

旋转双棱镜目标跟踪的非线性问题分析

周远¹, 陈英^{1*}, 蒋国保¹, 汪之又¹, 邹莹畅¹, 范世珣², 范大鹏², 胡放荣³¹长沙学院电子信息与电气工程学院, 湖南 长沙 410022;²国防科技大学智能科学学院, 湖南 长沙 410073;³桂林电子科技大学电子工程与自动化学院, 广西 桂林 541004

摘要 旋转双棱镜用于目标跟踪时,其光束转向与棱镜旋转之间存在非线性关系。基于两步法解算两套棱镜角位置逆向解,沿目标移动方向求其方向导数来计算棱镜转速与光束转向率的比值,分析不同指向目标沿不同方向移动时的棱镜驱动和控制要求。结果表明:对于确定的旋转双棱镜系统,目标跟踪对棱镜驱动和控制要求只取决于当前目标指向偏转角及目标移动方向与径向的夹角;目标沿切向或径向移动,将分别导致系统观测场中央区和边缘区目标跟踪的棱镜旋转控制奇异性;目标跟踪对两棱镜旋转驱动和控制的要求存在微小差异,基于两套逆向解的分析结果无显著差异。

关键词 光学器件; 旋转双棱镜; 目标跟踪; 非线性问题; 非近轴光线追迹

中图分类号 O439

文献标志码 A

doi: 10.3788/AOS202141.1823002

Nonlinearity Problem Analysis of Target Tracking Based on Rotational Double Prisms

Zhou Yuan¹, Chen Ying^{1*}, Jiang Guobao¹, Wang Zhiyou¹, Zou Yingchang¹,
Fan Shixun², Fan Dapeng², Hu Fangrong³¹College of Electronic Communication and Electrical Engineering, Changsha University,
Changsha, Hunan 410022, China;²College of Intelligence Science and Technology, National University of Defense Technology,
Changsha, Hunan 410073, China;³School of Electronic Engineering and Automation, Guilin University of Electronic Technology,
Guilin, Guangxi 541004, China

Abstract For target tracking based on rotational double prisms, the relation between beam steering and prism rotation is nonlinear. Based on the two groups of inverse solutions of prism orientations derived using the two-step method, the directional derivative in the moving direction of the target is calculated to derive the ratio of the rotational speed of the prisms to the slewing rate of beams, which is used to discuss the requirements of tracking targets with different orientations in different moving directions for driving and controlling over prism rotation. It is found that for a given system, the requirements depend only on the deflection angle of the present target orientation and the angle between the target moving direction and the radial direction. The tangential and radial movement of the target may result in control singularity for prism rotation on the inner and outer edges of the field of regard, respectively. The requirements of target tracking for driving and controlling over the rotation of the two prisms are slightly different. There are minor differences in the analysis results based on the two groups of inverse solutions.

收稿日期: 2021-04-15; 修回日期: 2021-05-26; 录用日期: 2021-06-10

基金项目: 国家自然科学基金(61405256, 61905027)、中国博士后科学研究基金(2013M542464)、湖南省自然科学基金(2019JJ50685, 2020JJ5624)、湖南省教育厅科学研究重点项目(19A050)

通信作者: *yingchenccsu@163.com

Key words optical devices; rotational double prisms; target tracking; nonlinear problem; nonparaxial ray tracing
OCIS codes 230.5480; 120.4880; 080.5692

1 引言

旋转双棱镜通过两块棱镜的共轴旋转来实现光束偏转,可用于光束或成像视轴的指向控制^[1-2]。在激光雷达、自由空间激光通信、激光制导等领域^[3-4],旋转双棱镜可用于激光光束扫描、瞄准和目标跟踪。在空间观测、红外对抗、军事侦察、安防监视、机器人视觉引导等领域,旋转双棱镜可用于改变成像视轴^[5],扩大搜索范围,实现目标成像跟踪。旋转双棱镜因其结构紧凑、偏转角度大、指向精度高、动态特性好、可靠性高等优点^[6],在光束扫描、目标瞄准与跟踪等方面具有良好的应用前景^[7]。

旋转双棱镜用于目标跟踪时,需要驱动和控制两棱镜的旋转来控制光束或成像视轴指向,使其瞄准和跟踪目标。对于传统的万向框架型和反射镜型束转机构,光束的转向角与各轴旋转角通常为线性关系^[8-9],这就简化了旋转部件的旋转控制结构。而旋转双棱镜出射光束指向与两棱镜旋转角位置之间的关系为非线性^[10],故随目标移动时其转向角与两棱镜旋转角之间呈非线性关系,导致光束转向率(slewing rate),即光束转向角速度与棱镜转速间呈非线性关系。通过探究这些非线性关系,可实现目标跟踪,为棱镜的旋转驱动控制提供基础支撑数据。

旋转双棱镜出射光束指向与两棱镜旋转角位置之间的非线性关系可归结为正向解和逆向解问题,可用两步法、迭代法、查表法等得到远场精确解析解或近场数值解^[11-13]。已有研究较少涉及出射光束转向角与棱镜旋转角,以及光束转向率与棱镜转速之间的非线性问题。国外学者 Ostaszewski 等^[14-16]提出了这些非线性问题,并对衍生的控制奇异性问题做了简单解释。中国科学院光电技术研究所的李锦英团队在对旋转双棱镜闭环控制方法的探索中,将非线性问题列为首要解决的问题之一^[8, 17-18]。同济大学的李安虎教授团队基于两步法分析了出射光束径向和切向转向率,解释了系统观测场中央和边缘区的控制奇异性问题^[19]。2013 年本课题组针对确定的旋转双棱镜,在系统观测场密集采样目标指向,利用两步法求得对应的棱镜旋转角位置值在系统观测场内的分布情况;通过计算其梯度矢量场,估算满

足各指向点目标跟踪要求的最大棱镜转速及对应的目标移动方向^[20]。该工作虽定量探讨了目标跟踪对棱镜旋转驱动和控制的要求,但仍存在不足,包括:1)棱镜角位置梯度值并不精确等于棱镜转速与光束转向率的比值;2)只分析了符合要求的最大棱镜转速,未涉及不同移动方向目标跟踪的转速要求;3)未能通过解析方法分析棱镜转速与光束转向率的非线性关系。

本文针对径向、切向、任意方向移动目标的光束偏转特点,采用棱镜转速与光束转向率的比值来分析目标跟踪对棱镜旋转驱动和控制的要求。首先,基于两步法反解棱镜的旋转角位置来推导出棱镜转速的表达式,计算并分析光束转向角、转向率及棱镜转速与光束转向率的比值;然后,分析径向和切向移动目标光束偏转特点及其对棱镜转速的要求;最后,将任意方向移动目标的光束转向率分解为径向和切向分量,计算棱镜角位置方向导数来推算棱镜转速与光束转向率之比,从而分析不同指向目标沿不同方向移动时,目标跟踪对棱镜旋转驱动控制的要求。

2 旋转双棱镜的棱镜旋转与出射光束转向之间的关系

图 1(a)为旋转双棱镜光束偏转系统示意图,两折射棱镜 Π_1 、 Π_2 可共轴独立旋转,坐标 z 轴为其共同旋转轴,即系统光轴。棱镜 Π_1 和 Π_2 的折射系数均为 n ,顶角均为 α ,旋转角位置分别表示为 ϕ_1 和 ϕ_2 ,定义为棱镜薄端指向与 x 轴正向之间的夹角,朝 y 轴正向旋转为正值。入射光束逆 z 轴方向入射,出射光束指向用极坐标,即偏转角 Φ 和极角 Θ 描述。通过改变 ϕ_1 、 ϕ_2 ,可使出射光束在系统能达到的最大偏转角 Φ_m 界定的圆锥形观测场内实现任意指向调整。本文分析 Li^[11]提出的 21-12 型系统结构,即两棱镜主截面均为直角三角形,其直角面均垂直于系统光轴并相互紧靠,如图 1(b)所示。

当目标在系统观测场内移动时,通过驱动两棱镜旋转,可使系统出射光束或成像视轴指向目标并随其移动而转向。为控制棱镜旋转以跟踪目标,需明确棱镜旋转角与出射光束转向角,以及棱镜转速与出射光束转向率之间的关系。

