

光子非全同和光子损失的玻色采样模拟研究

黄汛, 倪明, 季阳*, 吴永政

中国电子科技集团公司第三十二研究所, 上海 201800

摘要 玻色采样可有效模拟量子效应下的采样问题, 为验证量子计算的指数级加速能力提供了新思路。现实中大规模光子的不可分辨性难以制备, 这极大地限制了玻色采样的计算复杂度优势。为了研究光子全同度及光子损失概率对玻色采样概率分布的影响, 基于 Reck 模型, 对 6 光子 10 模式的玻色采样过程进行了仿真。实验结果表明, 光子间的全同度越低、光子损失概率越大, 输出组合概率与理想情况的误差就越大, 且误差的变化速度越小; 当非全同光子的数目由 0 变为 1 时, 玻色采样输出组合概率的误差变化幅度最大; 随着非全同光子数目的增加, 玻色采样输出组合的精度逐渐降低, 但降低的速度减小。研究结果显示, 基于 Reck 模型的玻色采样对光子间的全同度、非全同光子的数量以及光学网络中的光子损失十分敏感。

关键词 量子光学; 玻色采样; 光子全同度; 光子损失

中图分类号 O431.2

文献标志码 A

doi: 10.3788/AOS202141.1227001

Simulation on Boson Sampling with Photon Partial Distinguishability and Photon Losses

Huang Xun, Ni Ming, Ji Yang*, Wu Yongzheng

The 32nd Research Institute, China Electronics Technology Group Corporation, Shanghai 201800, China

Abstract Boson sampling can effectively simulate the sampling problem based on quantum effects, which provides a new path to verify the exponential acceleration of quantum computation. In reality, it is difficult to prepare large-scale photons with indistinguishable properties, which greatly suppresses the computational complexity advantage of boson sampling. In order to study the influence of photon partial distinguishability and photon losses on the probabilities of boson sampling, the boson sampling process based on the Reck model with 6 photons and 10 modes is simulated. The experimental data indicate that with the decrease of the indistinguishability and the increase of photon loss probabilities, the error between the actual frequency of output combinations and the ideal one increases gradually, however the error variation speed decreases. When the partially distinguishable photon number is changed from 0 to 1, the error variation range for boson sampling output combinations is the largest. The accuracy for boson sampling output combinations gradually decreases with the further increase of partially distinguishable photon number, but the reduction speed decreases. Our results demonstrate that boson sampling based on the Reck model is sensitive to photon indistinguishability, partially distinguishable photon numbers and photon losses in optical networks.

Key words quantum optics; Boson sampling; photon indistinguishability; photon losses

OCIS codes 270.1670; 270.4180; 270.5290; 270.5570

收稿日期: 2020-12-11; 修回日期: 2021-01-06; 录用日期: 2021-01-22

基金项目: 量子信息技术上海市市级科技重大专项子项目(2019SHZDZX01-ZX03)、中国电子科技集团公司第三十二研究所内项目(GY200906-00)

* E-mail: yangjimtz@qq.com

1 引言

近年来,玻色采样机逐渐成为实现量子计算机最有吸引力的选项之一,由中国自主研发的光量子原型机“九章”实现了 76 光子 100 模式的高斯玻色采样,较好地展示了量子优势^[1-3]。玻色采样机的实现需要完全不可区分的光子^[4-5],这种光子可通过自发参量下转换^[6-7]、半导体量子点^[8]等方式进行制备。在实际应用中, n 个光子注入到具有 m 个模式的线性光学网络中,该网络在数学上对应一个满足哈尔随机测试的 m 维幺正矩阵,且光子在传输的过程中能够产生量子干涉。为了利用经典方法得到某一特定输出组合的概率,需要计算该 m 维矩阵的 n 维子矩阵积和式,它依赖于光学网络和光子的输入输出组合,对于经典计算机来说,求解该子矩阵积和式是一个 #P-困难问题^[4],其计算复杂度不弱于 NP-困难问题,具有指数级时间复杂度。然而,当输入光子均完全不同时,光子间的相干性完全消失,则各输出组合的概率与一个各项均为非负数的实矩阵有关,后者可以通过经典算法基于多项式时间得到估算结果^[9],此时玻色采样机明显失去了量子优势^[10]。

