

运动物体的高精度大气扰动检出方法

张月^{1,2*}, 王旭³, 苏云^{1,2}, 张学敏^{1,2}, 邬志强^{1,2}, 赵号^{1,2}, 邓红艳^{1,2}¹北京空间机电研究所, 北京 100094;²先进光学遥感技术北京重点实验室, 北京 100094;³流体物理研究所, 四川 绵阳 621000

摘要 降落伞气动开伞过程、高速客机气动外形的优化都需要可视化流场信息,因此,以大气扰动引发的背景光线偏折为基础,建立了基于“整像素十字搜索+Newton-Raphson 亚像素定位+扰动方程求解”的运动物体高精度大气扰动检出方法,并通过数值散斑图像验证了本方法在理想条件下的理论检出精度。在实验室内以散斑图像为背景,用本方法和传统纹影监测方法对高压气管出口气流进行扰动检出,结果表明,本方法的准确性较高,可为实验室外的可视化监测提供一种适用性较强的方法。

关键词 测量与计量; 光线偏折; 背景导向纹影; 扰动可视化

中图分类号 O439

文献标志码 A

doi: 10.3788/AOS202141.0228002

High-Precision Atmospheric Disturbance Detection Method for Moving Objects

Zhang Yue^{1,2*}, Wang Xu³, Su Yun^{1,2}, Zhang Xuemin^{1,2},
Wu Zhiqiang^{1,2}, Zhao Hao^{1,2}, Deng Hongyan^{1,2}¹Beijing Institute of Space Mechanics & Electricity, Beijing 100094, China;²Beijing Key Laboratory of Advanced Optical Remote Sensing Technology, Beijing 100094, China;³Institute of Fluid Physics, Mianyang, Sichuan 621000, China

Abstract Information in visualizing flow field is needed for optimization in the aerodynamic opening process of parachute and in the process of optimizing aerodynamic shape of commercial aircraft. In this paper, based on the principle that atmospheric disturbance can lead to deflection of the background light, high-precision atmospheric disturbance detection method for moving objects is established. The method is composed of integral pixel crossing search, Newton-Raphson sub-pixel location, and solution of disturbing equation. The theoretical disturbance detection accuracy in ideal conditions is verified using numerical speckle image. Using the speckle image as the background in the laboratory, the method and the traditional schlieren monitoring method are used to detect the disturbance of the high-pressure tracheal outlet airflow. The results show that the accuracy of the method is high, and it can provide a more applicable way for visual monitoring outside the laboratory.

Key words measurement and metrology; light deflection; background-oriented schlieren; visualization of disturbance

OCIS codes 280.7060; 120.5710; 110.4155

收稿日期: 2020-05-05; 修回日期: 2020-07-24; 录用日期: 2020-08-19

基金项目: 国家自然科学基金(61775102)

* E-mail: yue3723302@126.com

1 引言

返回式航天器、降落伞、民航客机都是需要在大气层内快速飞行的物体,其运动过程中会与大气相互作用,形成大气扰动,大气扰动也是大气层内动力飞行的必然产物。对这些运动物体引发的大气扰动进行可视化光学显示可以有效获取流动参数、监测运动状态、优化动力外形等参数,为返回式航天器平稳着陆、降落伞动力开伞过程的优化以及高速甚至超音速民航客机的动力外形优化提供数据支撑。

运动物体大气扰动的可视化光学显示方法主要有传统纹影法^[1]、阴影法^[1]、干涉法^[2]等,光学测量方法主要有粒子图像测速(PIV)^[3]、激光多普勒测速^[4]等,这些方法均需要复杂的主动照明和光学系统,一般只在实验室或风洞内使用。背景导向纹影(BOS)^[5]技术是在传统纹影成像和 PIV 基础上提出的新型流场可视化方法,利用随机图案背景以及成像相机显示背景与相机区域的流场变化,得到了广泛的应用。BOS 技术可用于对大气扰动进行清晰、精准成像,特别是对真实飞行条件下的返回式航天器、降落伞、民航客机产生的大气扰动进行高精度的可视化。

