

# 线偏振激光场中 Kramers-Henneberger 原子本征态的研究

杨小丹, 徐修奕, 魏启\*

华东师范大学精密光谱科学与技术国家重点实验室, 上海 200241

**摘要** 在非微扰理论框架内,研究了在线偏振高频强激光场中具有  $\sigma_g$  和  $\sigma_u$  对称性的 Kramers-Henneberger(KH) 氢原子的本征态。该理论预测,在高频极限下,电子结构由一个包含“缀饰”库仑势且与时间无关的薛定谔方程决定。采用一组全新的基组来求解该结构方程,并且将计算结果与已有研究结果进行了比较。对于低能级本征态,尤其是基态(1s),所提方法的计算结果是精确的。但对于激发态,只有当激光强度较高时,所提方法的计算结果才是精确的。另外,还研究了 KH 氢原子的本征态结构。当激光强度很高时,除了低能级本征态呈现出“二分”结构之外,高能级本征态还呈现出“多分”结构。

**关键词** 量子光学; Kramers-Henneberger 原子; 强激光场; 高频弗洛凯理论; 量子态

中图分类号 O436

文献标志码 A

doi: 10.3788/AOS202141.1727001

## Research on Eigenstates of Kramers-Henneberger Atoms in Linearly Polarized Laser Field

Yang Xiaodan, Xu Xiuyi, Wei Qi\*

State Key Laboratory of Precision Spectroscopy, East China Normal University, Shanghai 200241, China

**Abstract** We study the eigenstates of Kramers-Henneberger (KH) hydrogen atom with  $\sigma_g$  and  $\sigma_u$  symmetries in a linearly polarized high-frequency strong laser field, within the framework of the nonperturbative theory. The theory predicts that within high-frequency limit, electric structure is determined by a time-independent Schrödinger equation containing a “dressed” Coulomb potential. We use a new basis set to solve the structure equation and compare our calculation results with existing research results. Our results are accurate for low-level eigenstates especially the ground state (1s). But for excited states, our results are accurate only when the laser intensity is high. Furthermore, we also study the eigenstate structures of KH hydrogen atom. We find when the laser intensity is high, not only the low-level eigenstates exhibit the “dichotomy” structures, but also the high-level eigenstates display “muti-lobe” structures.

**Key words** quantum optics; Kramers-Henneberger atom; strong laser field; high frequency Floquet theory; quantum state

**OCIS codes** 270.6620; 020.2649; 320.2250

## 1 引言

强激光场与物质之间的相互作用是近年的前沿研究方向。当原子处在强激光场中时,许多高阶非

线性现象随之产生,并且这些现象引起了人们的广泛关注,例如,原子在不同频率双色激光场中的阈上电离过程<sup>[1]</sup>,单色高次谐波的产生<sup>[2]</sup>及孤立阿秒脉冲的产生<sup>[3]</sup>,双色场下隧穿电离过程与过势垒电离

收稿日期: 2021-02-22; 修回日期: 2021-03-22; 录用日期: 2021-03-31

基金项目: 国家自然科学基金(11974113,11674098)

通信作者: \*qwei@admin.ecnu.edu.cn

过程<sup>[4]</sup>。而这些有趣的现象中,最奇特的是原子稳定性现象。在高频激光场中,随着激光强度的增加,原子电离率不升反降,也就是说原子随着激光强度的增加而变得更加稳定<sup>[5-6]</sup>,这个现象引起了很多理论研究<sup>[7-8]</sup>。这种稳定性可以通过么正变换来理解,该变换是从实验室坐标系变换到经典电子在激光场中与振荡相关的参考系。这个新的参考系称为“Kramers-Henneberger”(KH)坐标系,在该坐标系中电子处于静止状态,而原子核处于振荡状态<sup>[9]</sup>。KH坐标系中电子与原子核之间的库仑势称为KH势,它与最初的库仑势大有不同。高频弗洛凯理论(HFFT)将高频极限下电子与原子核之间的KH势称为缀饰势,它不依赖于时间并且可以支持许多稳定的束缚本征态<sup>[7-8]</sup>。这些束缚本征态叫作KH态,相应的原子叫作KH原子,Richter<sup>[10]</sup>对KH原子及其演化作了很好的概述。

