

## 向量代数在固定和跟踪平面太阳能计算中的应用

吴茂刚, 余亚梅, 许瑞华, 吴绍兵, 唐润生\*

云南师范大学太阳能研究所, 云南 昆明 650500

**摘要** 太阳能计算是依据太阳几何学并结合地面太阳辐射数据来计算太阳能接收器所收集到的太阳辐射。尽管其计算过程因接收器的结构、光学特性、安装方式的不同而存在很大差异,但最基本的计算是确定太阳光在接收器上的入射角和太阳光在特定截面上的投影入射角。传统方法采用天球坐标作为描述太阳运动规律和相关计算的基础,导致相关计算过程十分复杂。以固定和跟踪太阳板为案例,详细分析了如何用向量方法分析线与线(面)的空间角度关系及光线经过镜面反射后的空间传输规律,阐述了选择和建立坐标系的原则及坐标转换的简便方法。研究结果显示:根据实际需要选择和建立合理的坐标系可以大大简化光线在固定和跟踪平面上的入射角及光线在特定面投影角的计算过程,向量代数非常适用于分析光线在反射式线聚光器内的三维传输过程。

**关键词** 几何光学; 太阳几何学; 向量代数; 坐标转换; 太阳跟踪器; 投影角

中图分类号 TK511

文献标志码 A

doi: 10.3788/AOS202141.1508001

## Application of Vector Algebra in Solar Energy Calculation of Fixed and Tracked Solar Panels

Wu Maogang, Yu Yamei, Xu Ruihua, Wu Shaobing, Tang Runsheng\*

*Solar Energy Research Institute, Yunnan Normal University, Kunming, Yunnan 650500, China*

**Abstract** Solar energy calculation aims at calculating solar radiation collected by a solar receiver using solar geometry and radiation data. The essential calculation includes the incident angle of solar rays on the receivers and the projection angle of solar rays on a specific plane, although the calculation procedure quite differs due to the receiver differences in structure, orientation as well as optical characteristics. To date, the spherical coordinate system is taken as the basis for describing the law of solar motion and related calculation. However, such a conventional method makes the calculation process complex. In this article, taking the fixed and tracked solar panels as case studies, it is analyzed in detail that how to use vector algebra for coordinate transformation, how to select and establish coordinate systems, and how to use vector algebra to analyze the spatial angle relationship between line and line (plane) as well as the spatial transmission law of solar rays after mirror reflection. The analysis results show that the calculation process of the incident angle of solar rays on fixed and tracked solar panels as well as the projection angle of solar rays on a specific plane can be greatly simplified by selecting and establishing a reasonable coordinate system according to actual needs, and vector algebra is very suitable for analyzing the three-dimensional transmission process of solar rays within a reflective linear solar concentrator.

**Key words** geometric optics; solar geometry; vector algebra; coordinate transformation; solar tracker; projection angle

**OCIS codes** 080.2740; 220.4298; 260.2160; 350.6050

收稿日期: 2020-11-20; 修回日期: 2021-02-05; 录用日期: 2021-03-08

基金项目: 国家自然科学基金(51866016)

通信作者: \*kingtang01@126.com

# 1 引言

太阳能系统的研究和设计的目标是最大限度地获取太阳辐射资源并高效利用太阳资源<sup>[1-4]</sup>。在过去的二十年里,为了提高太阳能集热器的太阳能利用性能,各种类型的太阳跟踪机制被提出。但是,没有一个理想的跟踪装置适用于所有的太阳能工程,设计者面临许多可以选择的设计方案,评估这些设计方案需要繁琐的计算。Caton<sup>[5]</sup>在设计光伏水泵系统时,对比分析了十种光伏组件布置方案的性能:3 个固定方向布置方案,6 个单轴跟踪方案,1 个双轴跟踪方案。因此,运用简便的方法描述各种跟踪器的跟踪机制、分析跟踪效率、评估跟踪系统的经济效益是非常有必要的。大量的理论和实验研究表明:相对于固定式太阳能板,采用跟踪技术可以使太阳能板年采光量或者发电量增加 20%~40%<sup>[6-9]</sup>。

太阳能计算的目的是依据太阳在地面上方的运动规律和太阳辐射数据,结合接收器的光学和几何结构特性,计算地面接收器所接收的太阳辐射,并对影响其光学性能的因素进行分析,从而优化系统结构和运行方式。长期以来,人们习惯于以地面天球坐标为基础分析太阳在固定面和跟踪平面上方的运动规律,但由于地面太阳能接收器的结构、光学特性、安装朝向和跟踪形式具有多样性,相关的计算过程极为复杂。地面接收器的采光特性与其结构、光学特性、运行方式等诸多因素有关,总体上分为两类:一类接收器所接收的直射辐射只取决于太阳光在采光面上的入射角,如太阳电池和平板型集热器等<sup>[10-11]</sup>;另一类太阳接收器的采光量不但与入射角有关,还与太阳光线在横截面上的投影角有关,如抛物槽<sup>[12-14]</sup>、非跟踪线聚光器<sup>[15-17]</sup>和真空管集热器<sup>[2,18]</sup>。因此,太阳能计算过程的核心内容是计算太阳光线在接收器面上的入射角和太阳光在特定截面(如横截面)上的投影角。无论是计算入射角还是计算投影入射角,关键问题就是寻找太阳光线与面的空间几何关系。在数学上,分析线与面或者线与线之间的几何关系最常用的方法是解析几何和向量代数。太阳能计算中寻找光线(直线)与面之间的几何关系,用向量代数更简单、直接,而用向量代数来分析线与面(线)之间的空间几何关系的基础是根据实际需要选择或者建立合适的笛卡儿坐标系。

Rabl<sup>[19]</sup>利用向量代数分析了太阳与地球的空间几何关系,建立了用向量代数计算太阳光线在固定或者跟踪平面接收器上的入射角的基础,但没有

分析如何根据实际需要来选择或者建立合适的坐标系以描述太阳的空间位置,且坐标转换方法仍然采用常规的坐标分量投影方法,转换过程繁琐且容易出错。Sproul<sup>[20]</sup>用向量代数分析了太阳与地面接收器的几何关系。Tang 等<sup>[21-22]</sup>利用太阳几何学结合向量代数分析了曲面屋顶建筑的光学和热性能,并以空调负荷最小为优化目标对曲面建筑的结构参数进行了优化。2018 年, Tang 等<sup>[23-25]</sup>利用向量代数分析了太阳辐射在复合抛物面内的三维传输过程。这些研究成果显示,利用向量代数并结合光的反射和折射定律及地面太阳辐射资料,可大大简化地面接收器太阳能的计算,同时方便分析太阳辐射在接收器内的复杂传输过程。

长期以来,大多研究是以天球坐标来描述太阳的运动规律,并以此为基础开展相关理论研究和工程设计。由于地面太阳能系统在结构、安装朝向、跟踪模式、光学特性上具有多样性,要求根据实际需要选择和建立合理的坐标系,以方便分析太阳光线与太阳接收器法线或特定截面(如横截面)的空间角度关系。本文构建了基于向量代数的坐标变换技术,以固定和跟踪太阳能接收器为案例,详细阐述了向量方法在太阳能计算和光能传输中的应用,为相关理论研究及工程设计提供了参考。

## 2 描述太阳运动规律的基本坐标系及坐标转换方法

### 2.1 赤道坐标系中的向量表示

如图 1 所示,建立一个赤道坐标系  $O-XYZ$ ,  $Z$  轴指向北极。 $X$  轴、 $Y$  轴在赤道平面内,  $X$  轴指向正南,  $Y$  轴指向正东。在赤道坐标系里,用赤纬角  $\delta$  和时角  $\omega$  来描述太阳的位置。太阳通过当地子午线时  $\omega=0$ (太阳中午),偏西(下午)为“+”。赤纬角  $\delta$  是日地连线和赤道平面的夹角,太阳在赤道以北为“+”,太阳在赤道以南为“-”,太阳在赤道上为 0。 $\delta$  计算公式为

$$\sin \delta = \sin 23.45^\circ \cos \left[ \frac{360^\circ(N+10)}{365.25} \right], \quad (1)$$

式中: $N$  为 1 月 1 号起的第  $N$  天。

在赤道坐标系里,地心指至太阳的单位矢量  $\mathbf{n}_s$  可表示为

$$\mathbf{n}_s = (\cos \delta \cos \omega, -\cos \delta \sin \omega, \sin \delta). \quad (2)$$