因此,为了实现高效的玻色采样机,需要高纯度、高亮度且高全同度的光子,但目前技术难以大规模制造出这些光子。近年来,半导体量子点微柱光源的研究取得了很大进展,制备了 20 个全同度测量值范围为 0.923~0.954 的光子,但误差仍然不可避免^[11]。另一方面,光子在制造、传播和探测过程中可能发生的损失也会导致采样结果产生误差^[12-13]。有报道指出,对于固定规模的玻色采样,无论是光子损失还是光子非全同,都存在一个决定“量子优势”的阈值^[12]。当与误差程度相关的参数超过该阈值时,可以通过经典算法在多项式时间内得到采样结果,此时玻色采样机同样失去了“量子优势”。值得注意的是,由于光子非全同和光子损失等不可抗拒因素的存在,误差分析对于评价玻色采样机的性能具有重要的意义。

为了研究光子全同度和光子损失概率对玻色采样误差的影响,本文基于 Reck 模型构建了光学网络^[14],并通过 Python 语言模拟了 6 光子 10 模式的玻色采样过程。在此基础上,测量了光子全同度、非全同光子数目以及光子损失概率对输出组合概率的影响,并与理想输出概率进行了相对误差分析。实验结果表明,基于 Reck 模型的玻色采样对光子间

的全同度、非全同光子数量以及光学网络中的光子损失十分敏感。

2 光子非全同模型

2.1 光学网络的构造

在我们的仿真实验中,基于 Reck 模型构造了图 1 所示的 10 模式的光学网络。如图 1(a)所示,我们将 6 个光子分别从标号为 1~6 的不同端口注入到光学网络中。虽然在理想情况下,所有注入光子的全同度为 1,但是在实际操作中,同样存在随机的光子与其他光子是非全同的情况。该光学网络模型包含 45 个交叉点,每个交叉点表示存在一个由分束器(BS)和相移器(PS)组成的原始光学基本单元,如图 1(b)所示,则单个光学基本单元对应的矩阵 \mathbf{M}_{unit} ^[7,15]可表示为

$$\mathbf{M}_{\text{unit}} = \mathbf{M}_{\text{BS}} \mathbf{M}_{\text{PS}}, \quad (1)$$

式中: \mathbf{M}_{BS} 是反射率为 R ($0 \leq R \leq 1$) 的分束器矩阵; \mathbf{M}_{PS} 是给光子增加一个大小为 φ 的相位移动角度的相移器矩阵。 \mathbf{M}_{BS} 和 \mathbf{M}_{PS} 两个矩阵的维度均为 10。假设构成该光学基本单元的两路输入(输出)端口的标号分别为 K_1 和 K_2 ($K_1, K_2 = 1, 2, 3, \dots, 10, K_1 < K_2$),则在分束器矩阵 \mathbf{M}_{BS} 中,第 K_1 (或 K_2) 行第 K_1 (或 K_2) 列的元素均为 $\sqrt{1-R}$,第 K_1 (或 K_2) 行第 K_2 (或 K_1) 列的元素均为 $-i\sqrt{R}$;在相移器矩阵 \mathbf{M}_{PS} 中,第 K_2 行第 K_2 列的元素为 $\exp(-i\varphi)$,且上述两个矩阵的其他元素均与 10 维单位矩阵相同。光学网络对应的幺正矩阵 \mathbf{U} 则是所有光学基本单元对应的一系列矩阵的乘积,其乘积顺序依赖于图 1 中单个光学基本单元的排列顺序。