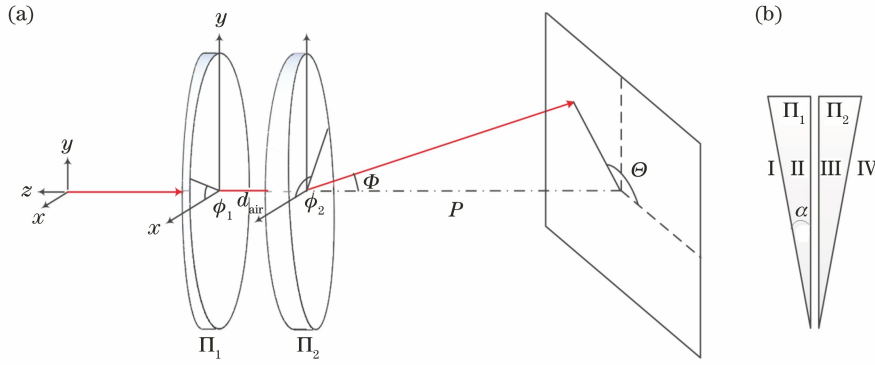


图 1 旋转双棱镜光束偏转系统示意图。(a) 系统参数描述; (b) 系统结构

Fig. 1 Schematic for rotational-double-prism-based beam steering system. (a) Description of the system parameters; (b) system arrangement

2.1 棱镜旋转角位置、旋转角度及转速

由系统出射光束的目标指向推算两棱镜的旋转角位置,即为逆向解问题。可基于矢量形式的斯涅耳定律进行非近轴光线追迹,用两步法解算得到棱

镜角位置的两套解析解。对于 21-12 型系统结构,若极坐标表示的目标指向为 (Φ, Θ) , 则第一套解 $(\phi_1)_{C1}$ 、 $(\phi_2)_{C1}$ 和第二套解 $(\phi_1)_{C2}$ 、 $(\phi_2)_{C2}$ 分别为^[11, 21]

$$\begin{cases} (\phi_1)_{C1} = \Theta - \Theta_0 \\ (\phi_2)_{C1} = \Theta - \Theta_0 + |\Delta\phi| \end{cases}, \quad (1)$$

$$\begin{cases} (\phi_1)_{C2} = \Theta + \Theta_0 \\ (\phi_2)_{C2} = \Theta + \Theta_0 - |\Delta\phi| \end{cases}, \quad (2)$$

$$|\Delta\phi| = \arccos \left\{ \frac{1}{a_1 \tan \alpha} \left[a_2 + \frac{1}{2(a_2 + \cos \Phi)} \left[1 - n^2 - \left(\frac{a_2 + \cos \Phi}{\cos \alpha} \right)^2 \right] \right] \right\}, \quad (3)$$

$$\tan \Theta_0 = \frac{a_3 \sin \alpha \sin |\Delta\phi|}{a_1 + a_3 \sin \alpha \cos |\Delta\phi|}, \quad (4)$$

$$\begin{cases} a_1 = \sin \alpha (\cos \alpha - \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}) \\ a_2 = -(\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \cos \alpha + \sin^2 \alpha) \\ a_3 = -(a_1 \sin \alpha \cos |\Delta\phi| - a_2 \cos \alpha) + \sqrt{1 - n^2 + (a_1 \sin \alpha \cos |\Delta\phi| - a_2 \cos \alpha)^2} \end{cases}. \quad (5)$$

对于确定的系统,棱镜折射系数 n 、顶角 α 均确定,则可由(1)~(5)式计算得到目标指向 (Φ, Θ) 对应的两棱镜角位置的两套解析解均为 Φ 、 Θ 的非线性函数。当系统出射光束随目标移动而转向时,两棱镜角位置需相应改变,即棱镜旋转,其旋转角即为出射光束始末指向对应的棱镜角位置之差,分别为 $\Delta(\phi_1)_{C1}$ 、 $\Delta(\phi_2)_{C1}$ 、 $\Delta(\phi_1)_{C2}$ 、 $\Delta(\phi_2)_{C2}$ 。将这些旋转角除以光束转向时间可得到两棱镜需要达到的转速,即将(1)式和(2)式对时间求导,表达式为

$$\begin{cases} (\omega_1)_{C1} = \frac{d\Theta}{dt} - \frac{d\Theta_0}{dt} \\ (\omega_2)_{C1} = \frac{d\Theta}{dt} - \frac{d\Theta_0}{dt} + \frac{d(|\Delta\phi|)}{dt} \end{cases}, \quad (6)$$

$$\begin{cases} (\omega_1)_{C2} = \frac{d\Theta}{dt} + \frac{d\Theta_0}{dt} \\ (\omega_2)_{C2} = \frac{d\Theta}{dt} + \frac{d\Theta_0}{dt} - \frac{d(|\Delta\phi|)}{dt} \end{cases}. \quad (7)$$

2.2 系统出射光束指向、转向角及转向率

系统出射光束在圆锥形三维空间内转动,其始末指向可用单位方向矢量 s_1 、 s_2 表示,其转向角 $\Delta\Psi$ 为 s_1 到 s_2 的角度,如图 2(a)所示。在二维极坐标平面,采用偏转角 Φ 和极角 Θ 来描述光束指向,采用两个极坐标值的改变量 $\Delta\Phi$ 、 $\Delta\Theta$ 来描述光束转向角,如图 2(b)所示。

始末指向 s_1 、 s_2 的方向余弦分量可表示为

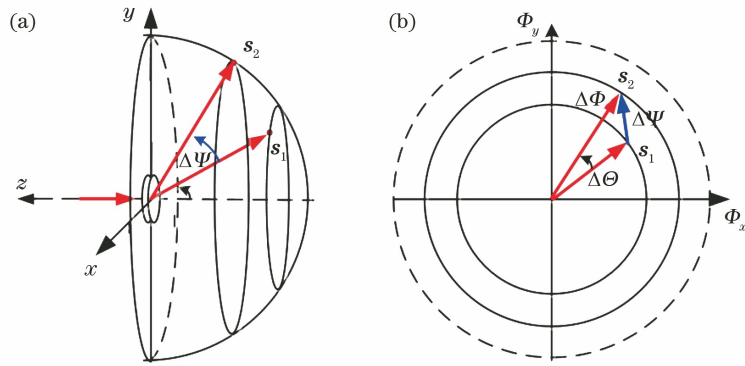


图 2 出射光束转向角 $\Delta\Psi$ 。(a) 三维空间光束转向示意图；(b) 极坐标中光束转向示意图

Fig. 2 Slew angle $\Delta\Psi$ of outgoing beam. (a) Schematic for beam steering in three-dimensional space; (b) schematic for beam steering in polar coordinate

$$\begin{cases} K_1 = \sin \Phi \cos \Theta \\ L_1 = \sin \Phi \sin \Theta \\ M_1 = -\cos \Phi \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} K_2 = \sin(\Phi + \Delta\Phi) \cos(\Theta + \Delta\Theta) \\ L_2 = \sin(\Phi + \Delta\Phi) \sin(\Theta + \Delta\Theta) \\ M_2 = -\cos(\Phi + \Delta\Phi) \end{cases} \quad (9)$$

光束转向角 $\Delta\Psi$ 的大小可通过 s_1 和 s_2 的数量积来计算,即

$$\cos \Delta\Psi = s_1 \cdot s_2 = K_1 K_2 + L_1 L_2 + M_1 M_2. \quad (10)$$

将(8)式和(9)式代入(10)式,可得

$$\Delta\Psi = \arccos \left[\cos \Delta\Phi - 2 \sin \Phi \sin(\Phi + \Delta\Phi) \sin^2 \frac{\Delta\Theta}{2} \right]. \quad (11)$$

由(11)式可知,光束转向角的大小不但依赖于光束指向极坐标值的变化量 $\Delta\Phi$ 、 $\Delta\Theta$,还与光束的初始指向偏转角 Φ 有关。跟踪目标时,光束转向角 $\Delta\Psi$ 及转动方向需由目标路径按照始末指向来计算。将光束转向角 $\Delta\Psi$ 除以光束转向时间可得光束转向率 ω_{slew} 。

2.3 棱镜转速与光束转向率之比

对于目标跟踪应用,需要分析目标连续平滑跟踪所要求的棱镜转速,以便于评估目标跟踪对棱镜驱动电机的驱动能力及棱镜旋转控制的要求。为此,定义棱镜转速与光束转向率之比 $(M_1)_{C1}$ 、 $(M_2)_{C1}$ 及 $(M_1)_{C2}$ 、 $(M_2)_{C2}$,其表达式为

$$\begin{cases} (M_1)_{C1} = \frac{(\omega_1)_{C1}}{\omega_{\text{slew}}} = \frac{\Delta(\phi_1)_{C1}}{\Delta\Psi} \\ (M_2)_{C1} = \frac{(\omega_2)_{C1}}{\omega_{\text{slew}}} = \frac{\Delta(\phi_2)_{C1}}{\Delta\Psi} \end{cases}, \quad (12)$$

$$\begin{cases} (M_1)_{C2} = \frac{(\omega_1)_{C2}}{\omega_{\text{slew}}} = \frac{\Delta(\phi_1)_{C2}}{\Delta\Psi} \\ (M_2)_{C2} = \frac{(\omega_2)_{C2}}{\omega_{\text{slew}}} = \frac{\Delta(\phi_2)_{C2}}{\Delta\Psi} \end{cases}. \quad (13)$$