BOS 技术直接得到的是包含不可见大气扰动的背景图像,需对图像进行大气扰动检出处理才能获得可视化的大气扰动信息。2010 年, Hargather 等^[6]利用高帧频相机以树林为背景开展了喷雾羽流、引擎盖热流的可视化成像,并以玉米地为背景开展了步枪射击、爆炸形成的大气扰动可视化成像,分析了背景选择、成像设备、成像距离、背景纹影探测精度等与拍摄物体运动过程之间的相互关系,但主要应用在外场近距离、超高分辨率、水平观测方面。2013 年, Raffel 等^[7-8]以树林为背景,对飞行中的全尺寸直升飞机旋翼尖端涡旋进行了可视化成像,并与大尺寸风洞内的实验结果进行了对比分析。2011 年,美国宇航局(NASA)的研究人员结合图像处理方法,提出了 BOS 技术,并将其用于空对空机载飞行成像实验,代号为 AirBOS1,获得了很好的成像效果。2014 年,研究人员使用具有更高空间分辨率和更快帧频的成像系统进行了第二批 AirBOS 飞行任务,包括对 F-18、F-15 等目标的成像。2017 年, Smith 等^[9-10]进行了 AirBOS3 系列飞行任务,飞行目标为 F-15 和 T-38C。人们利用开发好的纹影图像处理软件移除沙漠背景,得到原始的冲击波图像,然后将多帧图像进行平均处理,获得清晰的冲击波

图样。2017 年, Hill 等^[11-13]开展了钙-K 日食 BOS (CaKEBOS)技术论证,在地面上以日盘为背景,获取了飞机进出太阳边缘的大气扰动图像。2019 年, NASA 在阿姆斯特朗飞行研究中心,利用两架训练喷气式飞机将超音速飞机冲击波相互作用的过程进行了可视化,并公布了飞机超音速冲击波相互作用的图像^[14]。2020 年,张月等^[15]提出了运动物体大气扰动的可视化光学监测方法,分别利用目标大气扰动光传输方法、大气扰动光偏折监测方法以及高精度扰动检出方法,获取了目标大气扰动光传输特性、包含大气扰动信息的背景图像以及可视化的目标大气扰动信息,这些技术的发展进一步提高了纹影成像的质量。

本文基于大气扰动会引起光线传输方向发生偏折的原理,建立了高精度运动物体大气扰动检出方法,采用“整像素十字搜索+Newton-Raphson (N-R)亚像素定位+扰动方程求解”的方式,利用数值散斑图像背景验证了本方法在理想条件下的理论检出精度,并分析了在不同扰动强度下达到扰动检出精度时对图像信噪比的需求。并在实验室内以散斑图像为背景,以高压气管出口气流为监测对象,分别开展了背景纹影监测实验和传统纹影监测实验。背景纹影监测实验获得的是包含大气扰动信息的背景图像,需利用本方法进行可视化大气扰动检出。传统纹影监测实验可直接显示扰动信息的图像。通过对反演的两种扰动图像进行对比分析,定性验证了本方法对大气扰动检出的准确性。

2 运动物体的高精度大气扰动检出方法

高精度扰动检出方法利用一幅包含目标大气扰动的背景图像和一幅不包含目标大气扰动的同一背景图像进行整像素搜索和亚像素定位,实现高精度配准;再通过边界条件设定、网格划分求解大气扰动光学监测方法中得到的方程,实现大气扰动反演,从而获得可视化的目标大气扰动信息,具体流程如图 1 所示。

2.1 整像素搜索方法

整像素搜索采用十字搜索方法,根据相关系数分布曲面具有的单峰特性将相关系数分布从多维曲面变为一条只有单峰的曲线,搜索路径从二维降到一维,搜索过程被分解为多步,每次只沿一条直线进行搜索,大大减少了整像素搜索的计算时间。如图 2 所示,以 c 点为起始搜索点, u_0 为起始搜索点沿 u 方向的坐标,沿 c 点与 u_0 对多维相关系数曲面