2.2 玻色采样算法的理论分析

在玻色采样仿真过程中,我们需要将 6 个光子以输入组合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 形式注入到光学网络中。由于现实中的光子探测器通常难以识别某一个端口中的多个光子^[6-8,11,16],因此我们仅考虑每个输出端口中光子数目只有 0 或 1,并以此计算不同输出组合的概率分布。当所有注入的光子均完全相同时,理想情况下某一输出组合的概率^[4]为

$$P = |\text{Perm}(\mathbf{M})|^2 = \left| \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^n m_{i,\sigma_i} \right|^2, \quad (2)$$

式中: $\text{Perm}(\mathbf{M})$ 为矩阵 \mathbf{M} 的积和式; \mathbf{M} 为光学网络对应幺正矩阵 \mathbf{U} 的子矩阵,其与输入输出组合有关,从光学网络矩阵 \mathbf{U} 中分别减去输入组合和输出组合中没有列出来的列和行即可得到;光子数 $n = 6$; σ 为遍历输入组合的全排列; σ_i 为 σ 中第 i 个元

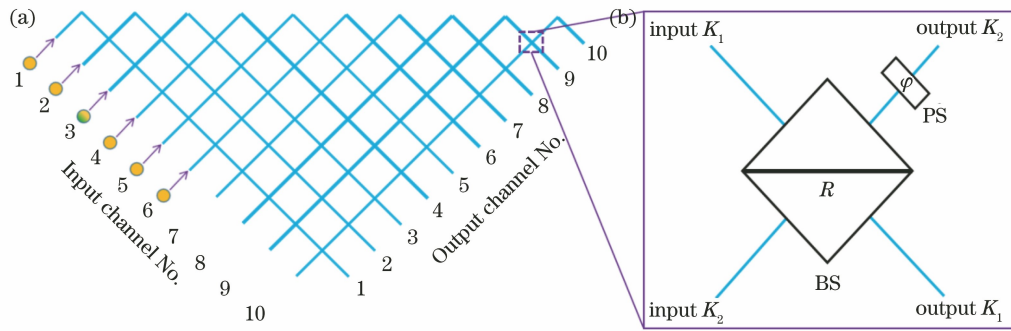


图 1 考虑光子非全同情况的玻色采样模拟示意图。(a) 6 光子 10 模式光子非全同光学网络；
(b) 由一个分束器和一个相移器组成的单个光学基本单元

Fig. 1 Schematic of boson sampling simulation considering photon partial distinguishability. (a) 6-photon and 10-mode optical network with photon partial distinguishability; (b) single optical unit containing a beam splitter and a phase shifter

素值； m_{i,σ_i} 为矩阵 \mathbf{M} 中的元素。但是，当注入的光子是非全同时，(2) 式不再适用，应采用 Tichy 公式进行替换^[5,17]：

$$P = \sum_{\sigma} \left(\prod_{i=1}^n s_{\sigma_i,i} \right) \text{Perm}(\mathbf{M} * \mathbf{M}_{1,\sigma}^*), \quad (3)$$

式中： $\mathbf{M}_{1,\sigma}$ 是通过保持 \mathbf{M} 所有的行不变， \mathbf{M} 所有列按照 σ 中元素的排列顺序重新排列并进行变换得到的； $\mathbf{M}_{1,\sigma}^*$ 是 $\mathbf{M}_{1,\sigma}$ 的复共轭形式； $s_{\sigma_i,i}$ 是 6×6 光子非全同矩阵 \mathbf{S} 中第 σ_i 行第 i 列的元素。 \mathbf{S} 中的元素 $s_{i,j}$ ^[17-18] 可以表示为

$$s_{i,j} = x_{i,j} + (1 - x_{i,j})\delta_{i,j}, \quad (4)$$

式中： $x_{i,j}$ 是注入到第 i 和第 j 个端口的两个光子间的全同因子。当 $x_{i,j}$ 的值为 0 (或 1) 时，则这两个光子完全不同 (或完全相同)；当 $0 < x_{i,j} < 1$ 时，则表示这两个光子部分相同，全同度为 0~100%。为了简化矩阵 \mathbf{S} ，我们假设注入的光子源最多有两种，如果两个光子是部分相同的，那么任何其他光子与这两个光子中的一个相比必须是完全相同的，即若 $0 < x_{i,j} < 1$ ，那么从第 k ($k \neq i, j$) 个端口注入的光子必须满足 $x_{k,i} = 1$ 或 $x_{k,j} = 1$ 。