在线偏振激光场中,可以将KH势看作长度是 $2\alpha_0$ 的线电荷产生的库仑势, $\alpha_0 = \sqrt{I}/\omega^2$ 是振荡振幅, $I$ 是激光场强, $\omega$ 是激光频率。KH势可以帮助中性原子吸附额外的电子,从而让中性原子变成稳定的高价负离子。在无场情况下,这些高价负离子通常是不稳定的<sup>[11-14]</sup>。KH势也可以应用于双原子分子中,如 $\text{H}_2^+$ 、 $\text{H}_2$ 、 $\text{He}_2$ 和 $\text{HeS}$ ,这些分子与其在无场情况下所对应的分子的性质完全不同<sup>[15-19]</sup>。此外,KH势可以促进无电子的亚稳态分子的形成<sup>[20]</sup>。与KH原子和分子的相关研究已经持续了数十年,并产生了许多理论著作<sup>[5,7-8,11,14,18-28]</sup>。如今,诸多研究不仅关注KH原子的相关性质,还将KH原子作为了解强场物理学中诸多现象的理论基础<sup>[29-33]</sup>。但是直到最近,KH原子的实验验证才得以实现。在强激光场中进行中性原子加速实验,将加速的原子看成KH态,而不是里德堡态,这样实验结果才可以与理论结果<sup>[33-35]</sup>吻合。

本文主要研究了线偏振激光场中KH氢原子的本征态,其中包括基态和一些特定的激发态。在高频极限下,只需要求解一个定态薛定谔方程便可得到相关的本征态。而求解定态薛定谔方程最有效的办法就是基于基组展开的变分法。本文采用了一组与文献[36]中完全不同的基组来求解。通过计算发现,当振荡振幅 $\alpha_0 > 40$  a.u.时,所提方法可以非常精确的计算出KH氢原子的本征态。除此之外,还进一步研究了KH氢原子的本征态结构。除了文献[36]中提到的低能级本征态呈现出的“二分”结构外,高能级本征态还呈现出“多分”结构。除非特

别说明,文章中采用的是原子单位( $\hbar = m_e = e = 1$ ), $m_e$ 和 $e$ 是电子的质量和电荷。

## 2 理论和方法

在偶极近似下,频率为 $\omega$ 的单色平面波线偏振激光在 $t$ 时刻下的电场可表示为

$$\mathbf{E}(t) = E_0 \mathbf{e}_1 \cos \omega t, \quad (1)$$

式中: $E_0$ 是电场振幅; $\mathbf{e}_1$ 是垂直于激光场传播方向的单位矢量。在实验室参考系中,线偏振激光场中经典电子的振荡轨迹 $\boldsymbol{\alpha}(t)$ 可以表示为

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \alpha_0 \mathbf{e}_1 \cos \omega t, \quad (2)$$

式中: $\alpha_0$ 是振荡振幅,其表达式为 $\alpha_0 = E_0/\omega^2$ 。在实验室坐标系中,速度规范下的单电子原子的含时薛定谔方程可表达为

$$\left[ \frac{1}{2} \left( p - \frac{1}{c} \mathbf{A}(t) \right)^2 + V(\mathbf{r}) \right] \Phi_L = i \frac{\partial \Phi_L}{\partial t}, \quad (3)$$

式中: $p$ 是动量; $V(\mathbf{r})$ 是库仑势; $\mathbf{r}$ 是激光场的传播方向; $c$ 是光速; $\Phi_L$ 是电子在实验室坐标系中的波函数。振荡轨迹 $\boldsymbol{\alpha}(t)$ 可以用矢势 $\mathbf{A}(t)$ 表示为:

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \frac{1}{c} \int_0^t \mathbf{A}(t') dt', \quad (4)$$