在纬度为  $\lambda$  的地区,朝向正南且倾角为  $\beta$  的平板接收器表面法线的单位向量  $\mathbf{n}_c$  可以表示为

$$\mathbf{n}_c = [\cos(\lambda - \beta), 0, -\sin(\lambda - \beta)]. \quad (3)$$

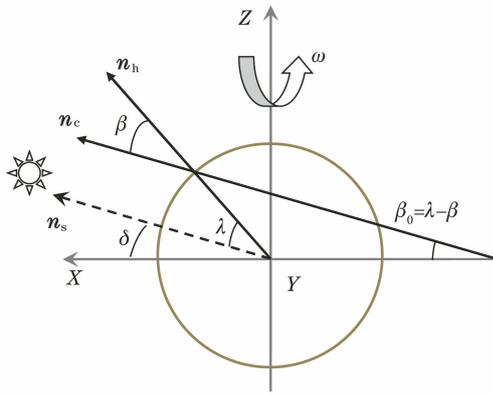


图 1 赤道坐标系

Fig. 1 Equatorial coordinate system

在纬度为  $\lambda$  的地区,水平面法线的单位向量  $n_h$  可以表示为

$$n_h = (\cos \lambda, 0, \sin \lambda) \quad (4)$$

### 2.2 水平面坐标系的向量表示

地面坐标系  $O'-X'Y'Z'$  是将赤道坐标系  $O-XYZ$  绕  $Y$  轴顺时针方向旋转  $\lambda$  的结果。如图 2 所示,  $Y'O'Z'$  坐标面位于水平面,  $X'$  轴垂直地面指向天顶,  $Y'$  指向正东,  $Z'$  指向北面天空, 太阳的方位角  $\phi_s$  为太阳向量在水平面上的投影与正南方向的夹角。  $X'$ 、 $Z'$  轴在  $O-XYZ$  坐标系中的单位向量分别为  $X' = (\cos \lambda, 0, \sin \lambda)$ 、 $Z' = (-\sin \lambda, 0, \cos \lambda)$ , 因此太阳在  $X'Y'Z'$  坐标系中的单位向量  $n'_s$  的坐标分量为

$$\begin{cases} n'_x = n_s \cdot X' = n_x \cos \lambda + n_z \sin \lambda \\ n'_y = n_y \\ n'_z = n_s \cdot Z' = -n_x \sin \lambda + n_z \cos \lambda \end{cases} \quad (5)$$

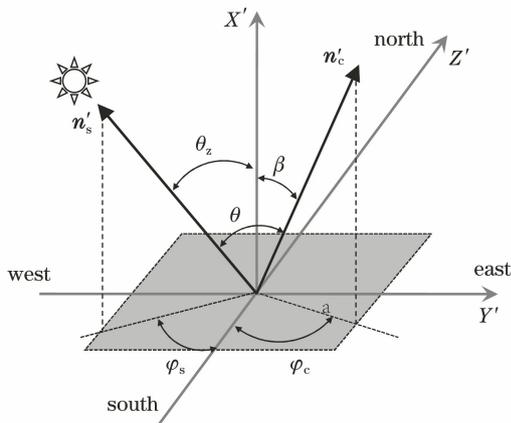


图 2 太阳和太阳板在地平面坐标系中的单位向量

Fig. 2 Unit vectors of sun and solar panel in horizontal coordinate system

可见,利用向量代数进行坐标转换更简单、直接。而传统的坐标转换是先分别将  $n_x$  和  $n_z$  投影到

$X'$ 、 $Z'$  轴上再求出  $n'_x$  和  $n'_z$ , 转换过程繁琐。

在地面坐标系里,对于倾角为  $\beta$  (电池板平面与水平面的夹角)、方位角为  $\phi_c$  (电池板表面法线的地面投影线与正南方的夹角) 的接收平面,其表面法线单位矢量  $n'_c$  表示为

$$n'_c = (\cos \beta, -\sin \beta \sin \phi_c, -\sin \beta \cos \phi_c) \quad (6)$$

### 2.3 太阳光线在固定面上的入射角及日出、日落时角

在分析太阳在固定面上的入射角时,先选择一个合适的坐标系以方便确定固定平面法线的向量,然后利用太阳和太阳板法线向量的点积  $\cos \theta = n_s \cdot n_c = n'_s \cdot n'_c$  推导出入射角  $\theta$  的计算表达式。为了求解太阳在太阳板上的日升、日落时角,需要先计算入射角等于  $90^\circ$  时所对应的时角,然后结合地面日升、日落时角来确定。

例如,在水平面坐标系中,地面法线的向量为  $n'_h = (1, 0, 0)$ , 因此太阳在地面的入射角 (又称天顶角) 为

$$\begin{aligned} \cos \theta_z &= (n'_x, n'_y, n'_z) \cdot (1, 0, 0) = \\ n'_x &= \cos \lambda \cos \delta \cos \omega + \sin \lambda \sin \delta \end{aligned} \quad (7)$$

令  $\theta_z = 90^\circ$ , 可以得到太阳在地面的日升、日落时角为

$$\cos \omega_0 = -\tan \delta \tan \lambda \quad (8)$$

建筑物南面立墙法线的向量为  $(0, 0, -1)$ , 太阳在南面立墙上的入射角为

$$\begin{aligned} \cos \theta_{sw} &= (n'_x, n'_y, n'_z) \cdot (0, 0, -1) = \\ -n'_z &= -\cos \delta \cos \omega \sin \lambda + \sin \delta \cos \lambda \end{aligned} \quad (9)$$

令  $\theta_{sw} = 90^\circ$ , 结合地面日落时角  $\omega_0$ , 可得南面立墙的日升 ( $\omega_{ss}$ )、日落时角 ( $\omega_{sr}$ ) 为

$$\begin{cases} \omega_{sw,ss} = -\min(\omega_{sw}, \omega_0) \\ \omega_{sw,sr} = \min(\omega_{sw}, \omega_0) \end{cases} \quad (10)$$

式中:

$$\cos \omega_{sw} = \tan \delta / \tan \lambda \quad (11)$$

又如,在赤道平面坐标系中,安装在纬度为  $\lambda$  处的面向正南且倾角为  $\beta$  的太阳板 (如图 1 所示) 的太阳入射角为

$$\begin{aligned} \cos \theta_{in} &= n_s \cdot n_c = \cos(\lambda - \beta) \cos \delta \cos \omega + \\ &\quad \sin(\lambda - \beta) \sin \delta \end{aligned} \quad (12)$$

令  $\theta_{in} = 90^\circ$ , 可以得到太阳在太阳板上的日升、日落时角为

$$\cos \omega_c = -\tan \delta \tan(\lambda - \beta) \quad (13)$$

由于太阳板装在地面上,太阳在倾斜太阳板上的日升 ( $\omega_{ss}$ )、日落 ( $\omega_{ssr}$ ) 时角还应参考当地水平面的日升、日落时角 ( $\omega_0$ ), 即

$$\begin{cases} \omega_{ss} = -\min(\omega_c, \omega_0) \\ \omega_{sr} = \min(\omega_c, \omega_0) \end{cases} \quad (14)$$

如图 2 所示,在地面坐标系中,太阳在倾角为  $\beta$ 、方位角为  $\phi_c$ (南偏西为正)的太阳板上的入射角为

$$\cos \theta_c = \mathbf{n}'_s \cdot \mathbf{n}'_c = n'_x \cos \beta - n'_y \sin \beta \sin \phi_c - n'_z \sin \beta \cos \phi_c. \quad (15)$$

令  $\theta_c = 90^\circ$ , 可求得数值解  $\omega_1$  和  $\omega_2$ , 然后结合地面日落时角  $\omega_0$  确定太阳在倾斜面上的日升、日落时角。在许多实际应用中,计算日升、日落时角(时间)的目的是为了计算太阳板日采光量,但太阳在非正南倾斜面上的日升、日落时角的计算十分繁琐,在用计算机计算日直射辐照量时,可引入一个控制函数,然后进行全天积分:

$$H_b = \int_{-t_0}^{t_0} I_b \cos \theta_c g(\theta_c) dt, \quad (16)$$

$$g(\theta_c) = \begin{cases} 1, & \cos \theta_c \geq 0 \\ 0, & \cos \theta_c < 0 \end{cases}, \quad (17)$$

式中:  $H_b$  为倾斜面上的日直射辐照量;  $I_b$  为太阳在垂直于入射光线平面上的辐射强度;  $t_0$  为日落太阳时;  $g(\theta_c)$  为控制函数;  $\cos \theta_c < 0$  意味着太阳照射在太阳板的背面。引入这样一个控制函数可以简化日升、日落时角的推导和计算。

在选择坐标系时,以方便确定固定平面的法线向量为准则。例如:计算太阳在北极地面上的入射角应选用赤道平面坐标,因为北极地面(水平面)与赤道平面平行,北极地面在赤道平面坐标中的向量为  $(0, 0, 1)$ , 其入射角为  $\cos \theta_c = (0, 0, 1) \cdot \mathbf{n}_s = \sin \delta$  (在夏半年,  $\sin \delta > 0$ , 太阳整天不落,  $\omega_c = 180^\circ$ ; 而在冬半年,  $\sin \delta < 0$ , 太阳照不到北极,  $\omega_c = 0$ )。又如,对于面向正南、倾角为当地纬度的集热器,其法线在赤道平面坐标系中的坐标为  $(1, 0, 0)$ , 太阳入射角为  $\cos \theta_c = n_x = \cos \delta \cos \omega$ 。