显然,棱镜转速与光束转向率之比表征了目标跟踪应用对旋转双棱镜系统中驱动电机驱动能力及棱镜旋转控制的要求。该比值越大,对驱动能力和旋转控制的要求越高。

在传统万向框架型和反射面型光束偏转机构中,转向角 $\Delta\Psi$ 通常与旋转部件的旋转角呈线性关系,其光束转向率与旋转部件转速间的关系也是线性的,其比值通常为恒定值。但对于旋转双棱镜系统,转向角 $\Delta\Psi$ 与两棱镜旋转角 $\Delta\phi_1$ 、 $\Delta\phi_2$ 之间并不存在线性关系,光束转向率与两棱镜转速间的关系呈现非线性,导致其比值为一个变值。当系统用于目标跟踪时,若目标在系统观测场内的不同指向位置,或者在同一指向位置但沿不同方向移动,则即使出射光束随目标偏转相同角度 $\Delta\Psi$,要求的棱镜旋转角 $\Delta\phi_1$ 、 $\Delta\phi_2$ 也可能不同。因此,针对不同目标指向位置 and 不同目标移动方向,目标跟踪对棱镜转速的要求可能不同,即棱镜转速与光束转向率的比值随目标指向位置和移动方向的变化而改变。目标跟踪应用中,一些目标沿已知的轨迹运动,另一些运动轨迹未知。不管哪种情况,目标的指向位置时刻改变,其移动方向也可能时刻变化。因此,应该结合目标的当前指向位置、目标的移动方向来分析棱镜转速与光束转向率的比值变化。

3 旋转双棱镜出射光束指向随目标径向和切向移动分析

3.1 出射光束指向随目标径向移动分析

沿径向移动的目标在平行于由出射光束和系统

光轴确定的平面内运动,目标指向的极角 Θ 保持恒定,即 $d\Theta/dt=0$,而偏转角 Φ 随时间变化,如图 3 所示。对比(6)式和(7)式可知

$$\begin{cases} (\omega_1)_{c1} = -(\omega_1)_{c2} = -\frac{d\Theta_0}{dt} \\ (\omega_2)_{c1} = -(\omega_2)_{c2} = -\frac{d\Theta_0}{dt} + \frac{d(|\Delta\phi|)}{dt} \end{cases}, \quad (14)$$

式中:负号表示棱镜旋转方向相反。由(14)式可知,当系统跟踪沿径向移动的目标时,对两套解分析的

棱镜转速大小要求相同,只是旋转方向相反。

由(11)式可知,由于 $\Delta\Theta=0$,光束转向角 $\Delta\Psi=\Delta\Phi$,即光束转向角等于偏转角的改变量。这可以参照图 3,根据径向运动的特点理解。出射光束跟随径向运动目标偏转,是在光束与系统光轴确定的平面(子午面)内偏转,其转向角等于光束偏转角的改变量。系统出射光束指向随沿径向移动的目标光束的转向率 $(\omega_{slew})_R$ 为

$$(\omega_{slew})_R = \frac{\Delta\Psi}{\Delta t} = \frac{d\Phi}{dt}. \quad (15)$$

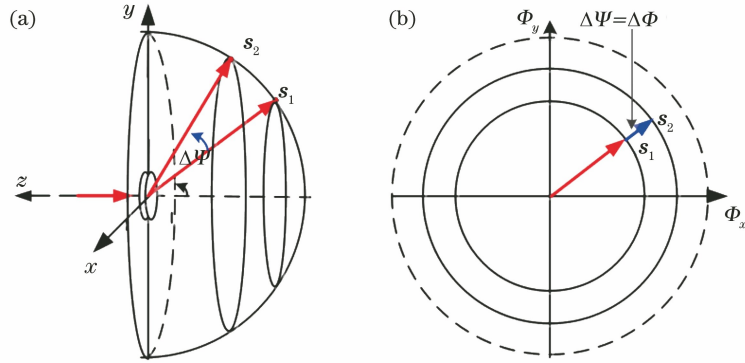


图 3 径向移动目标指向的转向角 $\Delta\Psi$ 。(a)三维空间光束转向示意图;(b)极坐标中光束转向示意图
Fig. 3 Slew angle $\Delta\Psi$ of direction for target with radial movement. (a) Schematic for beam steering in three-dimensional space; (b) schematic for beam steering in polar coordinate

将(14)式和(15)式代入(12)式和(13)式,可得两棱镜转速与光束转向率之比:

$$\begin{cases} (M_1)_{c1} = -(M_1)_{c2} = -\frac{d\Theta_0}{d\Phi} \\ (M_2)_{c1} = -(M_2)_{c2} = -\frac{d\Theta_0}{d\Phi} + \frac{d(|\Delta\phi|)}{d\Phi} \end{cases} \quad (16)$$

对于任一光束偏转角 Φ ,可由(3)式和(4)式推算出 Θ_0 和 $|\Delta\phi|$ 随光束偏转角 Φ 的变化关系,然后将其对 Φ 求导,代入(16)式即可求得两棱镜转速与光束转向率之比。

本研究分析了作为可见光和红外波段光束偏转应用典型例子的玻璃和锗材料的旋转双棱镜。玻璃棱镜材料为 K9 玻璃,在 587.6 nm 波长下的折射系数 $n=1.5163$ ^[22],棱镜顶角 $\alpha=10^\circ$,可计算得到系统的最大偏转角 $\Phi_m=10.61^\circ$ 。锗棱镜在 11 μm 波长下的折射系数 $n=4.0$ ^[23],顶角 $\alpha=8^\circ$,可计算得到系统的最大偏转角为 $\Phi_m=67.489^\circ$ 。图 4(a)、(b)分别展示了玻璃棱镜和锗棱镜系统的棱镜转速与光束转向率之比。可以看出, $(M_1)_{c1}$ 、 $(M_2)_{c1}$ 的绝对值随 Φ 的增加而增大。当 Φ 接近最大值 Φ_m ,即系统跟踪目标到达观测场边缘时, $(M_1)_{c1}$ 、

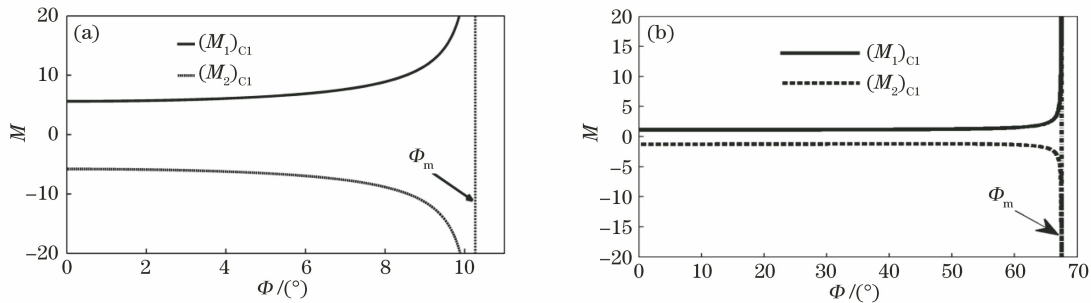


图 4 径向移动目标跟踪中棱镜转速与光束转向率之比。(a)玻璃棱镜系统;(b)锗棱镜系统
Fig. 4 Ratio of prisms' rotational speed to beam slewing rate for tracking target with radial movement. (a) Glass prism system; (b) germanium prism system

$(M_2)_{C1}$ 的绝对值急剧增加直至趋向无穷。对比锗棱镜和玻璃棱镜的分析结果可知, 锗棱镜系统的棱镜转速与径向光束转向率的比值比玻璃系统的小得多。这是因为锗的折射系数大, 偏转力大, 在同样的棱镜转速下, 出射光束转向角大。

3.2 出射光束指向随目标切向移动分析

对于沿切向移动的目标, 出射光束指向的极角 Θ 随时间改变而偏转角 Φ 保持恒定, 如图 5 所示。由(3)~(5)式可知, 对于确定的旋转双棱镜系统, Θ_0 和 $\Delta\phi$ 只取决于光束的偏转角 Φ , 与极角 Θ 无