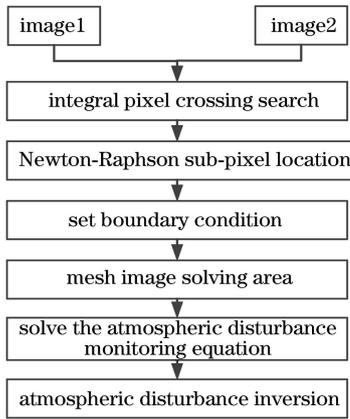


图 1 高精度扰动检出方法的流程

Fig. 1 Flow of the high-precision disturbance detection method

做一平行 v 方向的截面, 则该截面与相关系数曲面相交的曲线就是一条单峰曲线, 其顶点 e_0 就是沿直线计算的相关系数极值点。将经过 e_0 并垂直包含 c 和 u_0 点且平行于 v 的截面作为一个新的截面, 交 v 轴于 v_1 , 此截面与相关系数曲面相交的曲线顶点

为 e_1 。重复搜索几次, 最后在单峰曲线的顶点 e_n 为同一点时, 认为该点就是平面内的相关系数极值点, 结合 c 点的位置就能得到整像素位移值。

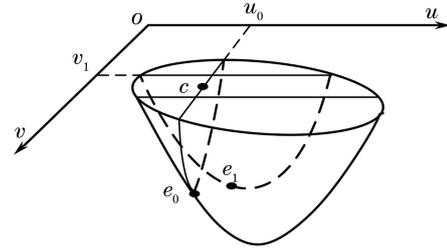


图 2 整像素十字搜索方法的原理

Fig. 2 Schematic diagram of integral pixel crossing search

2.2 亚像素定位方法

亚像素定位采用 N-R 法, 其核心是通过牛顿法在相关系数极值附近进行迭代运算, 最终收敛至相关函数的极值。假设变形后图像存在刚体位移、伸缩、剪切等变形, 则可将相关函数的自变量设定为含有 6 个变形参数的矢量 $(u, v, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x, \partial v/\partial y)$ 。变形后图像子区各点的位置可表示为

$$x' = x_0 + u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y, \quad y' = y_0 + v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y, \quad (1)$$

迭代的相关函数可表示为

$$C_{f,g}(\mathbf{p}) = \sum_{x=-M}^M \sum_{y=-N}^N \left\{ \frac{f(x,y) - \bar{f}}{\sqrt{\sum_{x=-M}^M \sum_{y=-N}^N [f(x,y) - \bar{f}]^2}} - \frac{g(x',y') - \bar{g}}{\sqrt{\sum_{x'=-M}^M \sum_{y'=-N}^N [g(x',y') - \bar{g}]^2}} \right\}^2, \quad (2)$$

式中, $\mathbf{p} = [u, v, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x, \partial v/\partial y]$ 为待求矢量, $\Delta x, \Delta y$ 分别为参考图像和求解图像上对应点在 x, y 方向上的相对位移, M, N 分别为 x 和 y 方向的像素数, (x, y) 为初始图像中某一像素的位置, (x', y') 为求解图像中迭代窗口的位置, $f(x, y)$ 为初始图像中待求取位移量的诊断窗口, $g(x', y')$ 为求解图像中的迭代窗口, $\bar{f} = \sqrt{\sum_{i=-M}^M \sum_{j=-N}^N [f(x_i, y_j)]^2}$, $\bar{g} = \sqrt{\sum_{i=-M}^M \sum_{j=-N}^N [g(x'_i, y'_j)]^2}$ 。变形前后图像子区的相似度最高时, 相关系数 $C_{f,g}(\mathbf{p})$ 应取极值, 即相关系数 $C_{f,g}(\mathbf{p})$ 的梯度趋于 0, 可表示为