2.3 非全同光子对采样结果的影响和误差分析

为了模拟一个更实用的模型以接近实际的实验结果，我们假设有 1~3 个非全同光子，这些光子随机分布在注入到光学网络的 6 个光子源中，且全同度从 0 变为 1，间隔为 0.1。对于每一种含有不同非全同光子数且全同度一致的情况，重复模拟采样 100 次并统计得到不同输出组合的分布概率趋势。如图 2 所示，我们模拟了 210 种输出组合，并以 63~1008 的十进制数 A 进行标记，对应的二进制数为 0000111111~1111110000，这意

味着我们在 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 到 $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 的输出组合下分别采集 6 个光子，其中 X_{id} 为光子间的全同度，实心点表示 6 个全同光子的理想实验结果，空心方块表示重复 100 次的平均结果，误差棒则代表实际值与理想值之间的误差范围。分析实验数据可知，与全同度为 0.9 时的采样结果 [图 2(b)] 相比，当存在一个随机光子与其他所有光子完全不同即全同度为 0 [图 2(a)] 时，210 种输出组合的概率的均值与理想概率之间的误差较大，且误差范围较广。实际上，在该模型中，全同光子更倾向于以“聚束”的形式输出，所以不同输出组合的概率大多高于理想值^[19]。

在本文中，我们采用总变差距离和相似度来进行实验误差分析，两者分别定义为 $\frac{1}{2} \sum |P - P_{\text{ideal}}|$ 和 $\sum \sqrt{PP_{\text{ideal}}}$ ，其中 P 是含有非全同光子时所有输出组合的实际模拟概率，而 P_{ideal} 是所有光子源全同时不同输出组合的理想概率^[8]。如图 3 (a)、(b) 所示，在理想实验条件下，总变差距离和相似度分别为 0 和 0.04335，且当非全同光子数和全同度这两个参数值接近理想值时，由非全同光子引起的误差相对较小，其中 PD 表示非全同。但是，若光子全同度从 1 略微减少，平均总变差距离和平均相似度都发生了急剧变化，并且变化速度随着全同度的降低而逐渐减小。另一方面，在光子全同度固定的情况下，当非全同光子的数目由 0 变为 1 时，其产生的误差最明显，但随着非全同光子数的进一步增加，这种变化速度也会变小。这表明在我们构建的光子非全同模型中，玻色采样结果在光子间的全同度和非全同光子数目这两个方面对光子非全同非常敏感。

