

基于二维泰勒理论的非迭代离散梯度积分方法

官玄睿, 孙壮, 吕耀文*, 徐熙平**

长春理工大学光电工程学院光电测量与光信息传输技术教育部重点实验室, 吉林 长春 130033

摘要 提出基于二维泰勒展开的积分重建方法, 采用前二阶项近似表示两点间的高度差, 结合一阶项与二阶项间的近似关系, 推导出新的差分算子, 并应用于区域法中。同时, 提出一种计算非矩阵高度数据的非迭代计算方法。数值实验结果表明: 当采样点按照桶形和枕形等非矩形分布时, 本文方法的重建精度为 $0.1\sim 0.2\ \mu\text{m}$, 优于其他方法的 $0.5\sim 0.7\ \mu\text{m}$; 对于采样点数量为 29236 的非矩阵数据的重建, 本文方法的计算时间为 $0.1\ \text{s}$ 左右, 明显小于迭代方法的计算时间, 并且, 随着采样点数量的增加, 其速度方面的优势更加突出。

关键词 光计算; 波前和面型重建; 离散梯度积分; 二维泰勒展开; 非迭代

中图分类号 O438

文献标志码 A

doi: 10.3788/AOS202141.1220001

Non-iterative Discrete Gradient Integration Method Based on Two-Dimensional Taylor Theory

Gong Xuanrui, Sun Zhuang, Lü Yaowen*, Xu Xiping**

Key Laboratory of Opto-Electronic Measurement and Optical Information Transmission Technology of Ministry of Education, School of Opto-Electronic Engineering, Changchun University of Science and Technology, Changchun, Jilin 130033, China

Abstract We proposed an integration method based on two-dimensional Taylor expansion, in which the terms in the first two orders were used to approximate the height difference between two points. Combining the approximation relation between the first-order term and the second-order one, we derived a new difference operator, which was applied to the zone method. In addition, we proposed a non-iterative method to calculate non-matrix height. Numerical results show that when the sampling points are distributed in the barrel and pillow shapes, the reconstruction accuracy of the proposed method is $0.1\sim 0.2\ \mu\text{m}$, which is better than that of other methods ($0.5\sim 0.7\ \mu\text{m}$). For the reconstruction of non-matrix data with 29236 sampling points, the calculation time of our method is about $0.1\ \text{s}$, significantly shorter than that of the iterative methods, and it is much shorter as the number of sampling points increases.

Key words optics in computing; wavefront and surface reconstruction; discrete gradient integration; two-dimensional Taylor expansion; non-iteration

OCIS codes 010.7350; 120.6650; 000.4430

1 引言

在波前重建和面型检测方法中, 直接的测量值往往不是最终的目标结果, 它需要根据梯度或差分的分布情况进行计算。积分离散梯度是一种重要方

法, 普遍应用在夏克-哈特曼波前检测 (Shack-Hartmann wavefront sensing)^[1-4]、横向剪切干涉测量 (lateral shearing interferometry)^[5-6]、阴影恢复形状法 (shape from shading)^[7-8]、偏振重建法 (shape from polarization)^[9-10]、相位测量偏折术

收稿日期: 2020-12-01; 修回日期: 2020-12-22; 录用日期: 2021-01-22

基金项目: 国家自然科学基金(61803045)

* E-mail: lvyaowen2005@163.com; ** E-mail: xxp@cust.edu.cn

(phase measuring deflectometry)^[11-14]等。离散梯度积分方法的性能影响着重建结果的精度和计算时间,因此,高计算精度和快计算速度是研究人员的研究目标。

目前提出的梯度积分方法主要可以分为两类:模式法和区域法。模式法将被测表面表示为一组正交基函数的线性组合,通过计算各展开项的系数确定重建的表面。常用的基函数包括复指数正交基函数^[15]、泽尼克正交基函数^[16]、径向基函数^[17]等。使用复指数正交基函数时,高度展开过程与离散傅里叶变换过程一致,借助快速傅里叶变换算法可以显著提高重建效率,适用于数据量较大的计算。区域法是根据目标区域内两点之间差分与梯度之间的关系计算高度,该过程相当于求解规模较大的超定线性方程组,该方法结合稀疏矩阵的运算后,其计算速度明显提升。一般情况下,模式法和区域法通过差分算子建立梯度与高度差之间的关系,因此,差分算子的截断误差将直接影响重建结果的精度。早期使用的差分算子包括 Fried 算子^[18]、Hudgin 算子^[19]和 Southwell 算子^[20],其中 Southwell 算子计算的高度位置与测量的梯度位置相同,且具有相邻的高度关系约束,更加适合于波前和面型重建。为了改善 Southwell 算子的截断误差:Huang 等^[21]采用迭代补偿的方式提高重建精度;Li 等^[22]在一维泰勒理论的基础上,通过增加算子中的梯度点数量来降低截断误差。采样点的排列情况也会对差分算子的截断误差产生影响,非矩形的排列形式使得相邻点间的差分同时受两个方向梯度的影响。为降低重建误差:Ren 等^[23]在法向量垂直于两端点确定的矢量的假设下,提出利用最小二乘积分法与径向基函数积分方法相结合的方法重建表面;Huang 等^[24]同时考虑 x 、 y 方向上的梯度组合与相邻高度差之间的关系,提出一种更加一般化的差分算子。梯度积分方法还会面临非矩阵梯度数据的问题,常见的方法是将 Gerchberg 迭代路线引入到积分方法中,通过填充和迭代来计算目标高度数据,但这种方法会增加