### 3 投影角

在设计太阳系统时,需要考虑前后太阳板或建筑的遮挡。此外,在计算线聚光器和真空管集热器的采光量时,需要知道太阳光在线聚光器/真空管横截面上的投影入射角。投影角是指太阳光在特定平面或横截面上的投影与该平面(横截面)的参考直线的夹角。如图 2 所示,太阳的方位角是指太阳向量在水平面上的投影与正南方向的夹角,即典型的投影角。在地面坐标系中,太阳向量在地面(坐标面)的投影  $X'$  分量为 0, 是一个二维向量,因此太阳在地面上的投影相对于正南的角度可以很方便地用投影向量的两个分量  $n'_y$  和  $n'_z$  求出:

$$\tan \phi_s = \frac{-n'_y}{-n'_z} = \frac{n'_y}{n'_z}. \quad (18)$$

如图 3 所示,太阳板面向正南,前后排是否遮挡取决于太阳板在南北方向上的影长  $D$ , 而  $D$  的大小取决于太阳光在南北向垂直面上的投影与地面法线的夹角,其中  $h$  为太阳板的垂直高度。在地面坐标系中,南北向垂直面与坐标面  $X'O'Z'$  一致,太阳在坐标系  $X'O'Z'$  中的投影为二维向量,其投影相对  $X'$  轴的角度可以简单地由太阳向量的  $n'_x$  和  $n'_z$  两个分量来计算,即

$$\tan \theta_{x'z'} = \frac{-n'_x}{n'_z} = \frac{\cos \delta \cos \omega \sin \lambda - \sin \delta \cos \lambda}{\cos \delta \cos \omega \cos \lambda + \sin \delta \sin \lambda}, \quad (19)$$

$$D = L \cos \beta + L \sin \beta \tan \theta_{x'z'}, \quad (20)$$

式中:  $L$  为太阳板的宽度。

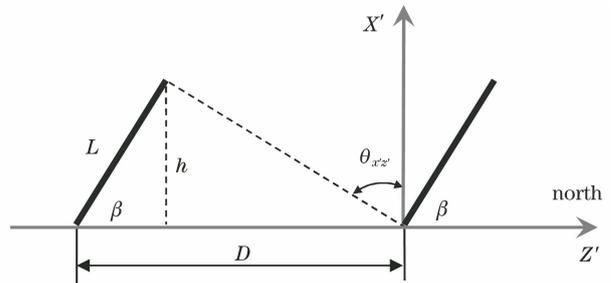


图 3 太阳板前后遮挡距离示意图

Fig. 3 Schematic of shading distance before and after solar panel

中午时 ( $\omega = 0$ ) 太阳的投影入射角为  $\theta_{x'z'} = \lambda - \delta$ 。

图 4 为非南北向建筑物前后遮挡示意图,建筑的方位为南偏西  $\phi$ 。前后是否遮挡取决于建筑在南偏西  $\phi$  方向的影子长度,在计算影子的长度时,需要计算太阳在南偏西  $\phi$  方向垂直面上的投影与地面法线的夹角。由于投影面与地面坐标系中的坐标平面不一致,因此在地面坐标系中,太阳在南偏西  $\phi$  垂直面上的投影不是二维向量,其投影角计算非常复杂。为了方便分析和计算,先建立一个新坐标系,新坐标系中的一个坐标面与投影面一致。如图 4 所示,新坐标系  $X''Y''Z''$  为地面坐标系  $X'Y'Z'$  绕  $X'$  轴旋转  $\phi$  所得,依据前面的坐标转换方法,太阳在新坐标系的  $n''_y$  和  $n''_z$  可表示为

$$\begin{cases} n''_x = n'_x \\ n''_y = \mathbf{n}'_s \cdot \mathbf{Y}'' = \mathbf{n}'_s \cdot (0, \cos \phi, -\sin \phi) = n'_y \cos \phi - n'_z \sin \phi \\ n''_z = \mathbf{n}'_s \cdot \mathbf{Z}'' = \mathbf{n}'_s \cdot (0, \sin \phi, \cos \phi) = n'_y \sin \phi + n'_z \cos \phi \end{cases}, \quad (21)$$

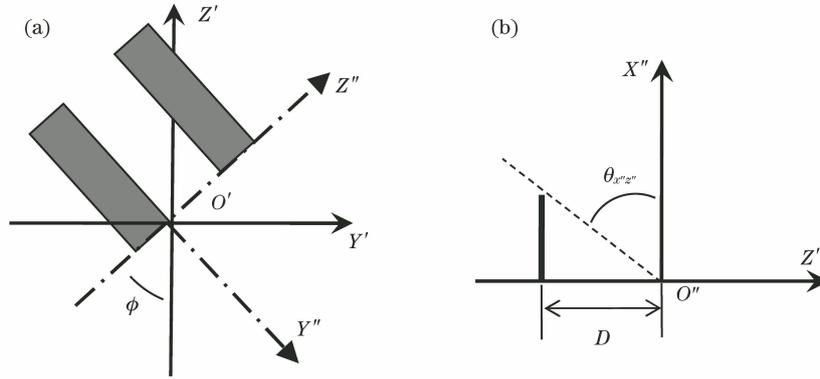


图 4 非正南朝向建筑物的遮挡距离示意图。(a)非南向建筑的示意图；  
(b)太阳光线在与建筑物朝向一致的垂直平面上的投影角

Fig. 4 Schematics of shading distance between non-southern faced buildings. (a) Schematic of non-southern faced buildings; (b) projection angle of sun rays on vertical plane consistent with orientation of building

式中： $Y'' = (0, \cos \phi, -\sin \phi)$  和  $Z'' = (0, \sin \phi, \cos \phi)$  分别为坐标轴  $Y''$  和  $Z''$  在坐标系  $X'Y'Z'$  中的单位向量。

而太阳在  $X''O''Z''$  面上的投影为二维向量，与地面法线 ( $Z''$  轴) 的夹角为

$$\tan \theta_{x''z''} = \frac{-n''_z}{n''_x}, \quad (22)$$

$$D = h \tan \theta_{x''z''}. \quad (23)$$

上述分析显示，在计算投影入射角时，先根据问题的需要确定投影面，然后选择或建立合适的坐标系。为了简化分析和计算，所选或新建的坐标系的一个坐标面必须与投影面一致。这是因为太阳在一个坐标系中为三维向量，而它在坐标面上的投影为二维向量，如果投影面与坐标面不一致，太阳在投影面上的投影还是三维向量，无法直接推导出投影角的计算表达式。当投影面与坐标面一致时，投影角就能简单地根据太阳的二维投影向量的两个分量来计算，从而简化了投影角的计算。

然而，研究者直接依据太阳在地面坐标系中的坐标来计算太阳在非南北向垂直面上的投影角（侧面角）。太阳板 R 的方位角为  $\phi_c$ ，太阳高度角  $\alpha_s$  和 R 面的投影角  $\alpha_p$  如图 5 所示<sup>[26]</sup>。

根据 Duffie 等<sup>[26]</sup> 给出的定义，侧面投影角的推导过程为

$$\frac{H}{\tan \alpha_p} = L \cos(\phi_s - \phi_c) = \frac{H}{\tan \alpha_s} \cos(\phi_s - \phi_c) \Rightarrow \tan \alpha_p = \frac{\tan \alpha_s}{\cos(\phi_s - \phi_c)}. \quad (24)$$

推导过程看似简单，但必须先画示意图，将太阳投影到地面上再投影到侧面，然后推导出投影角。

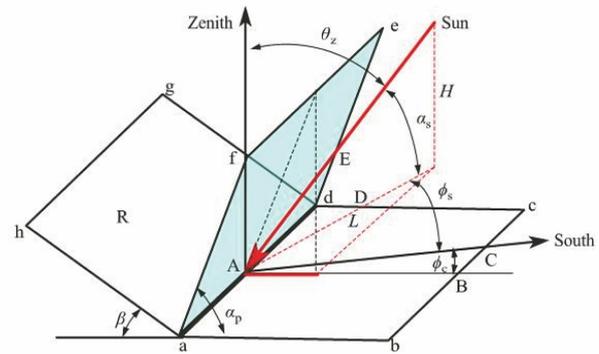


图 5  $\alpha_s$  和  $\alpha_p$  的示意图<sup>[26]</sup>

Fig. 5 Schematic of  $\alpha_s$  and  $\alpha_p$ <sup>[26]</sup>

但如果要计算太阳光在其他面如倾斜线聚光器、真空管和跟踪轴横截面上的入射角，其分析和推导更加复杂。事实上，这里的  $\alpha_p$  就是(22)式中的  $\theta_{x''z''}$ ，而本文所给出的推导简洁、清晰，容易理解。