式中: $t'$ 是时间因子。

引入振荡轨迹 $\boldsymbol{\alpha}(t)$ ,含时薛定谔方程可从实验室坐标系转换到振荡坐标系(也称KH坐标系)。在KH坐标系中,电子处于静止状态,原子核随激光场振荡。引入相位因子可消除(3)式中的 $(1/2c^2)\mathbf{A}^2(t)$ 项,可以得到KH坐标系下的含时薛定谔方程<sup>[37]</sup>

$$\left\{ \frac{1}{2} p^2 + V[\mathbf{r} + \boldsymbol{\alpha}(t)] \right\} \Phi_{\text{KH}} = i \frac{\partial \Phi_{\text{KH}}}{\partial t}, \quad (5)$$

式中: $V[\mathbf{r} + \boldsymbol{\alpha}(t)]$ 是强激光场中电子与核之间的势能,对应于实验室坐标系中的 $V(\mathbf{r})$ 。(3)式与(5)式是完全等价的。根据HFFT,在高频条件下,薛定谔方程可简化为与时间无关的“结构方程”:

$$\left[ \frac{1}{2} p^2 + V_0(\alpha_0; \mathbf{r}) \right] \Phi = \epsilon_n \Phi, \quad (6)$$

式中: $\epsilon_n$ 为本征能量; $V_0(\alpha_0; \mathbf{r})$ 为缀饰势,其具体形式为

$$V_0(\alpha_0; \mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\Omega}{r + \alpha_0(\Omega/\omega)}, \quad (7)$$

式中: $\Omega = \omega t$ 。从物理的角度来解释(7)式:当激光场的频率 $\omega$ 很高时,电子只能感受到一个时间平均场。在库仑势情况下,即 $V(\mathbf{r}) = -1/r$ , (7)式可以看成是振荡振幅从 $-\alpha_0$ 变化到 $+\alpha_0$ 的线电荷的库仑势<sup>[38]</sup>。

采用变分法求解(6)式,变分参数是基组函数的系数。在椭球坐标系中,缀饰势  $V_0(\alpha_0; \mathbf{r})$  的形式<sup>[22]</sup>为

$$V_0(\alpha_0; \mathbf{r}) = -\frac{2}{\pi\alpha_0\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} K \left[ \left( \frac{1 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2} \right)^{1/2} \right], \quad (8)$$

式中: $\xi, \eta$  是椭圆坐标参数,  $\xi = (r_A + r_B)/2\alpha_0$ ,  $\eta = (r_A - r_B)/2\alpha_0$ ,  $r_A, r_B$  是椭球坐标上任意一点到椭球球心  $A, B$  的距离; $K$  是第一类完全椭圆积分。

用到的基组函数为

$$\Phi(\xi, \eta, \phi)_{p,q,m} = (\xi - 1)^p \eta^q [(1 - \eta^2)(\xi^2 - 1)]^{m/2} \exp(-\beta\xi) \exp(im\phi), \quad (9)$$

式中: $p$  和  $q$  是非负整数; $\beta$  是优化参数; $m$  是磁量子数; $\phi$  是方位角。用 78 个基函数展开(6)式中的哈密顿量可以得到一个  $78 \times 78$  的哈密顿矩阵,对其进行对角化操作可得到特征能量和特征波函数。

### 3 结果与讨论

对于球对称库仑势  $V(\mathbf{r})$ , (8)式所示的缀饰势均关于  $z$  轴有轴对称性,并且是关于其中心的偶函数。此时只有角动量在  $z$  轴上的投影和奇偶性是守恒量的,并且本征能量依赖于  $|m|$ , 而不是  $m$ , 这意味着  $m \neq 0$  时,本征能量是双重简并的。故指定:当  $|m| = 0$  时,用  $\sigma$  表示对称性。用  $u, g$  指定奇偶