关。故对于切向移动的目标, Θ_0 和 $\Delta\phi$ 不随时间变化, 即 $d\Theta_0/dt=0, d(|\Delta\phi|)/dt=0$ 。故由(6)、(7)式可知, 无论针对哪套逆向解, 棱镜 Π_1 和 Π_2 的转速都要求等于 $d\Theta/dt$, 即

$$(\omega_1)_{C1} = (\omega_2)_{C1} = (\omega_1)_{C2} = (\omega_2)_{C2} = d\Theta/dt. \quad (17)$$

该结果可以做如下解释: 当光束随沿切向运动的目标偏转时, 光束偏转角不变, 两棱镜保持相对旋转方位不变, 一起随目标旋转, 因此两棱镜的转速均等于光束极角的变化率。

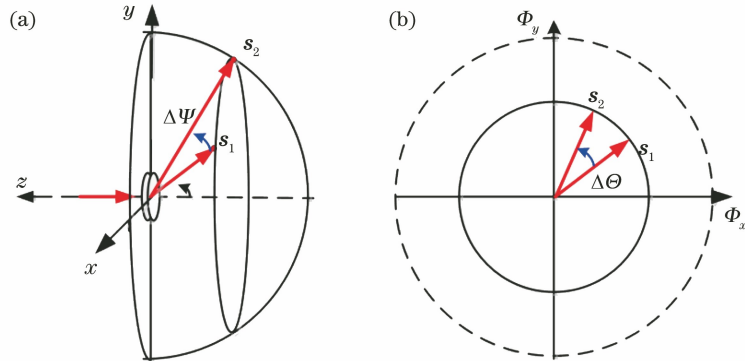


图 5 切向移动目标指向的转向角 $\Delta\Psi$ 。(a)三维空间光束转向示意图;(b)极坐标中光束转向示意图

Fig. 5 Slewing angle $\Delta\Psi$ of direction for target with tangential movement. (a) Schematic for beam steering in three-dimensional space; (b) schematic for beam steering in polar coordinate

由(11)式可知, 由于出射光束跟随沿切向移动的目标偏转时偏转角 Φ 不变, 即 $\Delta\Phi=0$, 则光束转向角可表示为

$$\cos \Delta\Psi = 1 - 2\sin^2 \Phi \sin^2 \left(\frac{\Delta\Theta}{2} \right). \quad (18)$$

在分析出射光束瞬时转向率时, 其极角及转向角改变量 $\Delta\Theta, \Delta\Psi$ 均很小, 对(18)式的正弦、余弦因子作小角近似, 即 $\cos\Delta\Psi \approx 1 - (\Delta\Psi)^2/2$, $\sin(\Delta\Theta/2) \approx \Delta\Theta/2$, 则可得

$$\Delta\Psi/\Delta\Theta = \sin \Phi. \quad (19)$$

即系统出射光束指向随目标作切向移动的光束的转向率 $(\omega_{slew})_T$ 可表示为

$$(\omega_{slew})_T = \sin \Phi \cdot (d\Theta/dt). \quad (20)$$

将(20)、(17)式代入(12)、(13)式, 可得到两棱镜转速与光束转向率之比:

$$(M_1)_{C1} = (M_2)_{C1} = (M_1)_{C2} = (M_2)_{C2} = \frac{1}{\sin \Phi}. \quad (21)$$

因此, 对于切向运动目标的跟踪, 棱镜转速与光束转向率之比仅取决于光束的偏转角, 而与系统本身无关。

图 6 展示了切向运动目标跟踪中棱镜转速与

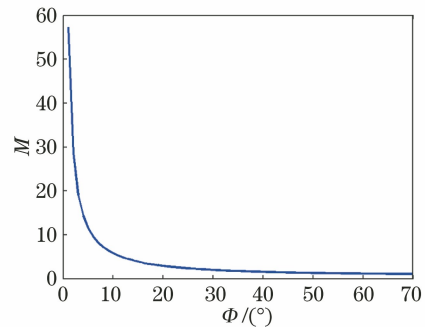


图 6 切向运动目标跟踪中棱镜转速与光束转向率之比的变化

Fig. 6 Change of ratio of prisms' rotational speed to beam slewing rate for tracking target with tangential movement

光束转向率之比随目标光束偏转角的变化关系。目标光束偏转角越小, 比值越大, 连续平滑跟踪对棱镜驱动和控制的要求越高。对于在系统观测场中心, 即系统光轴附近作切向运动的目标, 系统出射光束的偏转角较小, 导致棱镜转速与光束转向率比值很大, 棱镜驱动和控制难度较大。这可以参照图 5, 根据切向运动的特点理解: 当目标光束偏转角较小时, 出射光束随目标沿着较小半顶角 (即偏转角 Φ) 的圆锥面绕系统光轴旋转。棱镜转速始终等于光束极角的变化率, 而光束转向角很

小(最大仅为 2Φ)，光束转向率小，导致棱镜转速与光束转向率的比值很大。

4 旋转双棱镜出射光束指向随目标沿任意路径移动的分析

当系统出射光束随目标沿任意路径移动时，光束转向率及要求的两棱镜转速均与目标的当前指向、目标的移动方向有关。需要根据目标移动轨迹，分析轨迹上指向点在观测场中的位置以及此时目标移动方向来计算棱镜转速与光束转向率之比。

为不失一般性，假设出射光束跟随目标从一个指向 s_1 转向临近的另一指向 s_2 ，光束偏转角和极角改变一个小角度 $\Delta\Phi$ 、 $\Delta\Theta$ ，如图 7 所示。光束转向率可先由(11)式算出光束转向角 $\Delta\Psi$ 后，再除以光束转向时间得到。可以看出，不同的光束转动方向对应不同的 $\Delta\Phi$ 、 $\Delta\Theta$ 值，从而得到不同的光束转向率。光束瞬时转向率可定义为转向时间 Δt 无穷小时的转向率，表示为

$$\omega_{\text{slew}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\Psi}{\Delta t} \right) \quad (22)$$

此时，光束转向角 $\Delta\Psi$ 以及光束偏转角和极角的改变量 $\Delta\Phi$ 、 $\Delta\Theta$ 均为无穷小。在(11)式中，将这些角度的正弦和余弦值应用小角近似，即

$$\begin{cases} \cos \Delta\Psi \approx 1 - (\Delta\Psi)^2/2 \\ \cos \Delta\Phi \approx 1 - (\Delta\Phi)^2/2, \\ \sin(\Delta\Theta/2) \approx \Delta\Theta/2 \end{cases} \quad (23)$$

可得

$$\Delta\Psi \approx \sqrt{\Delta^2\Phi + (\sin \Phi \cdot \Delta\Theta)^2} \quad (24)$$

分析(24)式和(22)式并对照(15)式和(20)式可知，光束瞬时转向率可分解为径向转向率 $(\omega_{\text{slew}})_R$ 和切向转向率 $(\omega_{\text{slew}})_T$ ，即在径向存在关系

$$\left(\frac{d\Phi}{d\Psi} \right)_R = 1, \quad (25)$$

在切向存在关系

$$\left(\frac{d\Theta}{d\Psi} \right)_T = \frac{1}{\sin \Phi} \quad (26)$$

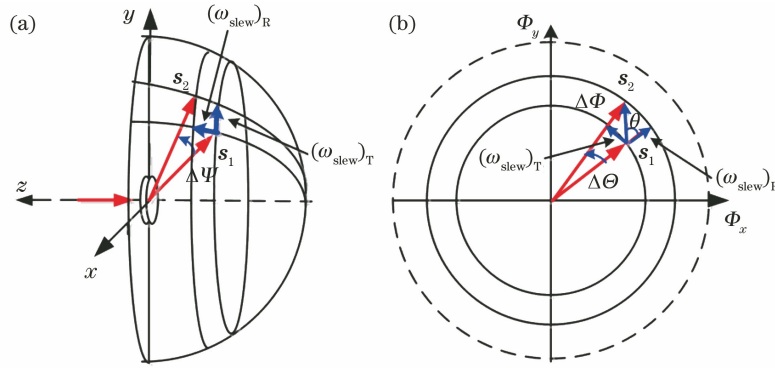


图 7 出射光束瞬时转向率的分解。(a)三维空间光束转向示意图;(b)极坐标中光束转向示意图

Fig. 7 Decomposition of instantaneous slewing rate of outgoing beam. (a) Schematic for beam steering in three-dimensional space; (b) schematic for beam steering in polar coordinate