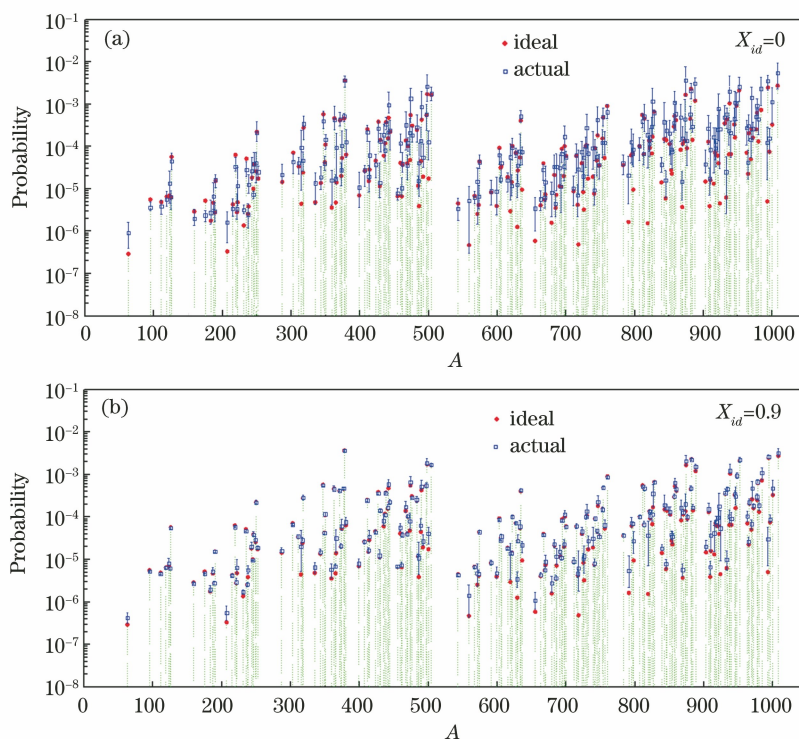


图 2 模拟 210 种输出组合的概率。(a) 1 个光子非全同且全同度为 0 时的实际输出组合概率与理想概率的对比；
(b) 1 个光子非全同且全同度为 0.9 时的实际输出组合概率与理想概率的对比

Fig. 2 Simulated probabilities of 210 output combinations. (a) Probability comparison between real and ideal output combinations with 1 distinguishable photon and zero indistinguishability; (b) probability comparison between real and ideal output combinations with 1 distinguishable photon and 0.9 indistinguishability

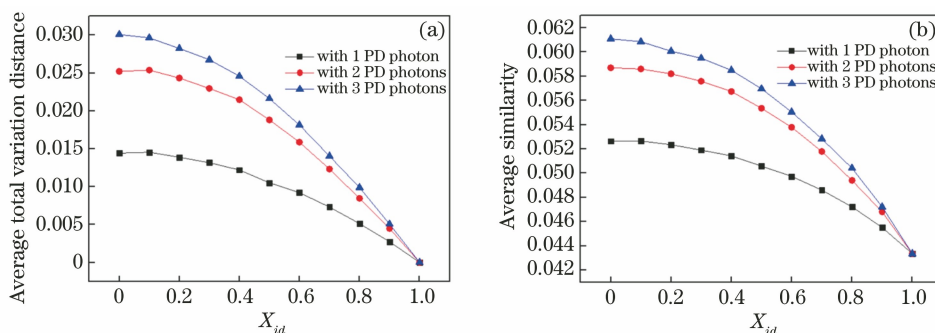


图 3 非全同光子随机分布在 6 个输入光子源中时 100 次重复实验结果的误差分析。(a) 平均总变差距离；(b) 平均相似度
Fig. 3 Error analysis for 100-time repeated experimental results with partially distinguishable photons randomly distributed among 6 input single photons. (a) Average total variation distance; (b) average similarity

3 光子损失模型

3.1 光学网络的构造

由于在 Reck 模型的每个光学基本单元的传播过程中,光子都有一定的损失概率,因此仿真中我们同样考虑了光学网络中的光子损失对玻色采样结果的影响。如图 4 所示,为了模拟光子损失过程,基于均匀分束器损失模型^[13],我们在每个初始光学基本单元中加入两个具有极低反射率 R_1 和 R_2 的等效

分束器,为了方便实验进行,假设 $R_1 = R_2 = r$ 。则在某个光学基本单元的标号为 K_1 或 K_2 端口中,光子损失概率 P_{loss} ^[20]可表示为

$$P_{\text{loss}} = 1 - (1 - r)^2. \quad (5)$$

在图 4(a)展示的光子损失网络模型中,我们增加了 90 个等效分束器,并且在 10 个初始端口的基础上增加了 90 个额外的输入(或输出)端口,以对应 45 个初始光学基本单元(每个单元 2 个端口)。对于第 t ($t=1, 2, 3, \dots, 45$)个初始光学基本单元,如