计算时间,降低重建效率^[25-27]。

由以上文献分析可知,采样点的非标准矩形分布会降低梯度积分方法的重建精度,而梯度数据的非矩阵形式则会影响梯度积分方法的计算时间。为减小这两方面的负面影响,实现小误差、高速度的重建,本文提出一种基于二维泰勒展开理论的非迭代区域法,利用前二阶偏导项近似表示两相邻点的高度差,根据一阶项与二阶项之间的近似关系,推导出一种新的差分算子,当采样点按照非标准矩形排列时,该算子同样能够计算出截断误差较小时的差分数据。此外,本文采用一种非迭代的计算方式处理非矩阵数据,采用非数(NaN)将梯度数据填充为矩阵形式,并标记无效点的位置,根据索引向量和差分向量与系数矩阵中各元素的对应关系,修改得到非矩阵数据对应的系数矩阵,并通过最小二乘法直接计算目标的高度值。所提方法无需迭代,极大地提高了重建效率。

2 理论模型

2.1 区域法的计算模型

区域法采用目标点附近区域内梯度值的线性组合来表示高度差值,通过求解线性方程组确定各高度点之间的相对位置。高度值与梯度之间的关系可表示为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_r \\ \mathbf{E}_c \end{bmatrix} \mathbf{Z}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_r \\ \mathbf{S}_c \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中: \mathbf{Z}_c 为包含所有待测高度值的列向量; \mathbf{E}_r 和 \mathbf{E}_c 均为差分算子对应高度点组合的系数矩阵; \mathbf{S}_r 和 \mathbf{S}_c 分别为根据梯度点估计的行方向和列方向的差分向量。以 $M \times N$ 的矩形高度数据为例,相应 \mathbf{Z}_c 中元素排列形式为

$$\mathbf{Z}_c = [Z_{1,1}, Z_{1,2}, \dots, Z_{1,N}, Z_{2,1}, \dots, Z_{M,N}]^T, \quad (2)$$

式中: Z 为高度矩阵中的高度值。

系数矩阵 \mathbf{E}_r 和 \mathbf{E}_c 可直接由行数 M 和列数 N 来确定,当差分算子计算的是相邻两点的差分时,其元素分布如(3)式和(4)式所示。

$$\|\mathbf{E}_r(m, n)\| = \begin{cases} -1, & (m, n) \in \{(m_1, n_1) \mid n_1 = \text{floor}[(m_1 - 1)/(N - 1)]N + \text{rem}(m_1 - 1, N - 1) + 1, m_1 \in M_1\} \\ 1, & (m, n) \in \{(m_1, n_1) \mid n_1 = \text{floor}[(m_1 - 1)/(N - 1)]N + \text{rem}(m_1 - 1, N - 1) + 2, m_1 \in M_1\} \\ 0, & \text{else} \end{cases}, \quad (3)$$

$$\|\mathbf{E}_c(m, n)\| = \begin{cases} -1, & (m, n) \in \{(m_2, n_2) \mid n_2 = \text{floor}[(m_2 - 1)/N]N + \text{rem}(m_2 - 1, N) + 1, m_2 \in M_2\} \\ 1, & (m, n) \in \{(m_2, n_2) \mid n_2 = \text{floor}[(m_2 - 1)/N + 1]N + \text{rem}(m_2 - 1, N) + 1, m_2 \in M_2\} \\ 0, & \text{else} \end{cases}, \quad (4)$$

式中: $M_1 = \{1, 2, \dots, M(N-1)\}$, $M_2 = \{1, 2, \dots, (M-1)N\}$; $\text{floor}(a)$ 表示取小于或等于 a 元素的最接近整数值; $\text{rem}(a_1, a_2)$ 表示 a_1 和 a_2 经除法后的余数。