若目标在观察场中的移动方向与径向的夹角为 θ ，系统出射光束跟随目标旋转时，要求的棱镜转速与光束转向率之比即为棱镜旋转角位置函数在观测

场内沿目标移动方向的方向导数。联合(12)、(13)式和(25)、(26)式求解，可得到棱镜转速与光束转向率之比：

$$(M_1)_{c1} = \frac{d(\phi_1)_{c1}}{d\Psi} = \frac{\partial(\phi_1)_{c1}}{\partial\Phi} \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Psi} + \frac{\partial(\phi_1)_{c1}}{\partial\Theta} \cdot \frac{\Delta\Theta}{\Delta\Psi} = \frac{\partial(\phi_1)_{c1}}{\partial\Phi} \cdot \cos \theta + \frac{\partial(\phi_1)_{c1}}{\partial\Theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\sin \Phi}, \quad (27)$$

$$(M_2)_{c1} = \frac{d(\phi_2)_{c1}}{d\Psi} = \frac{\partial(\phi_2)_{c1}}{\partial\Phi} \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Psi} + \frac{\partial(\phi_2)_{c1}}{\partial\Theta} \cdot \frac{\Delta\Theta}{\Delta\Psi} = \frac{\partial(\phi_2)_{c1}}{\partial\Phi} \cdot \cos \theta + \frac{\partial(\phi_2)_{c1}}{\partial\Theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\sin \Phi}, \quad (28)$$

$$(M_1)_{c2} = \frac{d(\phi_1)_{c2}}{d\Psi} = \frac{\partial(\phi_1)_{c2}}{\partial\Phi} \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Psi} + \frac{\partial(\phi_1)_{c2}}{\partial\Theta} \cdot \frac{\Delta\Theta}{\Delta\Psi} = \frac{\partial(\phi_1)_{c2}}{\partial\Phi} \cdot \cos \theta + \frac{\partial(\phi_1)_{c2}}{\partial\Theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\sin \Phi}, \quad (29)$$

$$(M_2)_{c2} = \frac{d(\phi_2)_{c2}}{d\Psi} = \frac{\partial(\phi_2)_{c2}}{\partial\Phi} \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Psi} + \frac{\partial(\phi_2)_{c2}}{\partial\Theta} \cdot \frac{\Delta\Theta}{\Delta\Psi} = \frac{\partial(\phi_2)_{c2}}{\partial\Phi} \cdot \cos \theta + \frac{\partial(\phi_2)_{c2}}{\partial\Theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\sin \Phi} \quad (30)$$

对照(1)、(2)式并考虑到 Θ_0 、 $|\Delta\phi|$ 均只与 Φ 有关而与 θ 无关,可知

$$\begin{cases} \frac{\partial(\phi_1)_{C1}}{\partial\Phi} = -\frac{\partial(\phi_1)_{C2}}{\partial\Phi} = -\frac{d\Theta_0}{d\Phi}, \\ \frac{\partial(\phi_1)_{C1}}{\partial\theta} = \frac{\partial(\phi_1)_{C2}}{\partial\theta} = 1 \end{cases}, \quad (31)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial(\phi_2)_{C1}}{\partial\Phi} = -\frac{\partial(\phi_2)_{C2}}{\partial\Phi} = -\frac{d\Theta_0}{d\Phi} + \frac{d(|\Delta\phi|)}{d\Phi}, \\ \frac{\partial(\phi_2)_{C1}}{\partial\theta} = \frac{\partial(\phi_2)_{C2}}{\partial\theta} = 1 \end{cases}. \quad (32)$$

仔细分析(27)~(30)式可知, $(M_1)_{C1}$ 、 $(M_2)_{C1}$ 、 $(M_1)_{C2}$ 、 $(M_2)_{C2}$ 只与 Φ 、 θ 有关,而与 Θ 无关,说明对于相同偏转角而不同极角指向上的目标,目标跟踪对棱镜旋转驱动和控制的要求相同。目标指向的当前偏转角不同,或目标沿不同方向移动(即 θ 不同),目标跟踪时对棱镜旋转驱动和控制的要求不同。

分析目标跟踪对棱镜旋转驱动和控制的要求时,可由(3)、(4)式推算出 Θ_0 和 $\Delta\phi$ 随光束偏转角 Φ 的变化关系,并将其对 Φ 求导,得到 $d\Theta_0/d\Phi$ 、 $d(|\Delta\phi|)/d\Phi$ 的值,和 θ 值一起先后代入(31)、(32)式以及(27)~(30)式,即可求出 $(M_1)_{C1}$ 、 $(M_2)_{C1}$ 、 $(M_1)_{C2}$ 、 $(M_2)_{C2}$ 。由这些比值的大小可比较不同偏转角、不同移动方向目标跟踪对棱镜旋转驱动和控制的要求。

图 8、图 9 所示分别为针对第一套和第二套逆向解,玻璃棱镜系统用于目标跟踪时要求的棱镜转速与光束转向率之比随目标指向偏转角 Φ 的变化。比较图 8、图 9 的相应子图,可对比分析基于第一套和第二套逆向解的计算结果。可以看到:各相应子图中实线和虚线位置相互对换,即基于第一套逆向解计算得出的 $(M_1)_{C1}$ 与基于第二套逆向解计算得出的 $(M_2)_{C2}$ 随目标指向偏转角 Φ 的变化大致相同,而基于第一套逆向解计算得出的 $(M_2)_{C1}$ 与基于第二套逆向解计算得出的 $(M_1)_{C2}$ 随目标指向偏转角 Φ 的变化也大致相同。因此,旋转双棱镜用于目标跟踪时,无论基于哪套逆向解来跟踪目标,对棱镜旋转驱动和控制的要求无显著差异,只是两块棱镜的转速与光束转向率比值要求相互交换。

分别比较图 8 和图 9 中 θ 值相差 180° 的两幅子图,此时目标移动方向相反,类似于图 10 中的方向 D_1 与方向 D_3 、方向 D_2 与方向 D_4 , $(M_1)_{C1}$ 、 $(M_2)_{C1}$ 或 $(M_1)_{C2}$ 、 $(M_2)_{C2}$ 值在两对子图中符号相反而

绝对值相等,说明两种情况下对两棱镜旋转驱动控制的要求相同,仅旋转方向相反。

在图 8(a)、(b)或图 9(a)、(b)中 θ 为 0° 和 180° ,目标沿径向移动,所得结果与图 4(a)相同,即 $(M_1)_{C1}$ 、 $(M_2)_{C1}$ 、 $(M_1)_{C2}$ 、 $(M_2)_{C2}$ 的绝对值随目标指向偏转角 Φ 的增大而增加。当 Φ 接近最大值 Φ_m 时,其值急剧增加直至趋向无穷大,即系统观测场边缘区域存在控制奇点。

在图 8(g)、(h)或图 9(g)、(h)中 θ 为 90° 和 270° ,目标沿切向移动,所得结果与图 6 类似,即 $(M_1)_{C1}$ 、 $(M_2)_{C1}$ 、 $(M_1)_{C2}$ 、 $(M_2)_{C2}$ 的绝对值随目标指向偏转角 Φ 的减小而增加。对于在系统观测场中心附近区域,即系统光轴附近作切向运动的目标,由于系统出射光束的偏转角 Φ 趋于 0,因此棱镜转速与光束转向率的比值趋向无穷大,即系统观测场中央区域存在控制奇点。

在图 8 或图 9 的其他子图中,目标运动包含径向和切向分量。当目标在系统观测场边缘区域时,径向运动分量导致棱镜转速与光束转向率的比值急剧增大;当目标在系统观测场中心附近区域时,切向运动分量导致棱镜转速与光束转向率的比值急剧增大。系统观测场边缘区域和中央区域均存在控制奇点。

比较图 8 或图 9 的子图(c) ($\theta=30^\circ$)和(k) ($\theta=150^\circ$)、(e) ($\theta=60^\circ$)和(i) ($\theta=120^\circ$)、(d) ($\theta=210^\circ$)和(l) ($\theta=330^\circ$)、(f) ($\theta=240^\circ$)和(j) ($\theta=300^\circ$)可知,所对比的两图中实线和虚线位置相互对换,即一子图中的 $(M_1)_{C1}$ 值与另一子图中的 $(M_2)_{C2}$ 值随目标指向偏转角 Φ 的变化大致相同。虽然图 8、图 9 只针对几种夹角展示了以上变化规律,但大量的计算结果表明,若目标移动方向与径向的夹角 θ 相同,以上规律均成立。因此,旋转双棱镜用于目标跟踪时,对于相同偏转角 Φ 指向上的目标,在与径向夹角相同的目标运动方向(如图 10 中的方向 D_1 、方向 D_2 、方向 D_3 、方向 D_4)上,对棱镜旋转驱动和控制的要求大致相同,只是两块棱镜的转速与光束转向率的比值要求相互交换,或者棱镜的旋转方向相反。