$$\nabla C_{f,g}(\mathbf{p}) = \left[\frac{\partial C_{f,g}(\mathbf{p})}{\partial p_i} \right]_{i=1, \dots, 6} = -2 \sum_{x=-M}^M \sum_{y=-N}^N \left\{ \left(\frac{f(x,y) - \bar{f}}{\sqrt{\sum_{x=-M}^M \sum_{y=-N}^N [f(x,y) - \bar{f}]^2}} - \frac{g(x',y') - \bar{g}}{\sqrt{\sum_{x'=-M}^M \sum_{y'=-N}^N [g(x',y') - \bar{g}]^2}} \right) \times \frac{1}{\sqrt{\sum_{x=-M}^M \sum_{y=-N}^N [g(x',y') - \bar{g}]^2}} \cdot \frac{\partial g(x',y')}{\partial p_i} \right\}_{i=1, \dots, 6} = 0. \quad (3)$$

(3)式可用 N-R 法进行迭代求解, N-R 法求解的极值是基于泰勒级数的前两阶展开式。

2.3 大气扰动监测方程

大气扰动监测方程是运动物体大气扰动反演的关键, 由格拉斯通-戴尔定律可知, 气体折射率与密

度的关系可表示为

$$(n - 1)/\rho = K_{G-D}, \quad (4)$$

式中, n 为气体折射率, ρ 为气体密度, K_{G-D} 为格拉斯通-戴尔常数, 取决于气体的特性, 具体形式可参考文献[16]。图 3 为 BOS 的原理图, 其中, Z_i 为

像平面到相机透镜组的距离, Z_B 为背景到相机透镜组的距离, Z_D 为流场中心到背景的距离, ϵ_y 为

光线在 y 方向的偏折角, $\Delta y'$ 为 Δy 在背景上的虚位移; 同理可知, $\Delta x'$ 为 Δx 在背景上的虚位移。

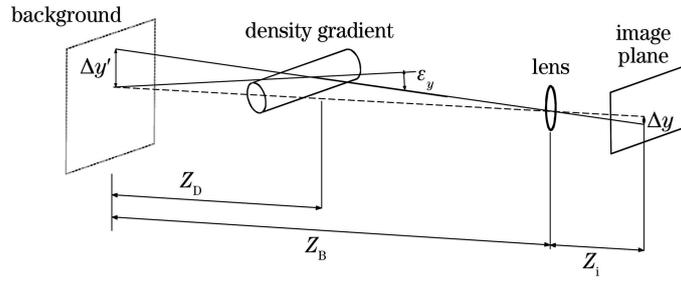


图 3 BOS 的原理图

Fig. 3 Schematic diagram of the BOS

光束偏折包含了空间折射率梯度场沿光程的积分效应, 因此, 图像斑点发出光线的偏折角可表示为

$$\epsilon_y = \int_{Z_D - \Delta Z_D}^{Z_D + \Delta Z_D} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} dz, \quad (5)$$

式中, ΔZ_D 为测量流场的半宽度。由图 3 中的几何关系可知, 图像平面斑点位移量 Δy 与虚拟图像平面斑点位移量 $\Delta y'$ 之间关系可表示为

$$\frac{\Delta y'}{Z_B} = \frac{\Delta y}{Z_i} = \frac{\Delta y}{f_{\text{cam}}}, \quad (6)$$

式中, f_{cam} 为相机镜头的焦距。小偏折角可表示为

$$\epsilon_y = \frac{\Delta y'}{Z_D} = \frac{Z_B \Delta y}{Z_D f_{\text{cam}}}, \quad (7)$$

$$\Delta y = \epsilon_y \frac{Z_D f_{\text{cam}}}{Z_B}. \quad (8)$$

同理, 在 x 方向的位移 Δx 可表示为

$$\Delta x = \epsilon_x \frac{Z_D f_{\text{cam}}}{Z_B}. \quad (9)$$

当光线在非均匀介质中传输时, 根据费马原理, 如果光线偏移量远远小于流场宽度, 则

$$\frac{\partial n}{\partial x} = C \cdot \Delta x(x, y), \quad \frac{\partial n}{\partial y} = C \cdot \Delta y(x, y), \quad (10)$$

式中, C 为常数, 与实验配置有关。对整个位移矢量场在 x 方向和 y 方向求偏导, 得到

$$\nabla^2 n = \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} = C \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right). \quad (11)$$