(1)式实际上是一个超定的线性方程组,需要通过(5)式所示的最小二乘法计算最优的高度值。由于系数矩阵主要由大量 0 元素组成,可以通过稀疏矩阵的运算来减少计算时间。

$$\mathbf{Z}_c = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{E}_r \\ \mathbf{E}_c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{E}_r \\ \mathbf{E}_c \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_r \\ \mathbf{E}_c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{S}_r \\ \mathbf{S}_c \end{bmatrix} \quad (5)$$

2.2 适用于采样点非标准矩形排列的差分算子

被测表面可以表示为二元函数 $Z(x, y)$ 的形式,假设 $Z(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的邻域内是连续的,并且存在连续的 $(n+1)$ 阶偏导数,根据二维泰勒理论,当 (x_1, y_1) 位于该邻域内时, $Z(x_1, y_1)$ 可以展开为

$$\begin{aligned} Z(x_1, y_1) &= P_n(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y) + R_n(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y), \\ P_n(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y) &= Z(x_0, y_0) + \end{aligned} \quad (6)$$

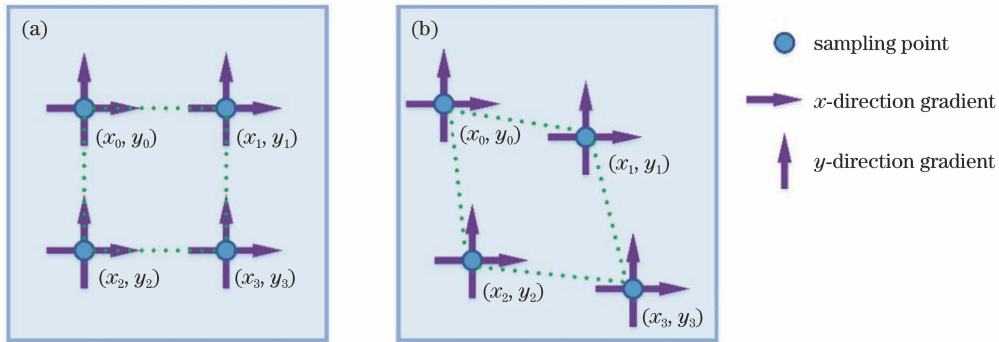


图 1 采样点分布示意图。(a) 标准矩形分布;(b)非标准矩形分布

Fig. 1 Schematic of sampling point distribution. (a) Standard rectangular distribution; (b) non-standard rectangular distribution

在标准矩形分布中,采样点之间的距离相等,各行各列呈对齐式分布,这使得同一行两采样点之间的纵坐标满足 $\Delta y = 0$,同一列两采样点之间的横坐标满足 $\Delta x = 0$,两相邻点之间差分只与单一方向的梯度有关,因此,使用传统的 Southwell 算子时截断误差较小。但是,当采样点按照非标准矩形分布时,以上性质不再成立,两相邻点的差分会同时受到 x 方向和 y 方向梯度的影响,传统 Southwell 算子的截断误差会增大。

本研究采用前二阶偏导项的线性组合表示相邻点的差分,可表示为

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^i Z(x_0, y_0), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} R_n(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y) &= \\ \frac{1}{(n+1)!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} &\times \\ Z(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y), & \quad (8) \end{aligned}$$

式中: $\Delta x = x_1 - x_0$; $\Delta y = y_1 - y_0$; θ 为开区间 $(0, 1)$ 内的一个常数。因此,两点之间的差分可以近似地表示为

$$\begin{aligned} Z(x_1, y_1) - Z(x_0, y_0) &= \\ \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^i &Z(x_0, y_0). \quad (9) \end{aligned}$$

在(9)式中,只有一阶偏导项可以通过测量获得,高阶偏导项未知,直接采用一阶项表示差分会导致较大的截断误差。传统的 Southwell 差分算子在一维泰勒展开理论中具有较小的截断误差,适用于采样点按照标准矩形分布的情况,但是,当采样点按照非矩形分布时,差分算子的截断误差会增大,影响最终表面的重建精度。采样点的标准矩形分布与非矩形分布如图 1 所示。

$$Z(x_1, y_1) - Z(x_0, y_0) =$$

$$\sum_{n=1}^2 \frac{1}{n!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n Z(x_0, y_0). \quad (10)$$

由于二阶偏导项无法通过测量获得,本研究建立高阶偏导项与低阶偏导项的近似关系,通过一阶项近似表示二阶项。对一阶偏导数 $\partial Z(x_1, y_1) / \partial x$ 和 $\partial Z(x_1, y_1) / \partial y$ 进行泰勒展开,可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z(x_1, y_1)}{\partial x} &= \frac{\partial Z(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial^2 Z(x_0, y_0)}{\partial x^2} \Delta x + \\ \frac{\partial^2 Z(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \Delta y &+ \dots, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Z(x_1, y_1)}{\partial y} = \frac{\partial Z(x_0, y_0)}{\partial y} + \frac{\partial^2 Z(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 Z(x_0, y_0)}{\partial y^2} \Delta y + \dots \quad (12)$$