性,即  $\sigma_g$  为偶对称,  $\sigma_u$  为奇对称。将计算得到的本征能量的数值结果,按其对称性分组,并展示在图 1 中。虚线和实线部分是利用新基组计算得到的结果,规则图形的点代表的是文献[36]中的方法计算得到的结果。Pont 等<sup>[36]</sup>在求解薛定谔方程的过程中,当  $\alpha_0$  较小时,利用微扰理论对玻尔能级进行修正以求得本征能量的数值解;当  $\alpha_0$  较大时,通过在标准正交高斯基中对哈密顿矩阵进行对角化以求得本征能量的数值解,类似于在双原子分子结构计算中所使用的方法。Pont 等<sup>[36]</sup>利用 10 个不同的中心和 100 个基函数进行数值求解。从图 1 中可以看出,当原子处于基态(1s)时,两者计算结果完全吻合。在低激发态时的吻合度也比较高,并且越低的激发态,吻合度越高。对于更高激发态,所提方法计算的结果与 Pont 等<sup>[36]</sup>计算的结果虽有差距,但差距随着  $\alpha_0$  值的增大而逐渐减小并且最后两者会完全吻合。以  $\sigma_u$  对称性的本征态为例,对于 2p 态,二者计算结果几乎完全吻合;对于 3p 态,当  $\alpha_0 \geq 20$  a.u. 时,二者计算结果完全吻合;对于 4p 态,当  $\alpha_0 \geq 30$  a.u. 时,二者计算结果完全吻合;对于 4f 态,当  $\alpha_0 \geq 40$  a.u. 时,二者计算结果完全吻合;对于 5f 态,当  $\alpha_0 \geq 60$  a.u. 时,二者计算结果完全吻合。这说明所提方法中使用的基组对低能级本征态(基态和第一激发态)是完全适用的,对较高能级本征态在  $\alpha_0$  较大时也是适用的。

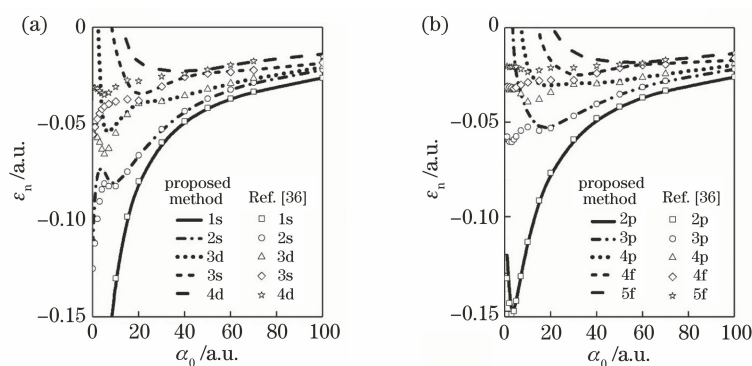


图 1 不同对称性下低能级 KH 氢原子的本征能量与  $\alpha_0$  的函数关系图。(a)  $\sigma_g$  对称性;(b)  $\sigma_u$  对称性

Fig. 1 Functional relation diagrams of eigenenergy of low-level KH hydrogen atom and  $\alpha_0$  at different symmetries. (a)  $\sigma_g$  symmetry; (b)  $\sigma_u$  symmetry

根据  $\sigma_g$  和  $\sigma_u$  对称性,如果激光沿  $z$  方向偏振,那么只要有波函数在  $x-z$  平面的投影,就可以得到波函数的三维空间结构。图 2 给出了  $\alpha_0$  取不同值时,具有  $\sigma_g$  对称性的 KH 氢原子基态波函数在  $x-z$  平面的投影结构图。从图中可以看出,随着  $\alpha_0$  的增大,在线性电荷(长度为  $2\alpha_0$ )所产生的

缀饰势的作用下,波函数沿  $z$  轴被拉伸。当  $\alpha_0$  接近 20 a.u. 时,波函数出现一个鞍形;当  $\alpha_0 = 30$  a.u. 时,在线性电荷的端点  $\pm\alpha_0$  周围形成两个显著的最大值;从  $\alpha_0 = 50$  a.u. 开始,出现“二分”结构<sup>[39]</sup>,且双峰没有交叠,随着  $\alpha_0$  的继续增大,“二分”结构越发明显。