图 4(b)所示,光子以极低的反射率穿过两个输入端口标号分别为 $(m + 2t - 1)$ 和 $(m + 2t)$ 的等效分束器以模拟光子损失情况,其中 $m = 10$ 为初始端口数

量。因此,我们将最初的 10×10 光学网络矩阵修改为 100×100 矩阵。

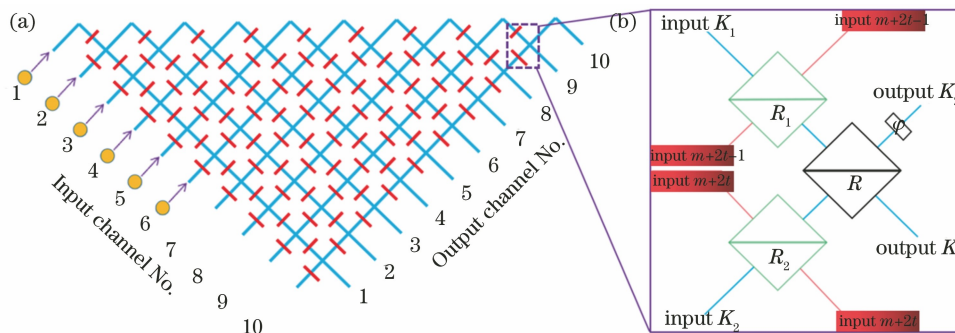


图 4 考虑光子损失情况的玻色采样模拟示意图。(a) 6 光子 10 模式光子损失光学网络；(b) 由三个分束器(含两个等效分束器)和一个相移器组成的单个光学基本单元

Fig. 4 Schematic of boson sampling simulation considering photon losses. (a) 6-photon and 10-mode optical network with photon losses; (b) single optical unit containing three beam splitters (including two imaginary beam splitters) and a phase shifter

改进后的矩阵可以通过以下三个步骤进行构造。

与上述初始单元矩阵相同的顺序相乘,得到最终的光学网络矩阵。

1) 首先,我们在图 4 中按照从左到右和从上到下的顺序由 1 到 45 对初始光学基本单元进行编号。对于第 $t(t = 1, 2, 3, \dots, 45)$ 个初始光学基本单元,加入两个等效分束器,并将两个新端口编号为 $(m + 2t - 1)$ 和 $(m + 2t)$,其中 $m = 10$ 为初始端口数。这样 $(10 + 90)$ 个输入(或输出)端口全部被编号。

3.2 光子损失对采样结果的影响和误差分析

带有光子损失的 $(10 + 90)$ 模式光学网络模型的仿真采样结果如图 5 所示,其中 6 个全同光子以输入组合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 注入光学网络。当光子损失概率 P_{loss} 为 0 时,玻色采样结果与通过初始 6 光子 10 模式模拟得到的理想结果一致。然而,随着光子损失概率的增加,输出组合的概率变低,一部分原因是光子损失使得更多的输出组合被引入,初始输出组合中光子聚束的概率降低。图 6 为考虑光子损失情况的结果误差分析。由图 6 可知,总变差距离和平均相似度随着光子损失概率的增加先急剧变化后缓慢变化,说明在这种情况下,玻色采样对光子损失同样十分敏感。

2) 其次,我们将初始光学基本单元和图 4(b)所示的 2 个附加的等效分束器的组合定义为新的光学基本单元,并且每一个分束器对应的矩阵均可以用(1)式的形式进行表示,只是矩阵阶数由 10 变为 100。新的光学基本单元矩阵是 3 个分束器矩阵的乘积。