因此, (10) 式中的二阶偏导项可以近似表示为

$$\frac{\partial^2 Z(x_0, y_0)}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial^2 Z(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y = \left[\frac{\partial Z(x_1, y_1)}{\partial x} - \frac{\partial Z(x_0, y_0)}{\partial x} \right] \Delta x, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 Z(x_0, y_0)}{\partial y^2} \Delta y^2 + \frac{\partial^2 Z(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} \Delta x \Delta y = \left[\frac{\partial Z(x_1, y_1)}{\partial y} - \frac{\partial Z(x_0, y_0)}{\partial y} \right] \Delta y. \quad (14)$$

将(13)式和(14)式代入(10)式,可以得到最终的差分算子:

$$Z(x_1, y_1) - Z(x_0, y_0) = \frac{\Delta x}{2} \left[\frac{\partial Z(x_1, y_1)}{\partial x} + \frac{\partial Z(x_0, y_0)}{\partial x} \right] + \frac{\Delta y}{2} \left[\frac{\partial Z(x_1, y_1)}{\partial y} + \frac{\partial Z(x_0, y_0)}{\partial y} \right]. \quad (15)$$

该差分算子对应的差分向量 \mathbf{S}_r 和 \mathbf{S}_c 可表示为

$$\begin{cases} S_{m,n}^r = 0.5(X_{m,n+1} - X_{m,n})(Z_{m,n+1}^x + Z_{m,n}^x) + 0.5(Y_{m,n+1} - Y_{m,n})(Z_{m,n+1}^y + Z_{m,n}^y) \\ \mathbf{S}_r = [S_{1,1}^r, \dots, S_{1,N-1}^r, S_{2,1}^r, \dots, S_{M,N-1}^r]^T \end{cases}, \quad (16)$$

$$\begin{cases} S_{m,n}^c = 0.5(X_{m+1,n} - X_{m,n})(Z_{m+1,n}^x + Z_{m,n}^x) + 0.5(Y_{m+1,n} - Y_{m,n})(Z_{m+1,n}^y + Z_{m,n}^y) \\ \mathbf{S}_c = [S_{1,1}^c, \dots, S_{1,N-1}^c, S_{2,1}^c, \dots, S_{M,N-1}^c]^T \end{cases}, \quad (17)$$

式中: Z^x 和 Z^y 分别为 x 方向和 y 方向上的梯度值。

2.3 非矩阵高度数据的非迭代计算

在表面重建过程中,一般要求梯度数据和待测高度数据满足矩阵形式,通过矩阵的行列数量可以直接确定系数矩阵 \mathbf{E}_x 和 \mathbf{E}_y 。当数据为非矩阵形式时,其形状不规则,系数矩阵没有统一的变化规律,不再满足(3)式和(4)式,不能直接获得。

本研究采用非迭代的计算方式,提出非矩阵数据对应系数矩阵的获取方法,直接采用最小二乘法计算高度。采用非数 NaN 将目标数据填充为矩阵形式,如图 2 所示,NaN 经过任何运算后其结果仍为 NaN。使用 NaN 有两个优点:一是可以通过矩阵运算获取差分值;二是 NaN 可以标记无效点的位置。填充之后,可以直接确定此时的系数矩阵 \mathbf{E}_r 和 \mathbf{E}_c 。由(1)式可知, \mathbf{E}_r 和 \mathbf{E}_c 的列与 \mathbf{Z}_c 中的元素

相对应,因此,根据 \mathbf{Z}_c 中 NaN 的位置,创建索引向量 \mathbf{I} , $Z_c(n)$ 为目标点时, $I(n) = 1$; $Z_c(n)$ 为 NaN 时, $I(n)$ 也为 NaN, 此时应移除 \mathbf{E}_r 和 \mathbf{E}_c 中对应的列。

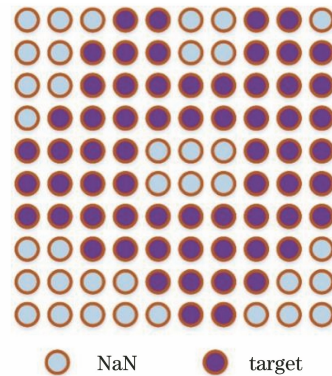


图 2 非矩阵数据的填充示意图

Fig. 2 Schematic of filling non-matrix data

在移除系数矩阵中的无效列之后,接下来考虑删除系数矩阵中的无效行。在计算差分向量 \mathbf{S}_r 和 \mathbf{S}_c 时,向量中包含 NaN 元素,NaN 元素的行对应填充矩阵中无效点的运算,因此,可将该行从系数矩阵中删除。