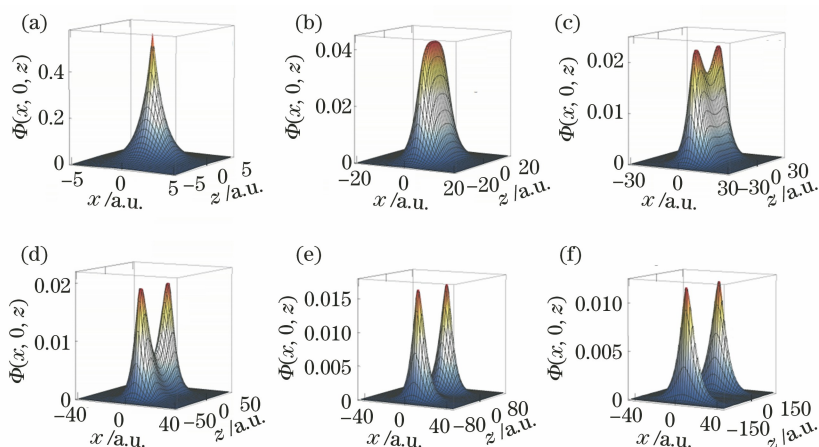


图 2 当取不同  $\alpha_0$  值时,具有  $\sigma_g$  对称性的 KH 氢原子基态波函数在  $x-z$  平面的投影结构图。

(a)  $\alpha_0 = 0$  a.u. ; (b)  $\alpha_0 = 10$  a.u. ; (c)  $\alpha_0 = 20$  a.u. ; (d)  $\alpha_0 = 30$  a.u. ; (e)  $\alpha_0 = 50$  a.u. ; (f)  $\alpha_0 = 100$  a.u.

Fig. 2 Projection structure diagrams of wave functions of ground state of KH hydrogen atom with  $\sigma_g$  symmetry at different values of  $\alpha_0$  on  $x-z$  plane. (a)  $\alpha_0 = 0$  a.u. ; (b)  $\alpha_0 = 10$  a.u. ; (c)  $\alpha_0 = 20$  a.u. ; (d)  $\alpha_0 = 30$  a.u. ; (e)  $\alpha_0 = 50$  a.u. ; (f)  $\alpha_0 = 100$  a.u.

为了进一步研究 KH 态氢原子的本征态结构,图 3 给出了  $\alpha_0 = 60$  a.u. 时,能级最低的 8 个具有  $\sigma_g$  和  $\sigma_u$  对称性的本征态的波函数在  $x-z$  平面的投影结构图。从图中可以看出,  $\alpha_0 = 60$  a.u. 时,基态(1s)和第一激发态(2p)的波函数呈现出典型的“二分”结构。这与文献[39]所记载的当  $\alpha_0 \geq 50$  a.u. 时开始出现完全的“二分”结构相吻合。而对于较高激发态,发现波函数基本都是由几个独

立的波包组成,并且波包之间没有交叉。比如, 2s 态由 3 个独立波包构成,3p 态由 4 个独立波包构成,4f 态由 8 个独立波包构成。将这种由多个独立波包组成本征函数的构型命名为“多分”结构,“多分”结构不是本文中所研究的几个激发态波函数所特有的现象,而是所有具有  $\sigma_g$  和  $\sigma_u$  对称性的本征态波函数在  $\alpha_0$  比较大( $\alpha_0 \geq 50$  a.u.) 时表现出来的普遍现象。