## 4 向量代数在跟踪系统计算中的应用

在实际应用中，跟踪技术通常关注三个问题：如何跟踪；跟踪效率（即太阳在跟踪面上的入射角余弦  $\cos \theta_c$ ）；跟踪平面与地面的夹角  $\beta_c$ 。以便计算天空散射辐射。跟踪系统总体上分为双轴和单轴跟踪。

### 4.1 双轴跟踪系统

对于双轴跟踪系统，要求跟踪平面的法线始终指向太阳，即跟踪平面的法线向量等于太阳向量。在地面坐标系中有

$$n'_c = n'_s. \quad (25)$$

太阳在跟踪平面上的入射角为

$$\cos \theta_c = n'_s \cdot n'_c = 1. \quad (26)$$

双轴跟踪系统采用水平轴和垂直轴独立跟踪，

水平轴用于调整太阳板的倾角即用于跟踪太阳的天顶角,而垂直轴用于跟踪太阳的方位角。在地面坐标系中,地面法线的向量为  $\mathbf{n}'_h = (1, 0, 0)$ , 因此,跟踪平面的倾角为

$$\cos \beta_c = \mathbf{n}'_c \cdot \mathbf{n}'_h = n'_x = \cos \theta_z. \quad (27)$$

而跟踪平面的方位角  $\phi_c$  等于太阳在水平面上的投影的方位角,即

$$\tan \phi_c = \frac{-n'_y}{-n'_z} = \frac{n'_y}{n'_z}. \quad (28)$$

跟踪系统的运行从日出开始直至日落。

#### 4.2 单轴跟踪系统

在笛卡儿坐标系中,太阳光在一个坐标面上的入射角的正切的平方等于太阳光在其他两个坐标面上的投影入射角的正切平方之和。如太阳在  $Y''O''Z''$  面上的入射角为  $\tan \theta = \frac{|n''_{s,y''z''}|}{|n''_x|} = \sqrt{\left(\frac{n''_z}{n''_x}\right)^2 + \left(\frac{n''_y}{n''_x}\right)^2} =$

$\sqrt{\tan^2 \theta_{x''z''} + \tan^2 \theta_{x''y''}}$ , 其中  $n''_{s,y''z''}$  为太阳向量在  $Y''Z''$

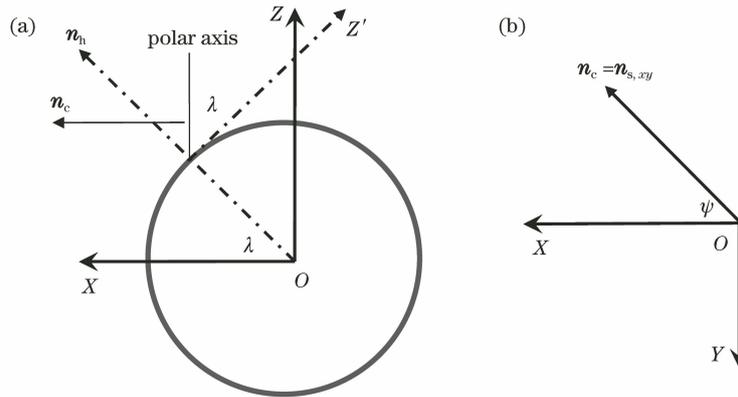


图 6 地轴跟踪太阳板在赤道坐标系中的法线向量。(a)跟踪太阳板的法线在  $XOZ$  坐标面的投影; (b)跟踪太阳板的法线在  $XOY$  坐标面的投影

Fig. 6 Normal vector of polar axis sun-tracking solar panel in equatorial coordinate system. (a) Projection of normal of tracing solar panel on  $XOZ$  coordinate plane; (b) projection of normal of tracing solar plane on  $XOY$  coordinate plane

由于太阳在  $XOY$  平面上的投影为二维向量,其模长为  $\sqrt{n_x^2 + n_y^2}$ , 因此其单位向量为  $\mathbf{n}_{s,xy} = (n_x, n_y, 0) / \sqrt{n_x^2 + n_y^2}$ 。太阳在跟踪平面上的入射角为

$$\cos \theta_c = \mathbf{n}_s \cdot \mathbf{n}_c = (n_x, n_y, n_z) \cdot$$

$$(n_x, n_y, 0) / \sqrt{n_x^2 + n_y^2} = \sqrt{n_x^2 + n_y^2}. \quad (30)$$

将(2)式代入(30)式,得

$$\cos \theta_c = \cos \delta. \quad (31)$$

$\delta$  的年变化范围为  $0^\circ \sim 23.45^\circ$ , 因此  $\cos \theta_c$  的年变化范围为  $0.92 \sim 1.00$ , 年平均值为  $0.96$ , 也就是说地轴跟踪系统年平均跟踪效率为双轴跟踪系统的  $96\%$ 。在跟踪过程中,  $\mathbf{n}_c = \mathbf{n}_{s,xy}$ 。如图 6 所示,跟踪平面的法线偏离天顶的姿态角  $\psi$  (下午为正)为

面上的投影。对于单轴跟踪系统,跟踪平面的法线始终在与跟踪轴垂直的平面上(跟踪轴横截面)上移动,因此,为了使太阳在跟踪平面上的入射角  $\theta_c$  最小,要求跟踪平面的法线与太阳光线在跟踪轴横截面的投影重合,从而使太阳光在跟踪轴横截面上的投影入射角为  $0$ 。依据这一跟踪原则,结合向量代数可以方便地推导出太阳在单轴跟踪平面上的入射角、跟踪平面姿态角及与地面夹角的计算表达式。

##### 4.2.1 地轴跟踪

地轴跟踪是指跟踪轴平行于地轴。如图 6 所示,由于跟踪轴与赤道平面坐标系中的  $Z$  轴一致,因此选择赤道平面坐标来分析较为方便、合适。依据单轴跟踪的技术要求,要求跟踪平面的法线向量  $\mathbf{n}_c$  与太阳在跟踪轴横截面( $XOY$  坐标面)上的投影向量  $\mathbf{n}_{s,xy}$  重合,即

$$\mathbf{n}_c = \mathbf{n}_{s,xy} = (n_x, n_y, 0) / \sqrt{n_x^2 + n_y^2}. \quad (29)$$

$$\tan \psi = \frac{-n_y}{n_x} = \frac{\cos \delta \sin \omega}{\cos \delta \cos \omega} = \tan \omega. \quad (32)$$

即  $\psi = \omega$ , 因此,地轴跟踪系统的姿态角等于时角。在赤道坐标系中,地面法线向量为  $\mathbf{n}_h = (\cos \lambda, 0, \sin \lambda)$ , 因此,跟踪平面与地面的夹角为

$$\cos \beta_c = \mathbf{n}_c \cdot \mathbf{n}_h = \mathbf{n}_{s,xy} \cdot \mathbf{n}_h =$$

$$n_x \cos \lambda / \sqrt{n_x^2 + n_y^2} = \cos \omega \cos \lambda. \quad (33)$$

##### 4.2.2 水平轴跟踪

对于南北水平轴跟踪系统,其跟踪轴与地面坐标系的  $Z'$  轴一致,为了方便分析,可选用地面坐标。如图 7(a)所示,  $Z'$  轴为跟踪轴,在跟踪过程中要求跟踪平面法线向量与太阳在跟踪轴横截面( $X'O'Y'$ )的投影向量重合,即

$$\mathbf{n}'_c = \mathbf{n}'_{s,x'y'} = (n'_x, n'_y, 0) / \sqrt{n'^2_x + n'^2_y} \quad (34)$$

太阳在跟踪平面上的入射角为

$$\cos \theta_c = \mathbf{n}'_c \cdot \mathbf{n}'_s = \frac{\sqrt{n'^2_x + n'^2_y}}{\sqrt{1 - \cos^2 \delta \sin^2 \omega}} \quad (35)$$

跟踪平面法线相对天顶的姿态角  $\psi$  (偏西为正) 为

$$\tan \psi = \frac{-n'_y}{n'_x} = \frac{-\cos \delta \sin \omega}{\cos \delta \cos \omega \cos \lambda + \sin \delta \sin \lambda} \quad (36)$$

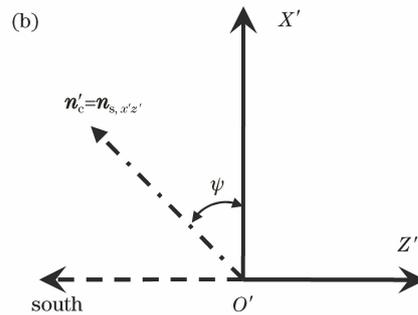
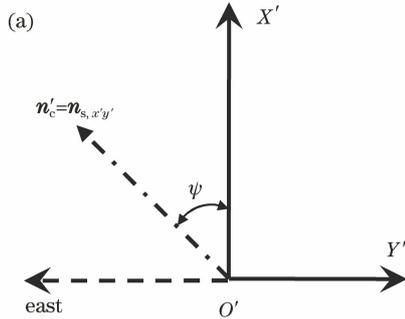


图 7 水平面轴跟踪太阳板在地面坐标系中的法线向量。(a)南北水平面轴跟踪太阳板;(b)东西水平面轴跟踪太阳板

Fig. 7 Normal vector of horizontal axis sun-tracking panel in horizontal coordinate system.