对于给定的位移矢量场及边界条件, (11) 式可通过有限差分或有限元法求解, 进而获得测量区域投影积分的定量折射率分布, 并通过格拉斯通-戴尔公式计算出定量密度场信息。该方程的具体求解方法可参考文献[17]。

3 数值实验

3.1 理想散斑图像在不同亚像素移动条件下的实验

为了验证本方法计算整像素及亚像素定位的误差, 建立了可精确控制位移的数学仿真散斑图, 如图 4 所示。采用若干随机分布高斯光斑强度迭加的方法, 模拟发生位移前后的散斑图像。

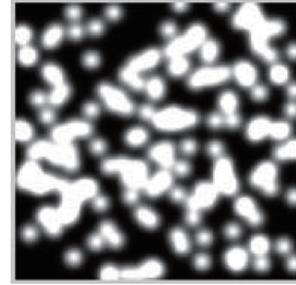


图 4 数值模拟的高斯分布散斑图

Fig. 4 Gaussian speckle pattern obtained by numerical simulation

对图 4 中的散斑图产生不同数值的位移, 并用高精度扰动检出方法进行计算, 得到的像素位移值如图 5 所示。其中, p, q 为实际沿 x, y 方向的位移。将各分布图采用正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 进行拟合, 结果如表 1 所示, 其中, μ 为期望值, σ^2 为方差。可以发现, 对于标准高斯分布的散斑背景图, 在给定沿 x 和 y 方向的位移分别为 $p_0 = 0.01$ pixel, $q_0 = 0$ pixel 时, 检出误差的最大值为 $\pm 1.04 \times 10^{-5}$ pixel; 在给定沿 x 和 y 方向的位移分别为 $p_0 = 0.01$ pixel, $q_0 = 0.01$ pixel 时, 检出误差的最大值为 $\pm 1.23 \times 10^{-5}$ pixel, 这表明本方法可以有效检出 ± 0.01 pixel 内的误差。

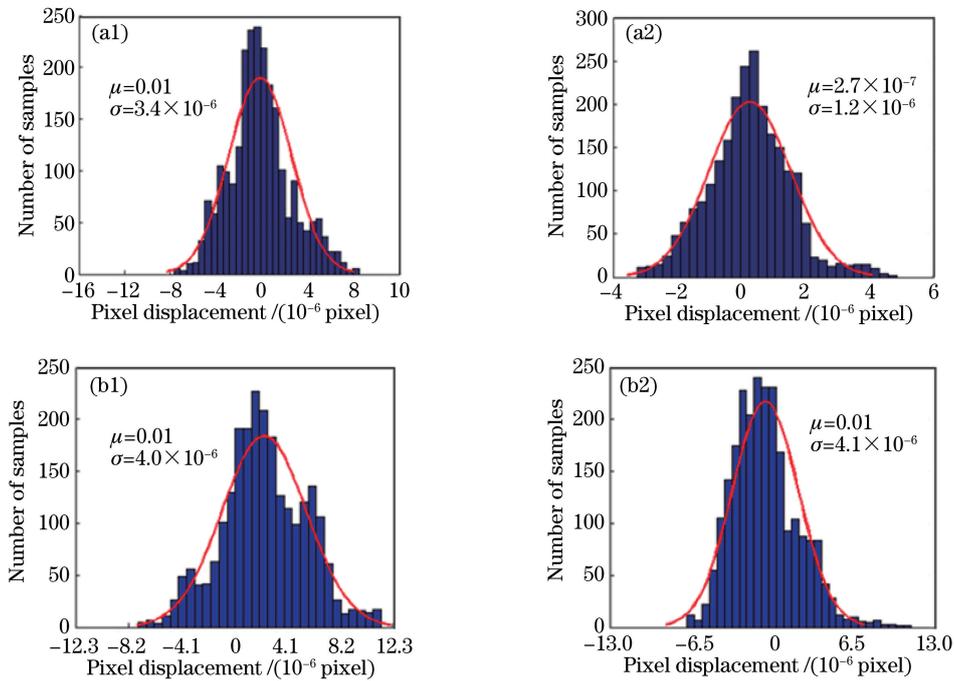


图 5 不同位移得到的计算误差。(a) $p_0=0.01$ pixel, $q_0=0$ pixel; (b) $p_0=0.01$ pixel, $q_0=0.01$ pixel