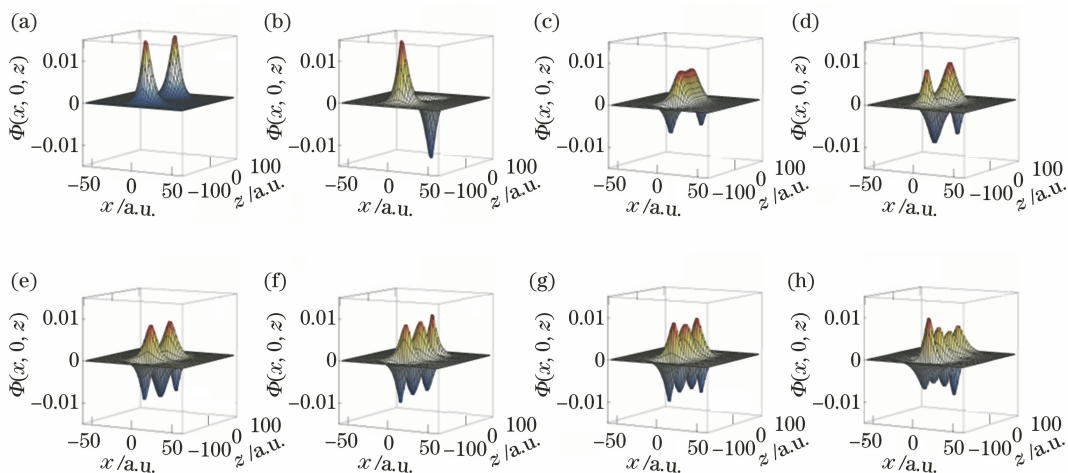


图 3 当  $\alpha_0 = 60$  a. u. 时,具有  $\sigma_g$  和  $\sigma_u$  对称性的 KH 氢原子的低能级本征态的波函数在  $x-z$  平面的投影结构图。(a)  $\sigma_g(1s)$ ; (b)  $\sigma_u(2p)$ ; (c)  $\sigma_g(2s)$ ; (d)  $\sigma_u(3p)$ ; (e)  $\sigma_g(3d)$ ; (f)  $\sigma_u(4p)$ ; (g)  $\sigma_g(3s)$ ; (h)  $\sigma_u(4f)$

Fig. 3 Projection structure diagrams of wave functions of low-level eigenstate of KH hydrogen atom with  $\sigma_g$  and  $\sigma_u$  symmetries on  $x-z$  plane when  $\alpha_0 = 60$  a.u. . (a)  $\sigma_g(1s)$ ; (b)  $\sigma_u(2p)$ ; (c)  $\sigma_g(2s)$ ; (d)  $\sigma_u(3p)$ ; (e)  $\sigma_g(3d)$ ; (f)  $\sigma_u(4p)$ ; (g)  $\sigma_g(3s)$ ; (h)  $\sigma_u(4f)$

## 4 结 论

采用了一组全新的基组来求解具有  $\sigma_g$  和  $\sigma_u$  对称性的 KH 氢原子的本征能量。对于基态(1s),所提方法可以精确求解本征能量。对于激发态,所提方法的计算结果与文献[36]中的结果虽有差距,但差距随着  $\alpha_0$  值的增大而逐渐减小并且最终两者会完全吻合。当  $\alpha_0 \geq 40$  a.u. 时,所提方法可以非常精确地计算出具有  $\sigma_g$  和  $\sigma_u$  对称性的 KH 氢原子的本征能量。另外,还进一步研究了 KH 氢原子的本征态结构。当  $\alpha_0 \geq 50$  a.u. 时,除了低能级本征态呈现出的“二分”结构<sup>[39]</sup>外,高能级本征态还呈现出“多分”结构。