(a) N-S horizontal axis sun-tracking panel; (b) E-W horizontal axis sun-tracking panel

#### 4.2.3 南北倾斜轴跟踪

对于南北倾斜轴跟踪 (inclined north-south axis, INSA) 系统,其跟踪轴既不与水平面坐标系的坐标轴平行,也不与赤道坐标系的坐标轴平行,因此,为了便于分析,先选择一个原坐标系,通过旋转坐标轴来建立一个新坐标系,新坐标系的一根坐标轴必须与跟踪轴平行。原则上水平面坐标系和赤道平面坐标系均可以作为原坐标系,但水平面坐标系本身源自赤道平面坐标系,因此选用赤道平面坐标系更合适。

如图 8 所示,设跟踪轴与地面的夹角为  $\beta$ ,跟踪轴与赤道坐标系中的  $Z$  轴的角为  $\lambda - \beta$ ,新坐标系的  $Z''$  轴平行跟踪轴指向北面天空, $Y''$  轴平行地面指向正东, $X''$  垂直于跟踪轴指南面天空,新坐标系  $X''Y''Z''$  是赤道平面坐标系绕  $Y$  轴旋转  $\lambda - \beta$  的结果,依据前面的坐标转换方法,太阳矢量  $\mathbf{n}_s$  在  $X''Y''Z''$  的坐标分量为

$$\begin{cases} n''_x = \mathbf{n}_s \cdot [\cos(\lambda - \beta), 0, \sin(\lambda - \beta)] = \\ n_x \cos(\lambda - \beta) + n_z \sin(\lambda - \beta) \\ n''_y = n_y \\ n''_z = \mathbf{n}_s \cdot [-\sin(\lambda - \beta), 0, \cos(\lambda - \beta)] = \\ -n_x \sin(\lambda - \beta) + n_z \cos(\lambda - \beta) \end{cases} \quad (38)$$

跟踪平面与地面的夹角为

$$\cos \beta_c = \mathbf{n}'_c \cdot \mathbf{n}'_h = (1, 0, 0) \cdot (n'_x, n'_y, 0) / \sqrt{n'^2_x + n'^2_y} = n'_x / \sqrt{n'^2_x + n'^2_y} \quad (37)$$

用同样的方法可以推导出东西水平轴跟踪 [图 7(b)] 太阳板的跟踪效率、姿态角及与地面的夹角。但是当水平跟踪轴与坐标轴的取向不一致时,为了便于找到太阳在跟踪轴横截面上的投影向量,需要建立一个新坐标,使跟踪轴与坐标轴一致。

在新坐标系中, $Z''$  为跟踪轴,在跟踪过程中要求跟踪平面的法线向量  $\mathbf{n}''_c$  与太阳在跟踪轴横截面 (即  $X''O''Y''$ ) 上的投影向量重合,即

$$\mathbf{n}''_c = \mathbf{n}''_{s,x''z''} = (n''_x, 0, n''_z) / \sqrt{n''^2_x + n''^2_z} \quad (39)$$

太阳在跟踪平面上的入射角为

$$\cos \theta_c = \mathbf{n}''_c \cdot \mathbf{n}''_s = \frac{\sqrt{n''^2_x + n''^2_z}}{\sqrt{1 - \cos^2 \delta \sin^2 \omega}} \quad (40)$$

跟踪平面法线相对天顶的姿态角  $\psi$  (偏西为正) 为

$$\tan \psi = \frac{-n''_y}{n''_x} = \frac{-\cos \delta \sin \omega}{\cos \delta \cos \omega \cos(\lambda - \beta) + \sin \delta \sin(\lambda - \beta)} \quad (41)$$

如图 8 所示,地面法线在新坐标系中的向量为

$$\mathbf{n}''_h = [\cos(\lambda - \beta), 0, \sin(\lambda - \beta)] \quad (42)$$

因此,跟踪平面与地面的夹角为

$$\cos \beta_c = \mathbf{n}''_c \cdot \mathbf{n}''_h = [\cos(\lambda - \beta), 0, \sin(\lambda - \beta)] \cdot (n''_x, 0, n''_z) / \sqrt{n''^2_x + n''^2_z} = n''_x \cos(\lambda - \beta) / \sqrt{n''^2_x + n''^2_z} \quad (43)$$

#### 4.2.4 垂直轴跟踪

在双轴跟踪系统中,水平轴用于跟踪太阳的天顶角,使太阳板的倾角  $\beta$  等于太阳的天顶角  $\theta_z$ ,而垂直轴用于跟踪太阳的方位角,使集热器的方位角  $\phi_c$

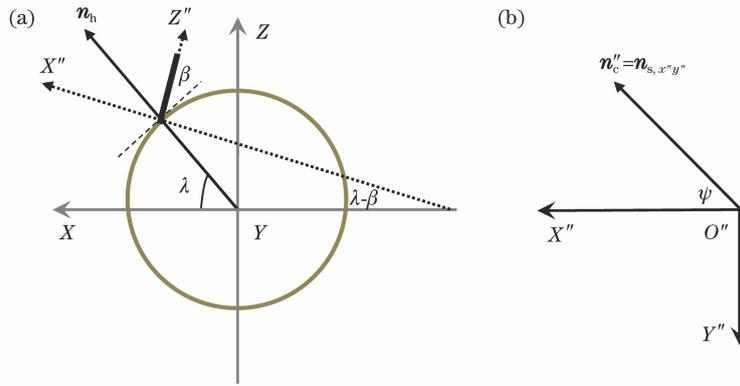


图 8 新坐标系的建立及南北倾斜轴跟踪太阳板的法线向量。(a)新坐标系与赤道平面坐标系的关系；  
(b)新坐标系中南北倾斜轴跟踪太阳板的法线向量

Fig. 8 Newly proposed coordinate system and normal vector of INSA tracked solar panels. (a) Relationship between newly proposed coordinate and equatorial coordinate systems; (b) normal vector of INSA tracked solar panels in newly proposed coordinate system

等于太阳的方位角  $\phi_s$ 。因此,对于单独的垂直轴跟踪系统,在跟踪过程中,要求跟踪平面的方位角始终等于太阳的方位角。

如图 9 所示,因跟踪轴为地面法线,与地面坐标

系的坐标轴一致,故选用地面坐标系来进行分析较为方便。假设太阳板安装在倾角为  $\beta$  的垂直轴跟踪平台上,在地面坐标系中,太阳板法线的向量为

$$\mathbf{n}'_c = (\cos \beta, -\sin \beta \sin \phi_s, -\sin \beta \cos \phi_s)。 \quad (44)$$

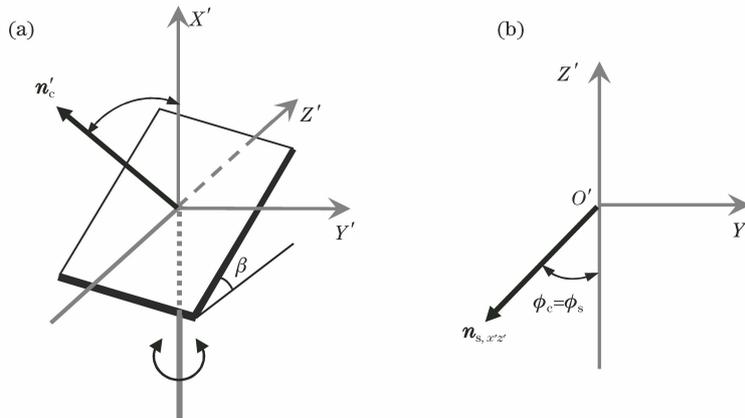


图 9 垂直轴跟踪原理及跟踪平面法线在水平面坐标中的向量。(a)垂直轴跟踪系统示意图；  
(b)太阳板法线在水平面上的投影向量

Fig. 9 Scheme of vertical axis sun-tracking system and vector of sun-tracking panel normal in horizontal coordinate system. (a) Scheme of vertical axis sun-tracking system; (b) projection vector of solar panel normal on horizontal plane