经过修改后的系数矩阵即为目标数据对应的系数矩阵,可通过最小二乘法直接计算目标高度值。非迭代的具体过程如下:

步骤 1 使用非数 NaN 将梯度数据 (Z^x 和 Z^y) 和坐标数据 (\mathbf{X} 和 \mathbf{Y}) 填充为 $M \times N$ 的矩阵形式。

步骤 2 根据(3)式和(4)式确定系数矩阵 \mathbf{E}_r 和 \mathbf{E}_c 。

步骤 3 移除系数矩阵中的无效列,即当 $I_c(n)$ 为 NaN 时,删除 \mathbf{E}_r 和 \mathbf{E}_c 中第 n 列。

步骤 4 移除系数矩阵中的无效行,即当 $S_r(m)$ 为 NaN 时,移除 \mathbf{E}_r 中的第 m 行;当 $S_c(m)$ 为 NaN 时,移除 \mathbf{E}_c 中的第 m 行。

步骤 5 将修改过的系数矩阵应用到(5)式中,通过最小二乘法求解目标高度值。

3 仿真与实验

3.1 仿真分析

在仿真部分,首先,探究本文方法、Southwell 方法以及 LSI-T 模型^[23]方法在不同采样点分布(标准矩形、桶形和枕形分布)下的重建精度。其次,探究本文方法、迭代区域法^[25]和迭代模式法^[27]在计算非矩阵高度数据时的时间消耗情况。数值模拟选用(18)式表示的表面。

$$z(x, y) = 3(1-x)^2 \exp[-x^2 - (y+1)^2] + 10\left(\frac{1}{5}x + x^2 + y^2\right) \exp[-x^2 - y^2] - \frac{1}{3} \exp[-(1+x)^2 - y^2]. \quad (18)$$

对(18)式求一阶偏导,将各采样点处的一阶偏导数作为算法的输入数据。图 3 所示为三种采样点分布对应的原始表面,图 3(a)所示为标准矩形分布,各

采样点等间距均匀排列, x 方向和 y 方向坐标都在 -2 mm 到 2 mm 范围内,并且满足 $x(i_1, j) - x(i_2, j) = 0$ 和 $y(i, j_1) - y(i, j_2) = 0$,采样点的数量为 256×256 ,采样点间隔为 0.016 mm 。图 3(b)、(c)所示分别为桶形和枕形分布,由标准矩形分布转换而来,采样点坐标可通过(19)式和(20)式求得。

$$\begin{cases} x_b(i, j) = x(i, j) - 0.009x(i, j)\{[x(i, j)]^2 + [y(i, j)]^2\} \\ y_b(i, j) = y(i, j) - 0.009y(i, j)\{[x(i, j)]^2 + [y(i, j)]^2\} \end{cases}, \quad (19)$$

$$\begin{cases} x_p(i, j) = x(i, j) + 0.05x(i, j)\{[x(i, j)]^2 + [y(i, j)]^2\} \\ y_p(i, j) = y(i, j) + 0.05y(i, j)\{[x(i, j)]^2 + [y(i, j)]^2\} \end{cases}, \quad (20)$$

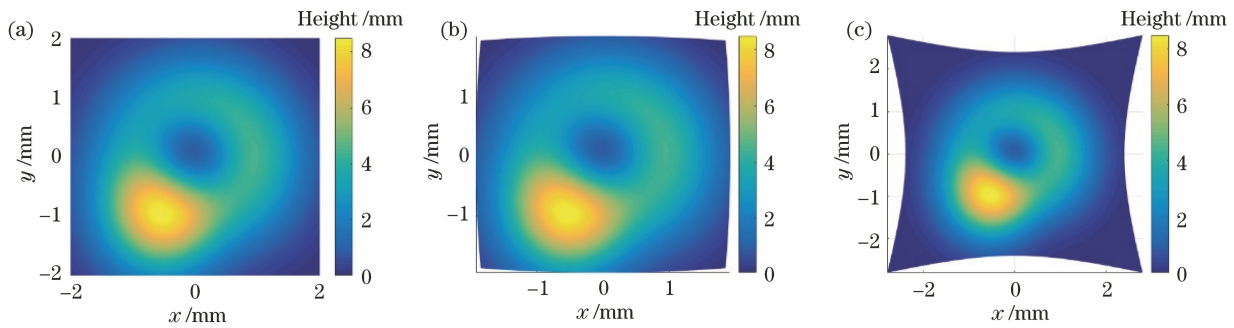


图 3 三种采样点分布对应的表面高度图。(a)标准矩形分布;(b)桶形分布;(c)枕形分布

Fig. 3 Height map corresponding to three distributions of sampling points. (a) Standard rectangular distribution; (b) barrel distribution; (c) pillow distribution