归纳上述研究结果,可对旋转双棱镜目标跟踪应用中棱镜转速与光束转向率的比值随目标指向及运动方向的变化进行总体分析,且只需计算目标指向偏转角 Φ 在 $0\sim\Phi_m$ 内变化、目标移动方向与径向夹角 θ 在 $0^\circ\sim360^\circ$ 变化时棱镜转速与光束转向率之比的变化。需要关注的是该比值的大小,故只需比较其绝对值。针对玻璃棱镜系统,以等值线展示了 $(M_1)_{C1}$ 、 $(M_2)_{C1}$ 、 $(M_1)_{C2}$ 、 $(M_2)_{C2}$ 的绝对值随目

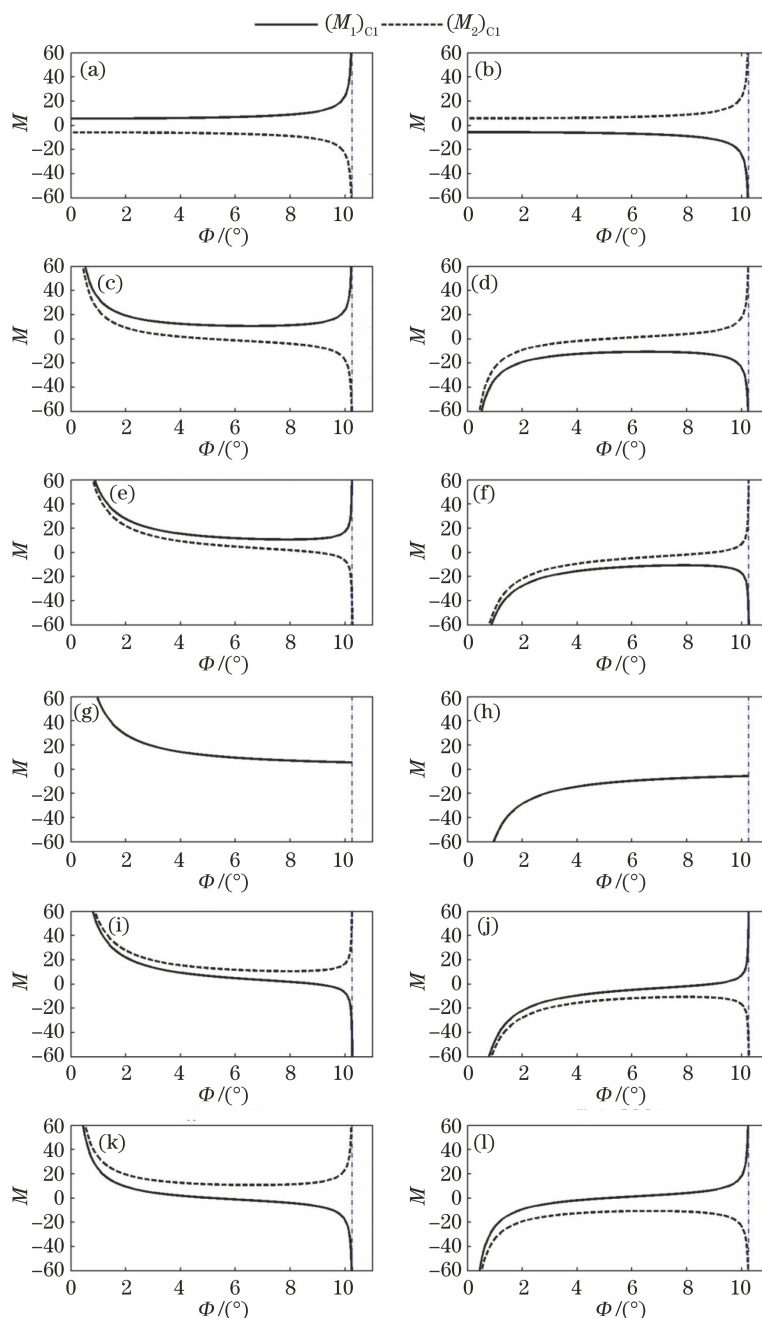


图 8 玻璃棱镜系统用于目标跟踪时要求的棱镜转速与光束转向率之比(对于第一套逆向解)。(a) $\theta=0^\circ$; (b) $\theta=180^\circ$; (c) $\theta=30^\circ$; (d) $\theta=210^\circ$; (e) $\theta=60^\circ$; (f) $\theta=240^\circ$; (g) $\theta=90^\circ$; (h) $\theta=270^\circ$; (i) $\theta=120^\circ$; (j) $\theta=300^\circ$; (k) $\theta=150^\circ$; (l) $\theta=330^\circ$
 Fig. 8 Ratio of prisms' rotational speed to beam slewing rate for tracking target with the glass prism system (based on the first group of inverse solutions). (a) $\theta=0^\circ$; (b) $\theta=180^\circ$; (c) $\theta=30^\circ$; (d) $\theta=210^\circ$; (e) $\theta=60^\circ$; (f) $\theta=240^\circ$; (g) $\theta=90^\circ$; (h) $\theta=270^\circ$; (i) $\theta=120^\circ$; (j) $\theta=300^\circ$; (k) $\theta=150^\circ$; (l) $\theta=330^\circ$

标指向偏转角 Φ 及运动方向相对于径向的夹角 θ 的变化(图 11)。图 11(a)展示的 $(M_1)_{C1}$ 与图 11(d) 展示的 $(M_2)_{C2}$ 的等值线大致相同,而图 11(b)展示的 $(M_2)_{C1}$ 与图 11(c)展示的 $(M_1)_{C2}$ 的等值线大致相同。这再次说明,无论基于哪套逆向解来跟踪目标,对棱镜旋转驱动和控制的要求无显著差异,只是两棱镜的转速与光束转向率的比值要求互换。

在图 11 各子图的 A 点附近区域,棱镜转速与光束转向率的比值较大,这是因为该区域目标指向偏转角 Φ 较小,目标在系统观测场中央区,即系统光轴附近,而目标运动方向相对于径向的夹角 θ 趋向 90° 和 270° ,即运动方向趋向切向,导致棱镜旋转驱动和控制的难度增大。在图 11 各子图的 B 点附近区域,棱镜转速与光束转向率的比值也较大,这是

