartite entanglement among single spins in diamond[J]. *Science*, 2008, 320(5881): 1326-1329.
- [8] Knill E, Laflamme R, Milburn G J. A scheme for efficient quantum computation with linear optics[J]. *Nature*, 2001, 409(6816): 46-52.
- [9] Lu C Y, Zhou X Q, Gühne O, et al. Experimental entanglement of six photons in graph states[J]. *Nature Physics*, 2007, 3(2): 91-95.
- [10] Prevedel R, Cronenberg G, Tame M S, et al. Experimental realization of Dicke states of up to six qubits for multiparty quantum networking[J]. *Physical Review Letters*, 2009, 103(2): 020503.
- [11] Yao X C, Wang T X, Xu P, et al. Observation of eight-photon entanglement[J]. *Nature Photonics*, 2012, 6(4): 225-228.
- [12] Li B H, Xia Z G, Xiang X, et al. Experimental method for fast measuring the phase-matched wavelengths of entangled photons by wavelength-to-time mapping[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2021, 48(3): 0312001.
李百宏, 夏志广, 项晓, 等. 基于波长到时间映射快速测量纠缠光子相位匹配波长的实验方法[J]. *中国激光*, 2021, 48(3): 0312001.
- [13] Bouwmeester D, Pan J W, Mattle K, et al. Experimental quantum teleportation[J]. *Nature*, 1997, 390: 575-579.
- [14] Mattle K, Weinfurter H, Kwiat P, et al. Dense coding in experimental quantum communication[J]. *Physical Review Letters*, 1996, 76(25): 4656-4659.
- [15] Scully M O, Englert B G, Bednar C J. Two-photon scheme for detecting the bell basis using atomic coherence[J]. *Physical Review Letters*, 1999, 83(21): 4433-4436.
- [16] Żukowski M, Zeilinger A, Horne M A, et al. “Event-ready-detectors” Bell experiment via entanglement swapping[J]. *Physical Review Letters*, 1993, 71(26): 4287-4290.
- [17] He Y F, Li C Y, Guo J R, et al. Passive measurement-device-independent quantum key distribution based on heralded pair coherent states[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2020, 47(9): 0912002.
何业锋, 李春雨, 郭佳瑞, 等. 基于标记配对相干态的被动测量设备无关量子密钥分配[J]. *中国激光*, 2020, 47(9): 0912002.
- [18] Bennett C H, Brassard G, Crépeau C, et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels[J]. *Physical Review Letters*, 1993, 70(13): 1895-1899.
- [19] Kim Y H, Kulik S P, Shih Y. Quantum teleportation of a polarization state with a complete bell state measurement[J]. *Physical Review Letters*, 2001, 86(7): 1370-1373.
- [20] Grice W P. Arbitrarily complete Bell-state measurement using only linear optical elements[J]. *Physical Review A*, 2011, 84(4): 042331.
- [21] Walborn S P, Pádua S, Monken C H. Hyperentanglement-assisted Bell-state analysis[J]. *Physical Review A*, 2003, 68(4): 042313.
- [22] Zhang H, Zhang C, Hu X M, et al. An arbitrary two-particle high-dimensional Bell state measurement by auxiliary entanglement[J]. *Physical Review A*, 2019, 99(5): 052301.
- [23] Kim Y S, Pramanik T, Cho Y W, et al. Informationally symmetrical Bell state preparation and measurement[J]. *Optics Express*, 2018, 26(22): 29539-29549.
- [24] Beenakker C W J, DiVincenzo D P, Emary C, et al. Charge detection enables free-electron quantum computation[J]. *Physical Review Letters*, 2004, 93(2): 020501.