式中: (x, y) 是标准矩形分布对应的采样点坐标; (x_b, y_b) 和 (x_p, y_p) 分别是桶形和枕形分布对应的采样点坐标。

三种分布对应表面的高度变化范围约为 8 mm (表面最高点与最低点的高度差),下面将应用本文方法、Southwell 模型和 LSI-T 模型对该表面进行重建,相应的高度关系式如表 1 所示。

图 4 所示为采用本文方法得到的重建结果,可

以看到其面型与原始表面一致。在重建误差方面,采用均方根误差(R_{RMS})和峰谷值(A_{PV})作为整体评价重建精度的指标。图 5 所示为采样点按照标准矩形分布时的误差,其中,本文方法的精度与传统 Southwell 方法相同,其 R_{RMS} 均为 $0.17 \mu\text{m}$, A_{PV} 值均为 $1.29 \mu\text{m}$ 。两者误差相同的原因是在标准矩形分布时,同行采样点的 y 坐标之差为 0,同列采样点的 x 坐标之差为 0,本文方法计算的差分值实际上

表 1 各模型对应的高度关系

Table 1 Height relationship corresponding to each model

Method	Height relationship
Proposed method	$Z_{m,n+1} - Z_{m,n} = 0.5(X_{m,n+1} - X_{m,n})(Z_{m,n+1}^x + Z_{m,n}^x) + 0.5(Y_{m,n+1} - Y_{m,n})(Z_{m,n+1}^y + Z_{m,n}^y)$
	$Z_{m+1,n} - Z_{m,n} = 0.5(X_{m+1,n} - X_{m,n})(Z_{m+1,n}^x + Z_{m,n}^x) + 0.5(Y_{m+1,n} - Y_{m,n})(Z_{m+1,n}^y + Z_{m,n}^y)$
Southwell method	$Z_{m,n+1} - Z_{m,n} = 0.5(X_{m,n+1} - X_{m,n})(Z_{m,n+1}^x + Z_{m,n}^x)$
	$Z_{m+1,n} - Z_{m,n} = 0.5(Y_{m+1,n} - Y_{m,n})(Z_{m+1,n}^y + Z_{m,n}^y)$
LSI-T method	$Z_{m,n+2} - Z_{m,n} = Z_{m,n+1}^x (X_{m,n+2} - X_{m,n}) + Z_{m,n+1}^y (Y_{m,n+2} - Y_{m,n})$
	$Z_{m+2,n} - Z_{m,n} = Z_{m+1,n}^x (X_{m+2,n} - X_{m,n}) + Z_{m+1,n}^y (Y_{m+2,n} - Y_{m,n})$
	$Z_{m,n+1} - Z_{m,n} = Z'_{m,n+1} - Z'_{m,n}$
	$Z_{m+1,n} - Z_{m,n} = Z'_{m+1,n} - Z'_{m,n}$

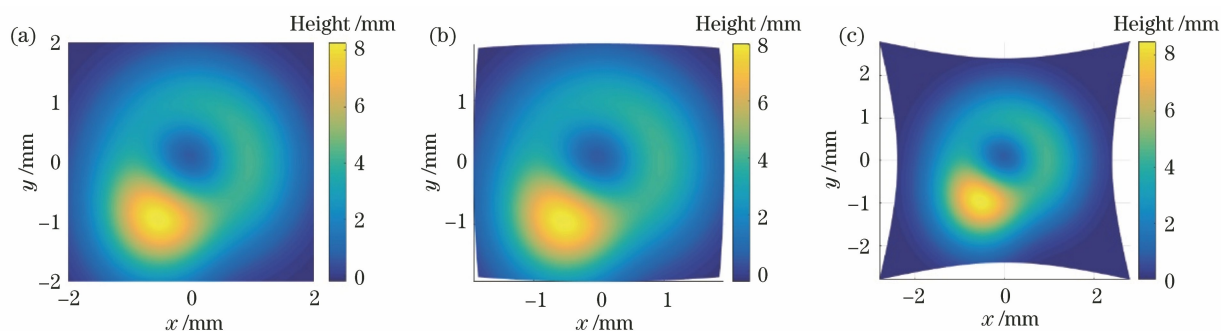


图 4 使用本文方法重建的表面图。(a)标准矩形分布;(b)桶形分布;(c)枕形分布

Fig. 4 Surfaces reconstructed by proposed method. (a) Standard rectangular distribution; (b) barrel distribution; (c) pillow distribution