Fig. 5 Calculation errors obtained by different displacements. (a) $p_0=0.01$ pixel, $q_0=0$ pixel;

(b) $p_0=0.01$ pixel, $q_0=0.01$ pixel

表 1 不同位移的计算结果

Table 1 Calculation results for different

displacement		unit: pixel	
p_0	q_0	$p_0 \text{ error}(\mu \pm 3\sigma)$	$q_0 \text{ error}(\mu \pm 3\sigma)$
0.01	0	$0.01 \pm 1.04 \times 10^{-5}$	$0 \pm 3.6 \times 10^{-6}$
0.01	0.01	$0.01 \pm 1.2 \times 10^{-5}$	$0.01 \pm 1.23 \times 10^{-5}$

3.2 不同信噪比图像的亚像素移动数值实验

给理想散斑图像加入高斯噪声,以分析不同噪声对运动物体的高精度大气扰动检出方法的影响。在 8 位理想散斑图像中,分别加入 10~60 dB

表 2 移动 1/3 pixel 时不同 SNR 的检出误差

Table 2 Detection errors of different SNRs when moving 1/3 pixel

SNR /dB	10	20	30	40	48	50	60
Detection error /pixel	1.9197	0.3635	0.1276	0.0397	0.0144	0.0139	0.0049

表 3 移动 1/30 pixel 时不同 SNR 的检出误差

Table 3 Detection errors of different SNRs when moving 1/30 pixel

SNR /dB	10	20	30	40	50	59	60
Detection error /pixel	2.0389	0.4135	0.1210	0.0438	0.0193	0.0143	0.0139

4 验证方案和结果

4.1 实验方案

为验证运动物体高精度大气扰动检出方法的效果,在实验室内用本方法进行大气扰动信息的背景

的噪声。将加噪声图像分别移动 1/3、1/30 pixel,用本方法进行大气扰动检出,得出不同信噪比(SNR)时的扰动检出误差,结果如表 2、表 3 所示。可以发现,若大气扰动引起的像移量为 1/3 pixel,用本方法进行大气扰动检出并达到理想检出精度时,8 位图像的信噪比需达到 48 dB;若大气扰动引起的像移量为 1/30 pixel,用本方法进行大气扰动检出并达到理想检出精度时,8 位图像的信噪比需达到 59 dB。

纹影成像实验,同时进行了可直接显示流场信息的传统纹影成像实验,并对两个实验的结果进行对比。两个实验中的流场生成条件相同,形成的流场特征也是相同的。实验采用的参数如表 4 所示,使用的观测背景为散斑图像。

表 4 实验采用的参数条件

Table 4 Parameters used in the experiment

Experimental condition	Parameter
Target	high pressure airflow
Background	speckle
Size of air flow outlet / mm	12
Outlet air velocity / Ma	0.9
Imaging distance	distance between flow field center and background 0.2 m distance between image plane center and background 5.8 m
Imaging device	1360×1024; 6.45 μm