同样地,太阳在地面坐标系中的向量为

$$\mathbf{n}'_s = (\cos \theta_z, -\sin \theta_z \sin \phi_s, -\sin \theta_z \cos \phi_s)。 \quad (45)$$

太阳在跟踪平面上的入射角为

$$\cos \theta_c = \mathbf{n}'_s \cdot \mathbf{n}'_c = \cos(\lambda - \beta)。 \quad (46)$$

跟踪平面与地面的夹角始终为  $\beta$ ,其方位角满足(18)式。

作为计算案例,图 10 给出了地轴跟踪系统、水平东西轴和水平南北轴跟踪系统在两分( $\delta=0$ )和冬至( $\delta=-23.45^\circ$ )日的跟踪效率及太阳在面向正南且倾角为  $\lambda$  的固定式太阳板上的入射角余弦随时间

的变化曲线。

#### 4.2.5 倾斜南北轴多位置跟踪(INSA-MP)

前面分析显示,倾斜南北轴跟踪的目的是使跟踪平面的法线与太阳在跟踪轴横截面上的投影重合,从而使太阳在跟踪平面上的入射角最小。然而,对于非聚光型太阳能接收器(如太阳电池),即使入射角偏离垂直入射  $20^\circ$ ,其对采光量的影响也是非常有限的(因为  $\cos 20^\circ = 0.94$ ),因此没有必要采用连续跟踪技术,可以采用每隔一段时间调整一次跟踪平面姿态角的简单跟踪技术。

如图 11 所示,跟踪轴为倾斜南北轴(INSA),轴

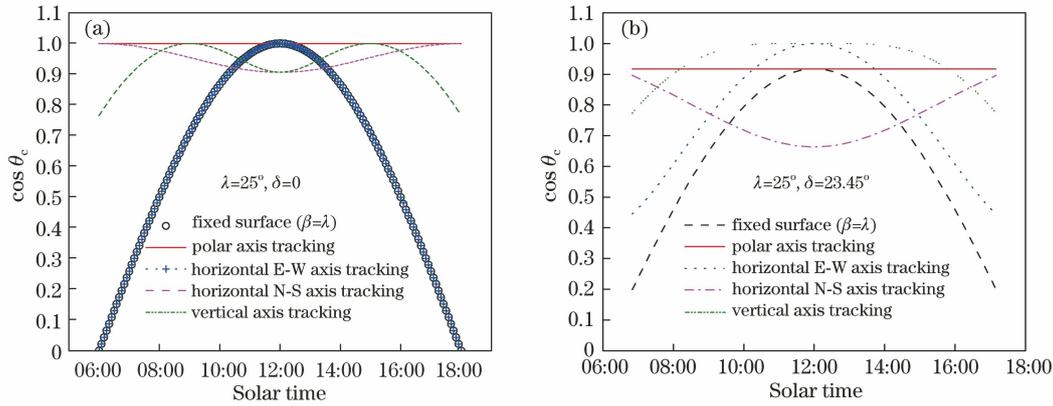


图 10 不同跟踪方式的跟踪效率随时间的变化曲线。(a) 两分; (b) 冬至日

Fig. 10 Sun-tracking efficiency versus time for different sun-tracking techniques. (a) Equinoxes; (b) winter solstice

的倾角为  $\beta$ , 姿态角 (又称方位角) 每天绕 INSA 自东向西调整  $M$  次 (INSA-MP), 使得太阳光线在跟踪轴横截面上的投影与跟踪平面法线的夹角 (投影入射角) 小于设定的角度  $\theta_a$ 。每天调整次数  $M$  与  $\theta_a$  的取值有关, 为了使太阳板在中午面向正南,  $M$  应取奇数。INSA-MP 系统与 INSA 连续跟踪系统的跟踪轴相同, 因此, 可采用 4.2.3 节中的坐标系  $X''Y''Z''$  来进行分析。在  $X''Y''Z''$  坐标系统中, INSA-MP 太阳板在第  $i$  ( $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 个跟踪位置的法线向量为

$$\mathbf{n}''_c = (\cos \gamma_i, -\sin \gamma_i, 0), \quad (47)$$

式中:  $\gamma_i$  为太阳板在第  $i$  个跟踪位偏离天顶的姿态角 (下午为正)。如图 11 所示, 对于 INSA-7P 跟踪

系统, 有

$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & \theta_p \leq \theta_a \\ 2\theta_a, & \theta_a < \theta_p \leq 3\theta_a \\ 4\theta_a, & 3\theta_a < \theta_p \leq 5\theta_a \\ 6\theta_a, & \theta_p > 5\theta_a \end{cases}, \quad (48)$$

式中:  $\theta_p$  为太阳光在 INSA 轴横截面即坐标面  $X''O''Y''$  上的投影相对于  $X''$  轴的投影角, 其大小取决于太阳在  $X''O''Y''$  上 (二维) 投影向量的两个分量, 即

$$\theta_p = \begin{cases} \arctan \left| \frac{n''_y}{n''_x} \right|, & n''_x > 0 \\ 0.5\pi, & n''_x = 0 \\ 0.5\pi + \arctan \left| \frac{n''_x}{n''_y} \right|, & n''_x < 0 \end{cases}. \quad (49)$$

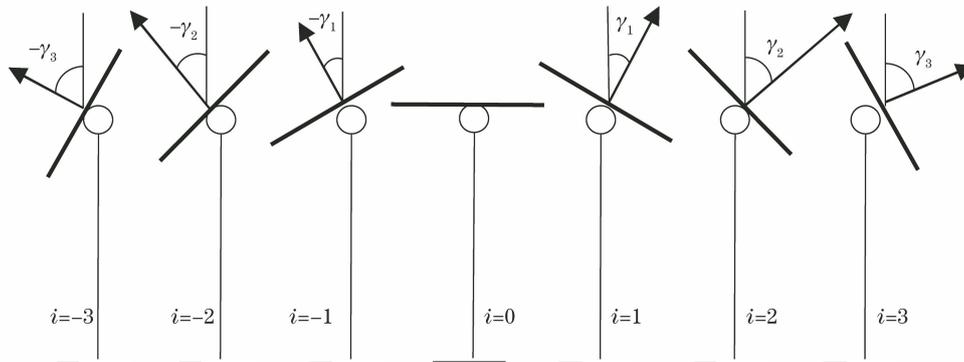


图 11 倾斜南北轴多位置跟踪系统沿跟踪轴方向的后视图

Fig. 11 Back view of INSA-MP system in direction of INSA

太阳在 INSA-7P 上的入射角为

$$\cos \theta_c = \mathbf{n}''_s \cdot \mathbf{n}''_c = n''_x \cos \gamma_i - n''_y \sin \gamma_i. \quad (50)$$

跟踪平面与地面的夹角为

$$\begin{aligned} \cos \beta_c &= \mathbf{n}''_c \cdot \mathbf{n}''_h = [\cos(\lambda - \beta), 0, \sin(\lambda - \beta)] \cdot \\ &\mathbf{n}''_c = \cos(\lambda - \beta) \cos \gamma_i. \end{aligned} \quad (51)$$

在实际应用中, 先根据需求确定每天的调整次数, 然后根据当地的太阳辐射资源采用循环寻优的

计算方法找出年采光量最大时所对应的最佳的  $\theta_a$ <sup>[27]</sup>, 或者依据当地冬至日的日落时角 ( $w_0$ ) 按照  $\theta_a = w_0/M$  来估算。在跟踪过程中, 可依据光敏元件或者投影角的计算公式 (49) 式及姿态角调整的要求 (48) 式, 通过计算调整时间, 实现姿态角的自动控制。作为计算案例, 图 12 给出了北京 ( $\lambda = 39.95^\circ$ ,  $\beta = \lambda$ ) INSA-3P、INSA-5P、INSA-7P 及 INSA 连续

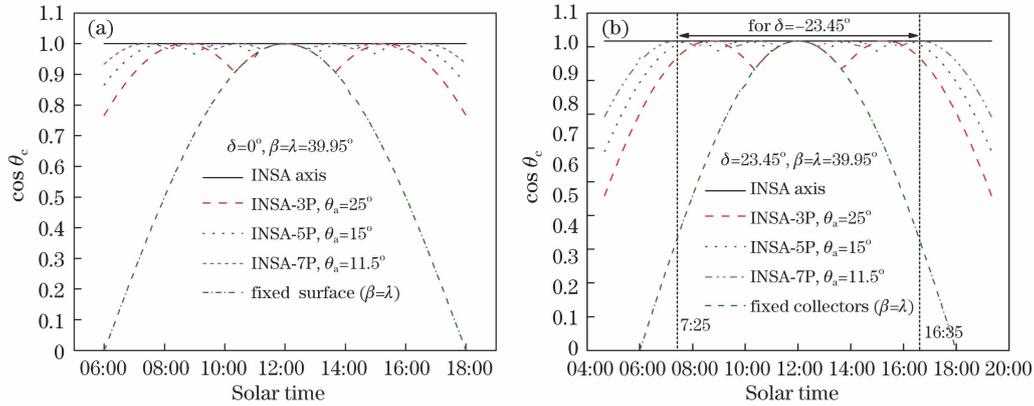


图 12 不同跟踪系统的跟踪效率随时间的变化曲线。(a) 两分; (b) 两至日

Fig. 12 Tracking efficiency versus time for different tracking systems. (a) Equinoxes; (b) solstices