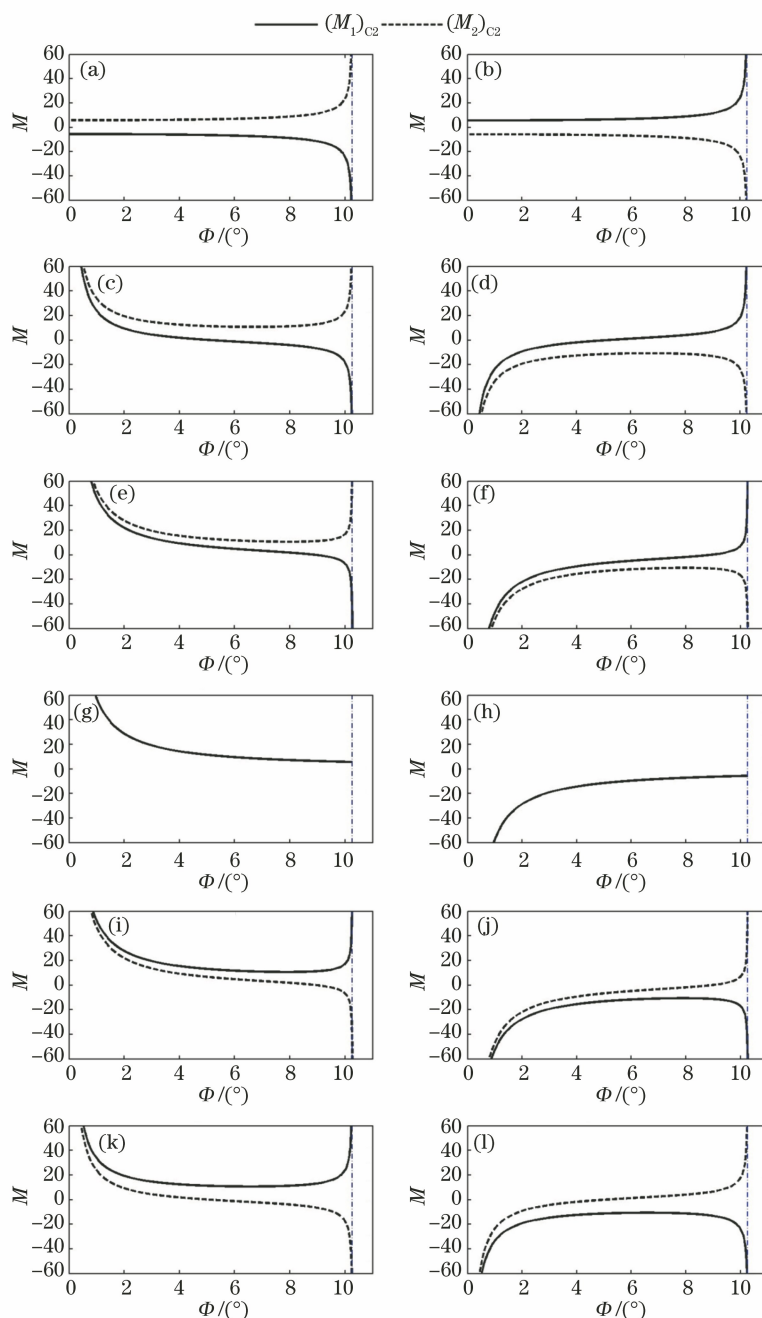


图 9 玻璃棱镜系统用于目标跟踪时要求的棱镜转速与光束转向率之比(对于第二套逆向解)。(a) $\theta=0^\circ$; (b) $\theta=180^\circ$; (c) $\theta=30^\circ$; (d) $\theta=210^\circ$; (e) $\theta=60^\circ$; (f) $\theta=240^\circ$; (g) $\theta=90^\circ$; (h) $\theta=270^\circ$; (i) $\theta=120^\circ$; (j) $\theta=300^\circ$; (k) $\theta=150^\circ$; (l) $\theta=330^\circ$
 Fig. 9 Ratio of prisms' rotational speed to beam slewing rate for tracking target with the glass prism system (based on the second group of inverse solutions). (a) $\theta=0^\circ$; (b) $\theta=180^\circ$; (c) $\theta=30^\circ$; (d) $\theta=210^\circ$; (e) $\theta=60^\circ$; (f) $\theta=240^\circ$; (g) $\theta=90^\circ$; (h) $\theta=270^\circ$; (i) $\theta=120^\circ$; (j) $\theta=300^\circ$; (k) $\theta=150^\circ$; (l) $\theta=330^\circ$

因为该区域的目标指向偏转角 Φ 较大,目标在系统观测场边缘,而夹角 θ 趋向 0° 、 180° 和 360° ,即运动方向趋向径向,从而增加了棱镜旋转驱动和控制的难度。

通过对比图 11(a)、(b),或比较图 11(c)、(d),可整体比较两棱镜的旋转和驱动控制要求。将图 11(b) 展示的 $(M_2)_{C1}$ 等值线图垂直翻转,即与

图 11(a) 展示的 $(M_1)_{C1}$ 等值线图大致相同。同样,将图 11(d) 展示的 $(M_2)_{C2}$ 等值线图垂直翻转,即与图 11(c) 展示的 $(M_1)_{C2}$ 等值线图类似。这说明目标沿着 θ 方向移动时一棱镜的转速和光束转向率之比,与目标沿着 $360^\circ-\theta$ 方向移动时另一棱镜的转速和光束转向率之比相等。总体来看,为在整个系统观测场内跟踪目标,对两棱镜旋转驱动和控制的

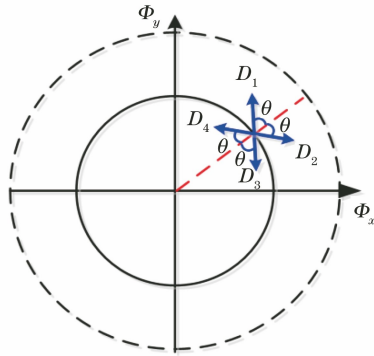


图 10 与径向夹角 θ 相同的目标运动方向
Fig. 10 Moving direction of target with the same angle θ to radial direction

要求相同。

图 12(a)展示了针对玻璃棱镜系统,旋转双棱镜用于目标跟踪时要求的棱镜转速与光束转向率之比的最大值 $|M|_m$, 对于 $(M_1)_{c1}$ 、 $(M_2)_{c1}$ 、 $(M_1)_{c2}$ 、 $(M_2)_{c2}$, $|M|_m$ 值随 Φ 的变化曲线大致重合, 其细

微差异展示于图 12(b)。由图 12(a)可知, 当 Φ 趋于 0° , 即目标靠近系统光轴, 或者当 Φ 趋向系统最大偏转角, 即目标靠近系统观测场边缘, 要求的棱镜转速与光束转向率之比趋向无穷大时, 棱镜旋转驱动和控制困难。在图 12(b)中, $\Delta(M_2)_{c1}$ 、 $\Delta(M_1)_{c2}$ 、 $\Delta(M_2)_{c2}$ 分别为 $|(M_2)_{c1}|$ 、 $|(M_1)_{c2}|$ 、 $|(M_2)_{c2}|$ 的最大值与 $|(M_1)_{c1}|$ 的最大值之差。可知, $\Delta(M_1)_{c2}$ 恒为零, 而 $\Delta(M_2)_{c1}$ 与 $\Delta(M_2)_{c2}$ 相等, 说明基于两套逆向解的分析结果相同。 $\Delta(M_2)_{c1}$ 和 $\Delta(M_2)_{c2}$ 不为零, 但其值较小, 说明目标跟踪对第二块棱镜旋转驱动控制的要求相对第一块棱镜略有不同, 但差异较小。图 12(c)展示了对应的目标运动方向与径向的夹角 θ 的变化趋势。可以看出, 当 Φ 值较小时, 棱镜转速与光束转向率之比的最大值出现在夹角 θ 趋近 90° 或 270° 的目标运动方向, 即切向。随着 Φ 值增大, 对应的夹角 θ 逐渐趋向 0° 、 180° 和 360° , 即径向。

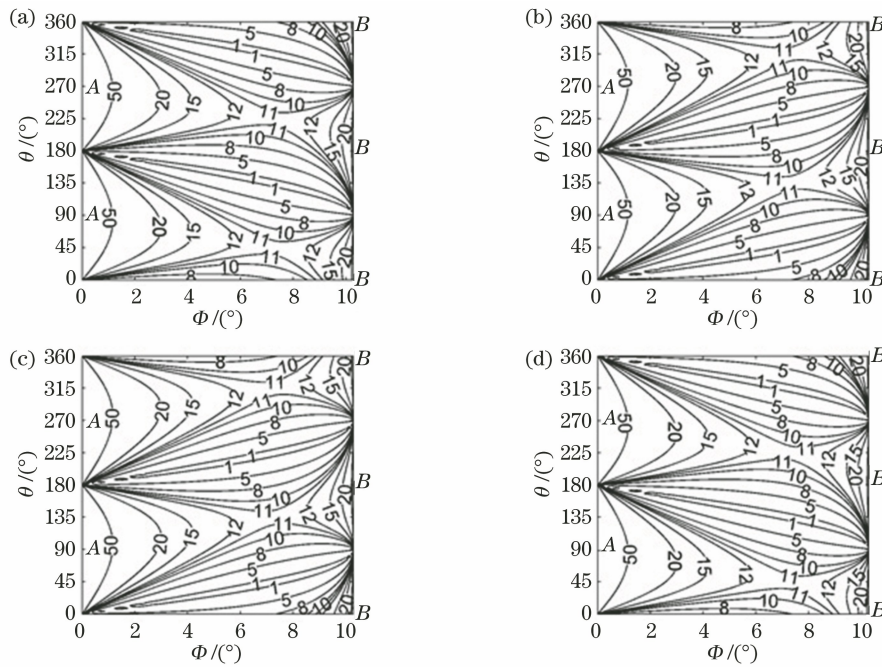


图 11 棱镜转速与光束转向率之比的绝对值随 Φ 及 θ 的变化(针对玻璃棱镜系统)。

(a) $|(M_1)_{c1}|$; (b) $|(M_2)_{c1}|$; (c) $|(M_1)_{c2}|$; (d) $|(M_2)_{c2}|$

Fig. 11 Variations of ratio of prisms' rotational speed to beam slewing rate as a function of Φ and θ for the glass prism system. (a) $|(M_1)_{c1}|$; (b) $|(M_2)_{c1}|$; (c) $|(M_1)_{c2}|$; (d) $|(M_2)_{c2}|$

本研究的意义体现在能从理论上解释相关文献提出的非线性、奇异性现象, 并提出解析分析方法。关于系统观测场中央区域出现的奇异性问题, 文献[12-16]中描述的现象和规律与本文通过解析方法分析的结果一致。关于边缘区域出现的奇异性问题, 文献[19]中的仿真结果也与本文分

析结果相符。本文通过计算棱镜角位置的方向导数, 推算和分析棱镜转速与光束转向率的比值, 定量分析目标跟踪中的非线性问题。该方法不仅能针对沿径向或切向移动的目标, 还可针对沿任意方向移动的目标, 分析目标跟踪对棱镜旋转驱动和控制的要求。