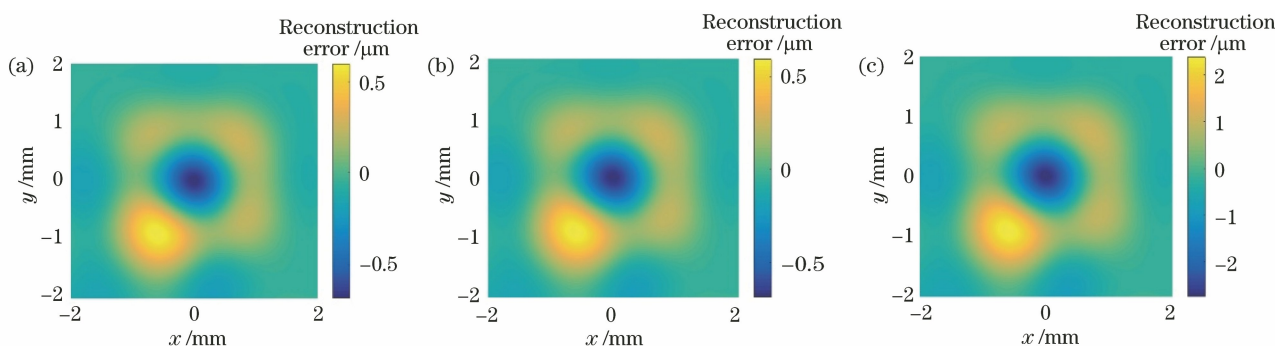


图 5 标准矩形分布对应的重建误差。(a)本文方法;(b)Southwell方法;(c)LSI-T方法

Fig. 5 Reconstruction error corresponding to standard rectangular distribution. (a) Proposed method; (b) Southwell method; (c) LSI-T method

只与单一方向的梯度有关,这使得其差分算子与 Southwell 算子相同,因此,误差结果也相同。而对比 LSI-T 方法 ($R_{RMS} = 0.69 \mu\text{m}$, $A_{PV} = 5.14 \mu\text{m}$), 本文方法的误差较小。

在重建桶形和枕形分布的表面时,传统 Southwell 模型不能直接应用在这种非等间隔采样的重建中,需要先进行重采样。新采样点的范围在 x 和 y 方向上均为 -2.8 mm 到 2.8 mm ,采样点等间隔排列,数量为 256×256 。通过双线性插值法计

算目标范围内采样点的梯度值。将重采样的点坐标和梯度值代入 Southwell 模型进行积分。图 6 所示为三种方法计算得到的桶形分布时的重建误差,使用本文方法得到的 R_{RMS} 值为 $0.16 \mu\text{m}$, A_{PV} 值为 $1.26 \mu\text{m}$,精度明显高于重采样后的 Southwell 方法 ($R_{RMS} = 0.57 \mu\text{m}$, $A_{PV} = 4.13 \mu\text{m}$) 和 LSI-T 方法 ($R_{RMS} = 0.66 \mu\text{m}$, $A_{PV} = 5.01 \mu\text{m}$);图 7 所示为三种方法计算得到的枕形分布时的重建误差,本文方法的误差 ($R_{RMS} = 0.21 \mu\text{m}$, $A_{PV} = 1.40 \mu\text{m}$) 同样小

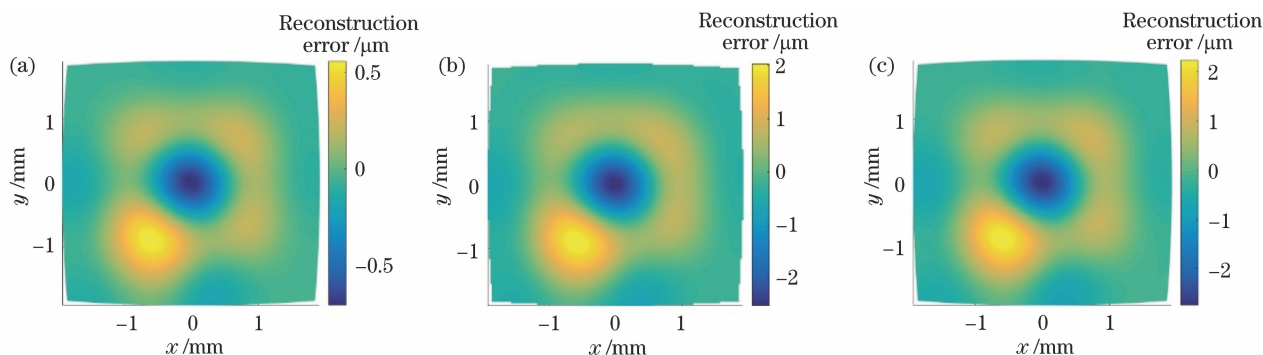


图 6 桶形分布对应的重建误差。(a)本文方法;(b)重采样后的 Southwell 方法;(c)LSI-T 方法

Fig. 6 Reconstruction error corresponding to barrel distribution. (a) Proposed method; (b) Southwell method after resampling; (c) LSI-T method