跟踪系统的跟踪效率。可以看出,随着  $M$  的增加, INSA-MP 的跟踪效率逐渐接近 INSA 连续跟踪系统的跟踪效率。

#### 4.2.6 定日镜和光的反射定律

如图 13(a) 所示,定日镜将地面太阳光反射到位于塔顶的太阳能接收器的双轴跟踪系统中,在运行的过程中,各定日镜因所处位置不同,需要采用不同的跟踪控制程序,但必须满足光的反射定律:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}'_c = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}'_c, \quad (52)$$

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}'_c = 0, \quad (53)$$

式中:  $\mathbf{i}$  为入射光的向量;  $\mathbf{r}$  为反射光的单位向量;  $\mathbf{n}'_c$  为定日镜的法线向量。(53) 式是入射光、反射光和

镜面法线在同一平面上的数学表达形式。在地面坐标系中,入射光的向量为  $\mathbf{i} = (n'_x, n'_y, n'_z)$ 。假设某定日镜离地面高度为  $h$ , 在地面坐标系中的坐标为  $(h, y_c, z_c)$ , 位于塔顶的太阳接收器的高度为  $H$ , 则反射光的单位向量为

$$\mathbf{r} = (H - h, -y_c, -z_c) / D, \quad (54)$$

式中:  $D = \sqrt{(H - h)^2 + y_c^2 + z_c^2}$  为定日镜与太阳接收器之间的直线距离。由于入射光、反射光和镜面法线在同一平面上, 因此, 定日镜法线向量  $\mathbf{n}'_c$  是向量  $\mathbf{i}$  和  $\mathbf{r}$  的线性组合, 即

$$\mathbf{n}'_c = a\mathbf{i} + b\mathbf{r}, \quad (55)$$

式中:  $a$  和  $b$  为待定常数。

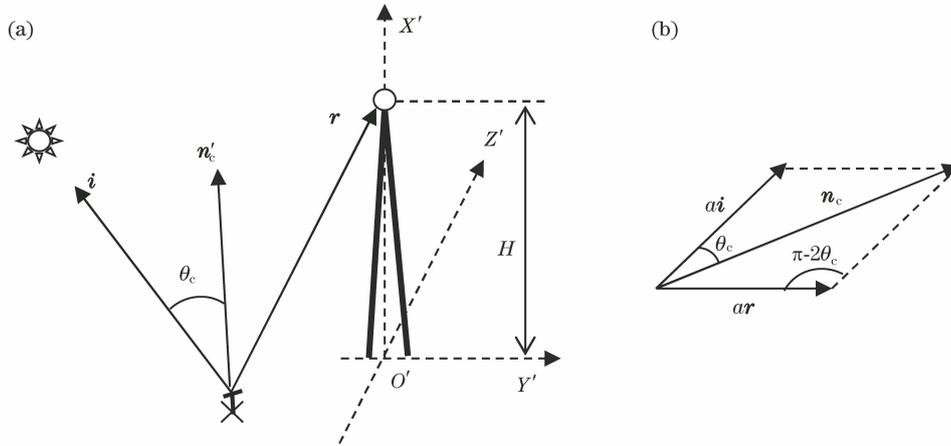


图 13 太阳塔示意图及光的反射。(a) 太阳塔示意图; (b)  $\mathbf{i}, \mathbf{r}$  及  $\mathbf{n}'_c$  之间的关系

Fig. 13 Scheme of solar tower and reflection of light. (a) Schematic of solar tower; (b) relationship among vectors  $\mathbf{i}, \mathbf{r}$  and  $\mathbf{n}'_c$

将(55)式代入(52)式,得

$$(a - b)(1 - \mathbf{i} \cdot \mathbf{r}) = 0, \quad (56)$$

式中:  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{r} = \cos 2\theta_c$ 。由(56)式得  $a = b$ , 因此(55)式变为

$$\mathbf{n}'_c = a(\mathbf{i} + \mathbf{r}) =$$

$$a[n'_x - (H - h)/D, n'_y - y_c/D, n'_z - z_c/D]. \quad (57)$$

令向量  $\mathbf{n}_c$  的模长  $|\mathbf{n}_c| = 1$ , 结合图 13(b) 中  $a\mathbf{i}, a\mathbf{r}, \mathbf{n}_c$  三者之间的几何关系, 得

$$2a^2 + 2a^2 \cos 2\theta_c = a^2(2 + 2\mathbf{i} \cdot \mathbf{r}) = 1, \quad (58)$$

$$a = (2 + 2\mathbf{i} \cdot \mathbf{r})^{-0.5}. \quad (59)$$

由于  $\cos 2\theta_c = \mathbf{i} \cdot \mathbf{r}$ , 因此太阳在定日镜上的入射角为

$$\cos \theta_c = 0.5(1 + \mathbf{i} \cdot \mathbf{r})^{-0.5}. \quad (60)$$

在定日镜跟踪期间, 当  $1 + \mathbf{i} \cdot \mathbf{r} < 0$  时, 定日镜停止跟踪。定日镜采用双轴跟踪, 水平轴控制定日镜的倾角, 垂直轴用于控制其方位角。定日镜的倾角为  $\cos \theta_c = \mathbf{n}_c \cdot (1, 0, 0) = a[n'_x - (H - h)/D]$ 。

$$(61)$$

定日镜相对于正南的方位角为

$$\tan \phi_c = \frac{-n_{c,y'}}{-n_{c,z'}} = \frac{n'_y - y_c/D}{n'_z - z_c/D}. \quad (62)$$

在实际应用中, 当已知  $\mathbf{i}$  和  $\mathbf{n}$  时, 由  $\mathbf{n} = a(\mathbf{i} + \mathbf{r})$  及(59)式可得到反射光的向量为

$$\mathbf{r} = -\mathbf{i} + (\mathbf{i} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}. \quad (63)$$

#### 4.2.7 投影入射角与投影反射角的关系

单轴跟踪被广泛用于抛物槽聚光器, 在跟踪过程中, 抛物槽采光面的法线与太阳光在抛物槽横截面上的投影重合, 光线在抛物槽或其他线聚光器横截面上的传输过程是否满足投影入射角等于投影反射角是理论分析和系统设计的重要关注点。在笛卡儿 XYZ 坐标中, 太阳光线在 XOY 坐标面上的投影入射角  $\theta_{i,xy}$  等于入射光和镜面法线在 XOY 坐标面上的投影向量的点积:

$$\cos \theta_{i,xy} = \frac{(i_x, i_y, 0) \cdot (n_x, n_y, 0)}{\sqrt{i_x^2 + i_y^2} \sqrt{n_x^2 + n_y^2}} = \frac{\mathbf{i} \cdot \mathbf{n} - i_z n_z}{\sqrt{1 - i_z^2} \sqrt{1 - n_z^2}} = \frac{\cos \theta_i - i_z n_z}{\sqrt{1 - i_z^2} \sqrt{1 - n_z^2}}. \quad (64)$$

同样地, 太阳在 XOY 平面上的投影反射角为

$$\cos \theta_{r,xy} = \frac{(r_x, r_y, 0) \cdot (n_x, n_y, 0)}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2} \sqrt{n_x^2 + n_y^2}} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} - r_z n_z}{\sqrt{1 - r_z^2} \sqrt{1 - n_z^2}}. \quad (65)$$

当镜面法线位于投影面 XOY 时,  $n_z = 0$ , 由(42)式得

$$\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z) = (-i_x + 2n_x \cos \theta_i, -i_y + 2n_y \cos \theta_i, -i_z), \quad (66)$$

因此有

$$r_z = i_z. \quad (67)$$

由于  $\cos \theta_i = \cos \theta_r$ , 由(65)~(67)式可知, 只有当  $n_z = 0$  时,  $\cos \theta_{i,xy} = \cos \theta_{r,xy}$ , 否则两者不相等。