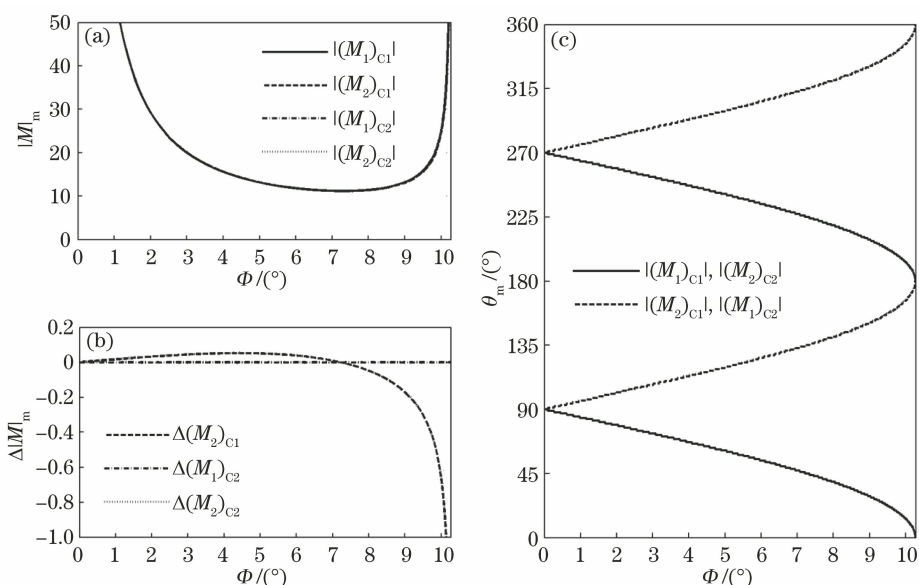


图 12 目标跟踪时要求的棱镜转速与光束转向率之比的最大值 $|M|_m$ 及其对应的 θ 值 (针对玻璃棱镜系统)。

(a) 要求的最大 M 值; (b) 要求的最大 M 值之差; (c) 要求的最大 M 值对应的 θ 值

Fig. 12 Maximum ratio $|M|_m$ of prisms' rotational speed to beam slewing rate and the corresponding values θ for target tracking with the glass prism system. (a) The maximum ratios; (b) the difference between the maximum ratios; (c) the corresponding values θ

5 结 论

基于两步法反解得到的两套棱镜角位置逆向解,根据沿径向、切向、任意方向移动的目标光束偏转特点,通过计算棱镜角位置的方向导数来推算和分析棱镜转速与光束转向率的比值,分析目标跟踪对棱镜旋转驱动和控制的要求。结果表明,对于确定的旋转双棱镜系统,目标跟踪对棱镜旋转驱动和控制的要求只决定于目标指向的当前偏转角以及目标的移动方向,而与目标指向的当前极角无关。对于相同偏转角指向上的目标,目标跟踪对棱镜旋转驱动控制的要求只取决于目标移动方向与径向的夹角大小。系统跟踪目标靠近观测场中心和边缘时,目标沿切向、径向移动,将分别导致棱镜转速与光束转向率之比急剧增加直至无穷大,棱镜旋转驱动控制出现奇异性。研究还发现,基于两套逆向解的分析结果无明显差异。为在整个系统观测场内跟踪目标,对两棱镜的旋转驱动和控制要求略有不同,但差异较小。本文通过解析方法定量分析光束转向与棱镜旋转之间的非线性关系,探讨了不同指向目标沿不同方向移动时棱镜旋转驱动和控制要求,其研究方法和结果能在旋转双棱镜的目标跟踪应用中为系统驱动控制设计提供参考。后续工作将探讨系统观测场中央和边缘区的奇异性控制方法,并在目标跟

踪应用中寻求合适的解决办法。

参 考 文 献

- [1] Li A H, Gao X J, Sun W S, et al. Inverse solutions for a Risley prism scanner with iterative refinement by a forward solution[J]. Applied Optics, 2015, 54(33): 9981-9989.
- [2] Qi Y, Shen Y, Huang F, et al. Method and evaluation of enlarging field of view based on two aperture rotational double prisms[J]. Acta Optica Sinica, 2021, 41(16): 1611001.
漆勇, 沈英, 黄峰, 等. 基于旋转双棱镜的视场扩大方法和评价[J]. 光学学报, 2021, 41(16): 1611001.
- [3] Jiang L, Li N, Zhang L Z, et al. Application research of achromatic double-prism scanner for free space laser communication[J]. Proceedings of SPIE, 2017, 10244: 1024418.
- [4] Lu S W, Gao M, Yang Y, et al. Inter-satellite laser communication system based on double Risley prisms beam steering[J]. Applied Optics, 2019, 58(27): 7517-7522.
- [5] Zhou Y, Fan S X, Liu G C, et al. Image distortions caused by rotational double prisms and their correction[J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(9): 0911003.
周远, 范世珣, 刘光灿, 等. 旋转双棱镜引起的成像畸变及其校正[J]. 光学学报, 2015, 35(9): 0911003.

- [6] Zhang H, Yuan Y, Su L J, et al. Beam steering uncertainty analysis for Risley prisms based on Monte Carlo simulation[J]. *Optical Engineering*, 2017, 56: 014105.
- [7] Ge Y H, Liu J H, Xue F F, et al. Effect of mechanical error on dual-wedge laser scanning system and error correction[J]. *Applied Optics*, 2018, 57(21): 6047-6054.
- [8] Yao Y X, Chen K, Li J Y, et al. Closed-loop control of Risley prism based on deep reinforcement learning [C]//2020 International Conference on Computer Engineering and Application (ICCEA), March 18-20, 2020, Guangzhou, China. New York: IEEE Press, 2020: 481-488.
- [9] Li J Y, Chen K, Peng Q, et al. Improvement of pointing accuracy for Risley prisms by parameter identification[J]. *Applied Optics*, 2017, 56(26): 7358-7366.
- [10] Harford S T, Gutierrez H, Newman M, et al. Infrared Risley beam pointer [J]. *Proceedings of SPIE*, 2014, 8971: 89710P.
- [11] Li Y J. Closed form analytical inverse solutions for Risley-prism-based beam steering systems in different configurations[J]. *Applied Optics*, 2011, 50(22): 4302-4309.
- [12] Li A H, Sun W S, Yi W L. An overview of inverse solution expressions for Risley-prism-based scanner [J]. *Proceedings of SPIE*, 2016, 9947: 99470Z.
- [13] Sun J F, Liu L R, Yun M J, et al. Double prisms for two-dimensional optical satellite relative-trajectory simulator [J]. *Proceedings of SPIE*, 2004, 5550: 411-418.
- [14] Ostaszewski M, Harford S, Doughty N, et al. Risley prism beam pointer[J]. *Proceedings of SPIE*, 2006, 6304: 630406.
- [15] Sánchez M, Gutow D. Control laws for a three-element Risley prism optical beam pointer [J]. *Proceedings of SPIE*, 2006, 6304: 630403.
- [16] Bos P J, Garcia H, Sergan V. Wide-angle achromatic prism beam steering for infrared countermeasures and imaging applications: solving the singularity problem in the two-prism design [J]. *Optical Engineering*, 2007, 46: 113001.
- [17] Li J Y, Peng Q, Chen K, et al. High precision pointing system based on Risley prism: analysis and simulation[J]. *Proceedings of SPIE*, 2015, 9255: 92551I.
- [18] Li J Y, Peng Q, Chen K, et al. Tracking device based on rotational double prisms and control method thereof: CN103631276A[P]. 2014-03-12. 李锦英, 彭起, 陈科, 等. 一种基于旋转双棱镜的跟踪装置及其控制方法: CN103631276A[P]. 2014-03-12.
- [19] Li A H, Sun W S, Yi W L, et al. Investigation of beam steering performances in rotation Risley-prism scanner[J]. *Optics Express*, 2016, 24(12): 12840-12850.
- [20] Zhou Y, Lu Y F, Hei M, et al. Motion control of the wedge prisms in Risley-prism-based beam steering system for precise target tracking [J]. *Applied Optics*, 2013, 52(12): 2849-2857.
- [21] Zhou Y, Lu Y F, Hei M, et al. Analytical inverse solutions for rotational double prism beam steering [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2013, 21(7): 1693-1700. 周远, 鲁亚飞, 黑沫, 等. 旋转双棱镜光束指向的反向解析解[J]. *光学精密工程*, 2013, 21(7): 1693-1700.
- [22] Liu X, Liang P. Determination of the parameters of surface layers on glasses by p-polarized reflectances [J]. *Applied Optics*, 1997, 36(16): 3788-3792.
- [23] Burnett J H, Benck E C, Kaplan S G, et al. Index of refraction of germanium [J]. *Applied Optics*, 2020, 59(13): 3985-3991.