4.2 实验结果

在散斑背景下,按图 6(a)所示的背景纹影实验布局,在表 4 的实验条件下开展背景纹影成像实验,获得的实验结果如图 7(a)所示。在相同的气流条

件下,开展传统纹影成像实验,获得的实验结果如图 7(b)所示。可以发现,传统纹影能直接反映流场折射率梯度的变化,获得的图像是流场折射率的梯度分布。

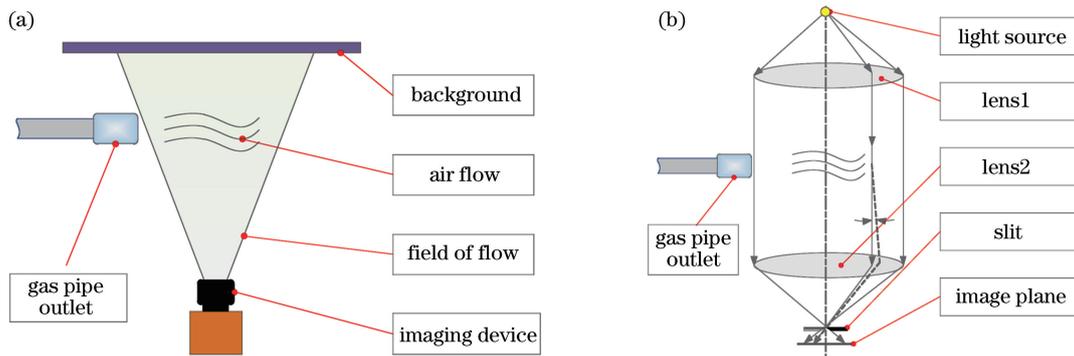


图 6 两种方法的实验布局。(a)背景纹影方法;(b)传统纹影方法

Fig. 6 Experimental layouts of the two methods. (a) Background schlieren method;

(b) traditional schlieren method

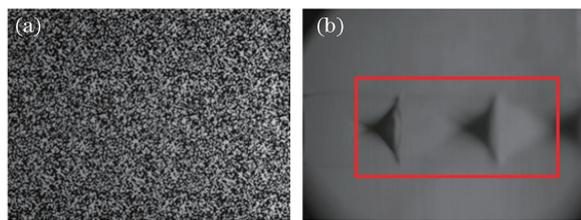


图 7 相同条件下的成像结果。(a)背景纹影图像;

(b)传统纹影图像

Fig. 7 Imaging results under the same conditions.

(a) Background schlieren image; (b) traditional schlieren image

用高精度运动物体大气扰动检出方法,对图 7(a)所示的背景纹影图像进行大气扰动检出,结果如图 8 所示,图 8(a)、图 8(b)分别为出口气流在 x 、 y 方向的折射率梯度分布。可看出,背景纹影反演出的 y 方向折射率梯度场和传统纹影结果一致,这表明本方法对流场反演的结果是准确的。由于背景纹影可同时获得沿两个垂直方向的折射率梯度场,因此可以更稳定地反演出折射率场。

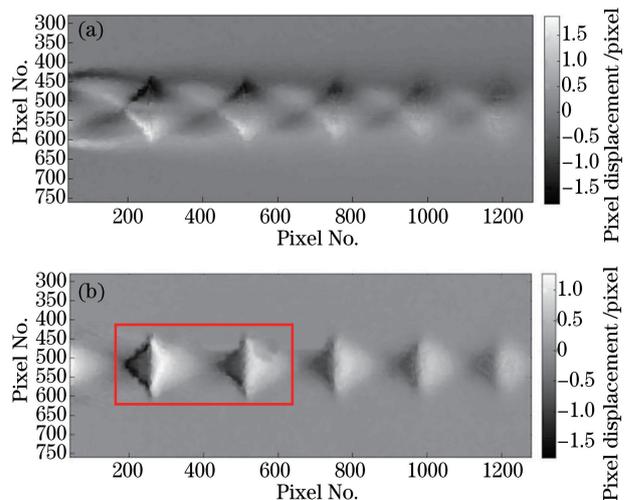


图 8 利用背景纹影图像进行高精度大气扰动检出结果。

(a) x 方向折射率梯度;(b) y 方向折射率梯度

Fig. 8 High precision detection results of atmospheric disturbance using background schlieren image.