而在 XOZ 坐标面上, 投影入射角与投影反射角分别为  $\tan \theta_{i,xz} = \left| \frac{i_z}{i_x} \right|$  和  $\tan \theta_{r,xz} = \left| \frac{r_z}{r_x} \right|$ 。由(66)式和(67)式得:  $|i_z| = |r_z|$ ,  $r_x = -i_x + 2n_x \cos \theta_i$ 。当  $i_x > 0$  时,  $r_x < i_x$ ,  $\theta_{r,xz} > \theta_{i,xz}$  即投影反射角大于投影入射角。由此可见, 当反射面的法线位于投影面时, 投影入射角等于投影反射角, 否则, 投影入射角不等于投影反射角。这一结果表明: 太阳光在线聚光器横截面上的投影入射角等于反射角, 但其轴向投影反射角大于其投影入射角, 因此, 在研究和分析线聚光器的光线传输过程时, 只需要考虑横向投影角, 其传输过程可按照入射角等于反射角的规律进行分析。这表明线聚光器的光学效率只与太阳光的横向投影入射角有关, 而采光量不仅与太阳光在采光面上的入射角有关, 还与光线在横截面上的投影入射角有关。

## 5 结 论

案例分析显示, 简化太阳能计算的核心是根据实际需要选择或建立合适的坐标系来描述太阳在地面上方的运动规律, 描述太阳运动的基本坐标系为建立在赤道平面上的笛卡儿坐标系。由于日、地相距遥远, 建立在地面上的不同笛卡儿坐标系均可以通过旋转坐标轴来实现相互转换。太阳在一个坐标系中的三个分量代表太阳向量在三个坐标轴上的投影, 因此, 太阳在新坐标系中的分量可以分别用太阳和新坐标轴在原坐标系中的向量的点积来实现转换。对于固定平面, 坐标系的选择和建立应方便确定其法线向量。由于太阳向量在笛卡儿坐标中为三维向量, 但太阳在坐标面上的投影为二维向量, 因此, 在计算投影角时, 坐标系的选择和建立应使其中一个坐标面与投影面一致, 这样就能简单地根据太阳投影向量的二个分量来计算其投影角。太阳在笛卡儿坐标系一个坐标面上的入射角与它在另外两个坐标面上的投影入射角有关, 单轴跟踪的目的是使太阳光在一个坐标面上的投影入射角为 0, 从而使太阳光在跟踪平面上的入射角最小, 因此, 单轴跟踪的准则是使跟踪平面的法线与太阳光线在跟踪轴横截面上的投影重合。为了方便寻找太阳光在跟踪轴横截面上的投影, 坐标系的选择和建立应保证一根坐标轴与跟踪轴的取向一致。利用向量代数结合光的反射定律可以方便地找到入射向量、反射向量和镜面法线向量之间的空间关系, 从而简化了太阳光线在定日镜上的入射角的推导。分析显示, 只有当

镜面法线位于投影面时,投影入射角才等于投影反射角,因此,太阳光在线聚光器横截面上的投影入射角等于投影反射角,线聚光器的采光量不仅与太阳在采光面上的入射角有关,还与太阳光在横截面上的投影入射角有关。分析表明:采用向量代数可以大大简化相关的计算和理论分析,分析过程简单,条理清晰,便于理解。

### 参 考 文 献

- [1] Tang R S, Wu T. Optimal tilt-angles for solar collectors used in China[J]. *Applied Energy*, 2004, 79(3): 239-248.
- [2] Gunerhan H, Hepbasli A. Determination of the optimum tiltangle of solar collectors for building applications[J]. *Building and Environment*, 2007, 42(2): 779-783.
- [3] Hussein H M S, Ahmad G E, El-Ghetany H H. Performance evaluation of photovoltaic modules at different tilt angles and orientations [J]. *Energy Conversion and Management*, 2004, 45(15/16): 2441-2452.
- [4] Tang R S, Gao W F, Yu Y M, et al. Optimal tilt-angles of all-glass evacuated tube solar collectors[J]. *Energy*, 2009, 34(9): 1387-1395.
- [5] Caton P. Design of rural photovoltaic water pumping systems and the potential of manual array tracking for a West-African village[J]. *Solar Energy*, 2014, 103: 288-302.
- [6] Chang T P. The gain of single-axis trackedpanel according to extraterrestrial radiation [J]. *Applied Energy*, 2009, 86(7/8): 1074-1079.
- [7] Li Z M, Liu X Y, Tang R S. Optical performance of inclined south-north single-axis tracked solar panels [J]. *Energy*, 2010, 35(6): 2511-2516.
- [8] Gómez-Gil F J, Wang X T, Barnett A. Energy production of photovoltaic systems: Fixed, tracking, and concentrating [J]. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 2012, 16(1): 306-313.
- [9] Vilela O C, Fraidenraich N, Tiba C. Photovoltaic pumping systems driven by tracking collectors. Experiments and simulation[J]. *Solar Energy*, 2003, 74(1): 45-52.
- [10] Wu H B, Tang R S, Li Z M, et al. A mathematical procedure to estimate solar absorptance of shallow water ponds[J]. *Energy Conversion and Management*, 2009, 50(7): 1828-1833.
- [11] Yu Y M, Liu N Y, Li G H, et al. Performance comparison of CPCs with and without exit angle restriction for concentrating radiation on solar cells [J]. *Applied Energy*, 2015, 155: 284-293.
- [12] Chen F, Li M, Ji X, et al. Influence of glass thickness of reflector on the concentrating characteristics in the solar-energy trough system [J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, 32(12): 1208002.  
陈飞, 李明, 季旭, 等. 太阳能槽式系统反射镜玻璃厚度对聚光特性的影响 [J]. *光学学报*, 2012, 32(12): 1208002.
- [13] Feng Z K, Li M, Wang Y F, et al. Study on optical efficiency characteristics of receivers in a solar parabolic trough concentrator [J]. *Acta Optica Sinica*, 2016, 36(1): 0122002.  
冯志康, 李明, 王云峰, 等. 太阳能槽式系统接收器光学效率的特性研究 [J]. *光学学报*, 2016, 36(1): 0122002.
- [14] Chen F, Gao C, Yang C X, et al. Surface-shape construction and optical analysis of novel solar compound parabolic concentrator with circular absorber [J]. *Acta Optica Sinica*, 2019, 39(6): 0608001.  
陈飞, 高崇, 杨春曦, 等. 新型圆形吸收体太阳能复合抛物线聚光器面形构建及光学分析 [J]. *光学学报*, 2019, 39(6): 0608001.
- [15] Wang J F, Tang R S. Optical performance of CPCs suitable for all-glass evacuated tubes [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2014, 41(s1): s116002.  
王进福, 唐润生. 适合于全玻璃真空管的 CPC 光学性能分析 [J]. *中国激光*, 2014, 41(s1): s116002.
- [16] Tang R S, Wang J F. A note on multiple reflections of radiation within CPCs and its effect on calculations of energy collection [J]. *Renewable Energy*, 2013, 57: 490-496.
- [17] Tang R S, Liu X Y. Optical performance and design optimization of V-trough concentrators for photovoltaic applications [J]. *Solar Energy*, 2011, 85(9): 2154-2166.
- [18] Tang R S, Yang Y Q, Gao W F. Comparative studies on thermal performance of water-in-glass evacuated tube solar water heaters with different collector tilt-angles [J]. *Solar Energy*, 2011, 85(7): 1381-1389.
- [19] Rabl A. *Active solar collectors and their applications* [M]. Oxford: Oxford University Press, 1981: 30-42.
- [20] Sproul A B. Derivation of the solar geometric relationships using vector analysis [J]. *Renewable Energy*, 2007, 32(7): 1187-1205.
- [21] Tang R S, Meir I A, Etzion Y. An analysis of absorbed radiation by domed and vaulted roofs as compared with flat roofs [J]. *Energy and Buildings*, 2003, 35(6): 539-548.
- [22] Tang R S, Meir I A, Etzion Y. Thermal behavior of buildings with curved roofs as compared with flat roofs [J]. *Solar Energy*, 2003, 74(4): 273-286.

- [23] Tang J J, Yu Y M, Tang R S. A three-dimensional radiation transfer model to evaluate performance of compound parabolic concentrator-based photovoltaic systems[J]. *Energies*, 2018, 11(4): 896.
- [24] Li G H, Tang J J, Tang R S. A note on design of linear dielectric compound parabolic concentrators [J]. *Solar Energy*, 2018, 171: 500-507.
- [25] Li G H, Tang J J, Tang R S. A theoretical study on performance and design optimization of linear dielectric compound parabolic concentrating photovoltaic systems [J]. *Energies*, 2018, 11(9): 2454.
- [26] Duffie J A, Beckman W A. *Solarengineering of thermal processes* [M]. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2013: 17-20.
- [27] Li G H, Chen Y B, Yu Y M, et al. Performance and design optimization of single-axis multi-positionsun-tracking PV panels [J]. *Journal of Renewable and Sustainable Energy*, 2019, 11(6): 063701.