3) 最后,将 45 个新的光学基本单元矩阵按照

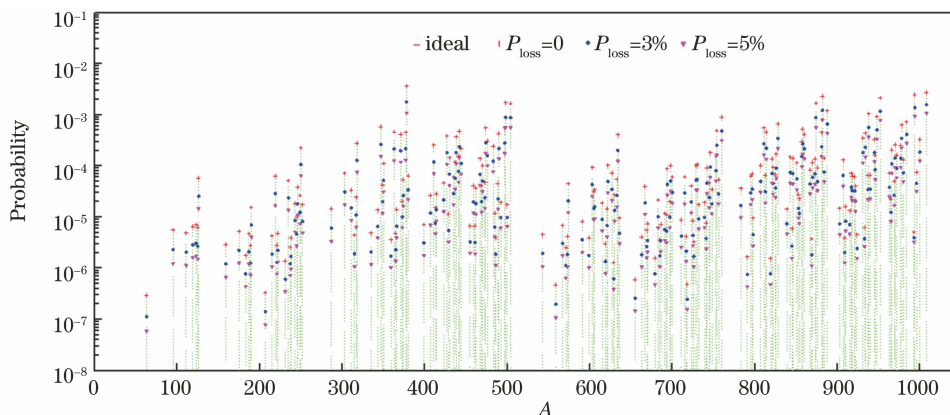


图 5 不同条件下 210 种输出组合的概率

Fig. 5 Simulated probabilities of 210 output combinations under different conditions

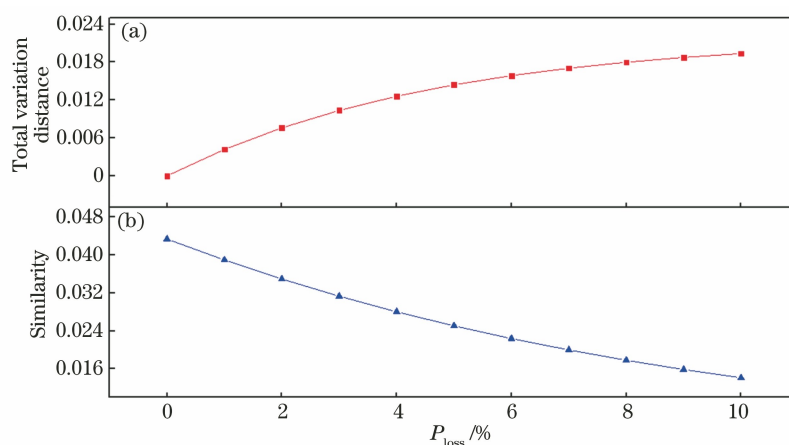


图 6 考虑光子损失情况的结果误差分析。(a)总变差距离;(b)相似度

Fig. 6 Error analysis of results considering photon losses. (a) Total variation distance; (b) similarity

4 结 论

玻色采样机是目前最有可能实现“量子优势”的量子计算机,而光子全同性直接决定了玻色采样机的计算时间复杂度优势,此外,在采样的过程中,光子在光源、光学网络和探测器中均有可能发生丢失的情况。基于 Reck 模型构建了一个 6 光子 10 模式线性光学网络模型,利用 Python 语言对玻色采样进行了经典仿真,并分别研究了光子全同度(包括非全同光子数目)和光子损失对玻色采样结果精度的影响。结果表明,基于 Reck 模型,光子全同度越低且非全同光子数越多,输出组合概率与理想输出概率的偏差越大。例如,当非全同光子数为 1 且全同度由 0.5 逐渐减小为 0 时,输出组合概率与理想概率之间的总变差距离和平均相似度分别由 0.01051 和 0.5058 增加为 0.0144 和 0.5264(理想情况分别为 0 和 0.04335),且偏离速度逐渐减小;若光子间的全同度固定,非全同光子数由 0 变为 1,此时对玻色采样概率的误差影响幅度最大,例如,当全同度为 0.5,非全同光子数分别由 0 变为 1、1 变为 2 和 2 变为 3 时,输出组合概率和理想概率之间的总变差距离的偏离幅度分别为 0.1051、0.0083 和 0.0028,且幅度变化速度逐渐减小。