(a) Gradient of refractive index in x direction; (b) gradient of refractive index in y direction

5 结 论

建立了基于“整像素十字搜索+N-R 亚像素定位+扰动方程求解”的运动物体高精度大气扰动检出方法,通过对高斯数值散斑进行扰动检出,证明了本方法在理想条件下可实现 ± 0.01 pixel 的扰动检出精度。实验结果表明,本方法得到的大气扰动场在 y 方向的折射率梯度分布与传统纹影成像相同,验证了本方法对大气扰动检出的准确性。由于传统纹影方法无法对流场进行定量显示,即无法对本方法的大气扰动检出精度进行实验验证,后续还将针对该问题开展风洞定量实验研究。

参 考 文 献

- [1] Settles G S. Toepler's schlieren technique [M] // Schlieren and Shadowgraph Techniques. Experimental Fluid Mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2001: 39-75.
- [2] Kline S J. Flow visualization by wolfgang merzkirk [J]. American Scientist, 1975, 63(2): 241.
- [3] Westerweel J. Fundamentals of digital particle image velocimetry[J]. Measurement Science and Technology, 1999, 8(12): 1379-1392.
- [4] Knudsen P J T, Svender J. Doppler radar velocity measurements for wound ballistics experiments[J]. International Journal of Legal Medicine, 1994, 107(1): 1-6.
- [5] Richard H, Raffel M. Principle and applications of the background oriented schlieren (BOS) method[J]. Measurement Science and Technology, 2001, 12(2001): 1576-1585.
- [6] Hargather M J, Settles G S. Natural-background-oriented schlieren imaging [J]. Experiments in Fluids, 2010, 48(1): 59-68.
- [7] Raffel M, Heineck J T, Schairer E T, et al. Background-oriented schlieren imaging for full-scale and in-flight testing [J]. Journal of the American Helicopter Society, 2013, 59(2013): 1-19.
- [8] Schairer E T, Kushner L K, Heineck J T. Measurements of tip vortices from a full-scale UH-60A rotor by retro-reflective background oriented schlieren and stereo photogrammetry [EB/OL]. [2019-11-20]. <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20130013745/downloads/20130013745.pdf>.
- [9] Smith N T, Heineck J T, Schairer E T. Optical flow for flight and wind tunnel background oriented schlieren imaging [C] // 55th AIAA Aerospace Sciences Meeting, January 9-13, 2017, Grapevine, Texas. Reston, Virginia: AIAA, 2017.
- [10] Heineck J T, Banks D, Schairer E T, et al. Background oriented schlieren (BOS) of a supersonic aircraft in flight [C] // AIAA Flight Testing Conference, June 13-17, 2016, Washington, D. C. . Reston, Virginia: AIAA, 2016.
- [11] Hill M A, Haering E A. Flow visualization of aircraft in flight by means of background oriented schlieren using celestial objects [C] // 33rd AIAA Aerodynamic Measurement Technology and Ground Testing Conference, June, 5-9, 2017, Denver, Colorado. Reston, Virginia: AIAA, 2017.
- [12] Haering A, Hill M A. Background oriented schlieren using celestial objects: US9599497B1 [P/OL]. 2017-03-21 [2019-12-03]. <http://www.google.co.in/patents/US9599497B1>.
- [13] Hill M A, Haering E A. Ground-to-air flow visualization using solar calcium-K line background-oriented schlieren[J]. Experiments in Fluids, 2016, 58(1): 1-12.
- [14] NASA captures first air-to-air images of supersonic shockwave interaction in flight [EB/OL]. [2019-12-02]. <http://www.nasa.gov/centers/armstrong/features/supersonic-shockwave-interaction.html>.
- [15] Zhang Y, Su Y, Gao P, et al. Visual monitoring method for atmospheric disturbance of moving objects [J]. Infrared and Laser Engineering, 2020, 49(8): 146-154.
张月, 苏云, 高鹏, 等. 运动物体大气扰流的可视化光学监测方法[J]. 红外与激光工程, 2020, 49(8): 146-154.
- [16] Wu Y C. Theories and application research of computational flow imaging [D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2003: 27-31.
吴颖川. 计算光学流动显示技术理论及应用研究 [D]. 南京: 南京理工大学, 2003: 27-31.
- [17] Lu J A, Shang T, Xie J, et al. Matlab solution of partial differential equation [M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2001: 134-141.
陆君安, 尚涛, 谢进, 等. 偏微分方程的 Matlab 解法 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2001: 134-141.