## 参 考 文 献

- [1] Jin F C, Yang H H, Zhang T, et al. Dependence of above-threshold ionization spectra on frequencies of two-color laser fields [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2020, 57(3): 030201.  
金发成, 杨慧慧, 张桐, 等. 阈上电离谱与双色激光场频率的关系 [J]. *激光与光电子学进展*, 2020, 57(3): 030201.
- [2] Wang L, Xue J X, Zeng Z N, et al. Generation of resonantly enhanced monochromatic high-order harmonics [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2019, 46(10): 1001003.  
汪丽, 薛金星, 曾志男, 等. 共振增强单色高次谐波产生 [J]. *中国激光*, 2019, 46(10): 1001003.
- [3] Xu X H, Xia C L, Guo Z W, et al. Spatial distribution of high-order harmonic controlled by chirped laser pulse and isolated attosecond pulse generation [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2018, 45(6): 0601007.  
徐小虎, 夏昌龙, 郭志伟, 等. 啁啾场调控的高次谐波空间分布及孤立阿秒脉冲产生 [J]. *中国激光*, 2018, 45(6): 0601007.
- [4] Wu H T, Gong S Q, Jin S Q, et al.  $\omega$ - $2\omega$  two color phase control of ionization: comparison of tunneling and over the barrier regimes [J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, 21(8): 897-900.  
吴海涛, 龚尚庆, 金石琦, 等.  $\omega$ - $2\omega$  双色场相位控制电离: 隧穿电离与过势垒电离的比较 [J]. *光学学报*, 2001, 21(8): 897-900.
- [5] Eberly J H, Kulander K C. Atomic stabilization by super-intense lasers [J]. *Science*, 1993, 262(5137): 1229-1233.
- [6] de Boer M, Hoogenraad J H, Vrijen R B, et al. Indications of high-intensity adiabatic stabilization in neon [J]. *Physical Review Letters*, 1993, 71(20): 3263-3266.
- [7] Gavrilu M. Atoms in intense laser fields [M]. New York: Academic Press, 1992: 435-455.
- [8] Gavrilu M. Atomic stabilization in superintense laser fields [J]. *Journal of Physics B*, 2002, 35(18): R147-R193.
- [9] Henneberger W C. Perturbation method for atoms in intense light beams [J]. *Physical Review Letters*, 1968, 21(12): 838-841.
- [10] Richter M. Imaging and controlling electronic and nuclear dynamics in strong laser fields [D]. Berlin: Technische Universitat Berlin, 2016: 47-67.
- [11] van Duijn E, Gavrilu M, Muller H G. Multiply charged negative ions of hydrogen induced by superintense laser fields [J]. *Physical Review Letters*, 1996, 77(18): 3759-3762.
- [12] van Duijn E, Muller H. Appearance and structure of multiply charged negative ions of hydrogen in intense circularly polarized laser fields [J]. *Physical Review A*, 1997, 56(3): 2182-2191.
- [13] Gavrilu M, Shertzer J. Two-electron atoms in superintense radiation fields: dichotomy and stabilization [J]. *Physical Review A*, 1996, 53(5): 3431-3443.
- [14] Wei Q, Kais S, Moiseyev N. Frequency-dependent stabilization of  $\text{He}^-$  by a superintense laser field [J]. *Physical Review A*, 2007, 76: 013407.
- [15] Shertzer J, Chandler A, Gavrilu M.  $\text{H}_2^+$  in superintense laser fields: alignment and spectral restructuring [J]. *Physical Review Letters*, 1994, 73(15): 2039-2042.
- [16] Yasuike T, Someda K. He-He chemical bonding in high-frequency intense laser fields [J]. *Journal of Physics B*, 2004, 37(15): 3149-3162.
- [17] Wei Q, Kais S, Herschbach D. Dimensional scaling treatment of stability of simple diatomic molecules induced by superintense, high-frequency laser fields [J]. *The Journal of Chemical Physics*, 2008, 129(21): 214110.
- [18] Balanarayan P, Moiseyev N. Strong chemical bond of stable  $\text{He}_2$  in strong linearly polarized laser fields [J]. *Physical Review A*, 2012, 85(3): 032516.
- [19] Balanarayan P, Moiseyev N. Chemistry in high-frequency strong laser fields: the story of  $\text{HeS}$  molecule [J]. *Molecular Physics*, 2013, 111(12/13): 1814-1822.
- [20] Smirnova O, Spanner M, Ivanov M. Molecule without electrons: binding bare nuclei with strong laser fields [J]. *Physical Review Letters*, 2003, 90(24): 243001.
- [21] Wei Q, Kais S, Moiseyev N. New stable multiply