当计入光子损失时,随着光子损失概率由 0 增大到 10%,输出组合的分布概率与理想值之间的误差不断增加,总变差距离由理想值 0 提高为 0.01413,但增加的速度不断减小。玻色采样对光子间的全同度、非全同光子数量以及光学网络中的光子损失均十分敏感,这为玻色采样鲁棒性研究提供了一种思路,具有较强的现实意义。

参 考 文 献

- [1] Zhong H S, Wang H, Deng Y H, et al. Quantum computational advantage using photons [EB/OL]. (2020-12-03) [2020-12-09]. <https://arxiv.org/abs/2012.01625>.
- [2] Ladd T D, Jelezko F, Laflamme R, et al. Quantum computers[J]. Nature, 2010, 464(7285): 45-53.
- [3] Franson J D. Physics beating classical computing without a quantum computer[J]. Science, 2013, 339(6121): 767-768.
- [4] Aaronson S, Arkhipov A. The computational complexity of linear optics[C]//Proceedings of the 43rd annual ACM symposium on Theory of computing-STOC'11, June 6-8, 2011, San Jose, California, USA. New York: ACM Press, 2011: 333-342.
- [5] Tichy M C. Sampling of partially distinguishable bosons and the relation to the multidimensional permanent[J]. Physical Review A, 2015, 91(2): 022316.
- [6] Spring J B, Metcalf B J, Humphreys P C, et al. Boson sampling on a photonic chip [J]. Science, 2013, 339(6121): 798-801.
- [7] Tillmann M, Dakić B, Heilmann R, et al. Experimental boson sampling[J]. Nature Photonics, 2013, 7(7): 540-544.
- [8] Wang H, He Y, Li Y H, et al. High-efficiency multiphoton boson sampling [J]. Nature Photonics, 2017, 11(6): 361-365.
- [9] Jerrum M, Sinclair A, Vigoda E, et al. A polynomial-time approximation algorithm for the permanent of a matrix with nonnegative entries [J]. Journal of the ACM, 2004, 51(4): 671-697.
- [10] Rohde P P. Boson sampling with photons of arbitrary spectral structure [J]. Physical Review A, 2015, 91

- (1): 012307.
- [11] Wang H, Qin J, Ding X, et al. Boson sampling with 20 input photons and a 60-mode interferometer in a 1014-dimensional Hilbert space[J]. *Physical Review Letters*, 2019, 123(25): 250503.
- [12] Aaronson S, Brod D J. Boson sampling with lost photons[J]. *Physical Review A*, 2016, 93(1): 012335.
- [13] Oszmaniec M, Brod D J. Classical simulation of photonic linear optics with lost particles[J]. *New Journal of Physics*, 2018, 20(9): 092002.
- [14] Reck M, Zeilinger A, Bernstein H J, et al. Experimental realization of any discrete unitary operator[J]. *Physical Review Letters*, 1994, 73(1): 58-61.
- [15] Zeilinger A. General properties of lossless beam splitters in interferometry[J]. *American Journal of Physics*, 1981, 49(9): 882-883.
- [16] Zhong H S, Li Y, Li W, et al. 12-photon entanglement and scalable scattershot boson sampling with optimal entangled-photon pairs from parametric down-conversion[J]. *Physical Review Letters*, 2018, 121(25): 250505.
- [17] Renema J J, Menssen A, Clements W R, et al. Efficient classical algorithm for boson sampling with partially distinguishable photons[J]. *Physical Review Letters*, 2018, 120(22): 220502.
- [18] Wang H, Li W, Jiang X, et al. Toward scalable boson sampling with photon loss[J]. *Physical Review Letters*, 2018, 120(23): 230502.
- [19] Hong C K, Ou Z Y, Mandel L, et al. Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference[J]. *Physical Review Letters*, 1987, 59(18): 2044-2046.
- [20] Neville A, Sparrow C, Clifford R, et al. Classical boson sampling algorithms with superior performance to near-term experiments[J]. *Nature Physics*, 2017, 13(12): 1153-1157.