- charged negative atomic ions in linearly polarized superintense laser fields[J]. *The Journal of Chemical Physics*, 2006, 124(20): 201108.
- [22] Wei Q, Kais S, Herschbach D. Dimensional scaling treatment of stability of atomic anions induced by superintense, high-frequency laser fields [J]. *The Journal of Chemical Physics*, 2007, 127(9): 094301.
- [23] Wei Q, Herschbach D. Positronium in superintense high-frequency laser fields [J]. *Molecular Physics*, 2013, 111(12/13): 1835-1843.
- [24] Pawlak M, Moiseyev N. Conditions for the applicability of the Kramers-Henneberger approximation for atoms in high-frequency strong laser fields [J]. *Physical Review A*, 2014, 90(2): 023401.
- [25] Morales F, Richter M, Patchkovskii S, et al. Imaging the Kramers-Henneberger atom [J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of USA*, 2011, 108(41): 16906-16911.
- [26] Bogatskaya A V, Volkova E A, Popov A M. Prospects of odd and even harmonic generation by an atom in a high-intensity laser field[J]. *Laser Physics Letters*, 2017, 14(5): 055301.
- [27] Li M, Wei Q. Stark effect of Kramers-Henneberger atoms[J]. *The Journal of Chemical Physics*, 2018, 148(18): 184307.
- [28] Medišauskas L, Saalman U, Rost J M. Floquet Hamiltonian approach for dynamics in short and intense laser pulses[J]. *Journal of Physics B*, 2019, 52(1): 015602.
- [29] Toyota K, Tolstikhin O I, Morishita T, et al. Slow electrons generated by intense high-frequency laser pulses[J]. *Physical Review Letters*, 2009, 103(15): 153003.
- [30] Richter M, Patchkovskii S, Morales F, et al. The role of the Kramers-Henneberger atom in the higher-order Kerr effect[J]. *New Journal of Physics*, 2013, 15(8): 083012.
- [31] Matthews M, Morales F, Patas A, et al. Amplification of intense light fields by nearly free electrons [J]. *Nature Physics*, 2018, 14(7): 695-700.
- [32] Zimmermann H, Meise S, Khujakulov A, et al. Limit on excitation and stabilization of atoms in intense optical laser fields [J]. *Physical Review Letters*, 2018, 120(12): 123202.
- [33] Wei Q, Wang P X, Kais S, et al. Pursuit of the Kramers-henneberger atom [J]. *Chemical Physics Letters*, 2017, 683: 240-246.
- [34] Eichmann U, Nubbemeyer T, Rottke H, et al. Acceleration of neutral atoms in strong short-pulse laser fields [J]. *Nature*, 2009, 461(7268): 1261-1264.
- [35] Wei Q, Wang P X, Kais S, et al. Confirmation of Kramers-Henneberger atoms [EB/OL]. (2016-09-06) [2021-02-15]. <https://arxiv.org/abs/1609.01434>.
- [36] Pont M, Walet N R, Gavrilu M. Radiative distortion of the hydrogen atom in superintense, high-frequency fields of linear polarization [J]. *Physical Review A*, 1990, 41(1): 477-494.
- [37] Førre M, Selstø S, Hansen J P, et al. Exact nondipole Kramers-Henneberger form of the light-atom Hamiltonian: an application to atomic stabilization and photoelectron energy spectra [J]. *Physical Review Letters*, 2005, 95(4): 043601.
- [38] Pont M, Gavrilu M. The levels of atomic hydrogen in intense, high-frequency laser fields [J]. *Physics Letters A*, 1987, 123(9): 469-474.
- [39] Pont M, Walet N R, Gavrilu M, et al. Dichotomy of the hydrogen atom in superintense, high-frequency laser fields [J]. *Physical Review Letters*, 1988, 61(8): 939-942.