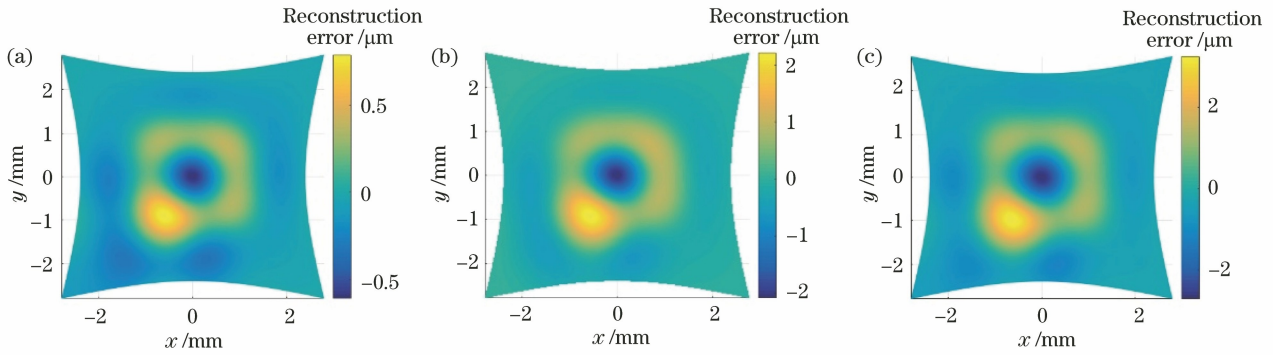


图 7 枕形分布对应的重建误差。(a)本文方法;(b)重采样后的 Southwell 方法;(c) LSI-T 方法

Fig. 7 Reconstruction error corresponding to pillow distribution. (a) Proposed method; (b) Southwell method after resampling; (c) LSI-T method

于其他两种方法(重采样后的 Southwell 方法: $R_{RMS} = 0.50 \mu\text{m}$, $A_{PV} = 4.31 \mu\text{m}$; LSI-T 方法: $R_{RMS} = 0.68 \mu\text{m}$, $A_{PV} = 5.98 \mu\text{m}$)。上述结果证明本文方法能够精确地重建非标准矩形分布的高度值。

下面将讨论非矩阵数据的重建时间。利用所提的非迭代方法、迭代区域法和基于傅里叶变换的迭代模式法对非矩阵数据进行重建。重建对象选用图 3(a)所示的表面,根据图 8 所示的目标点和空缺点位置,获取非矩阵梯度数据,图 8(a)和(b)对应的采样点数量分别为 29236 和 24994。

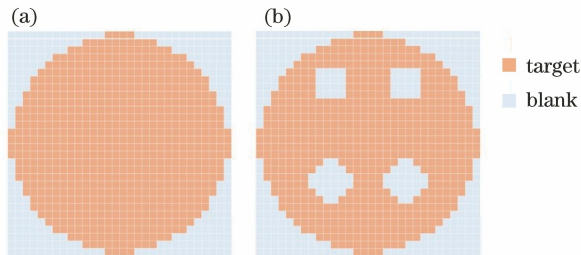


图 8 目标点和空缺点在矩阵中的位置示意图。

(a)圆形区域;(b)带有孔径的区域

Fig. 8 Schematic of the position of the target and blank points in the matrix. (a) Circular area; (b) area with small holes

采用 2.3 节的非迭代方法对非矩阵高度数据进行重建,记录重建时间,并与迭代区域法和迭代模式法进行对比。在使用两种迭代方法的过程中,需要采用 0 元素将非矩阵数据填充为 180×180 的矩形阵列,在迭代初期,重建面型与原始面型相差较大,此时的面型不能作为最终结果,当迭代次数达到 20 次时,重建表面与原始表面接近,重建误差不再随迭代次数增加而减小,因此,取迭代 20 次时的计算时间与本文方法的计算时间进行比较。三种方法

的时间消耗情况如图 9 所示,本文方法的计算时间在 0.1 s 左右,明显低于迭代方法的消耗时间。

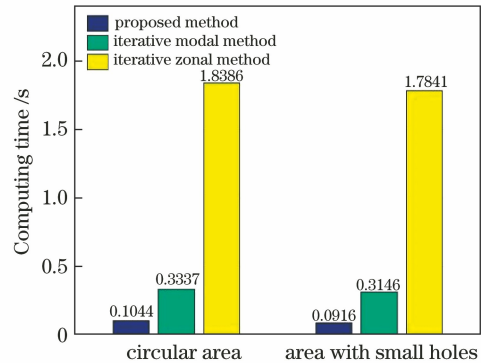


图 9 两种区域对应的计算时间对比

Fig. 9 Comparison of computing time in two areas

图 10 所示为计算时间随着采样点数量增加的变化情况。当采样点数量增加时,计算量增大,消耗时间也会随之增加,本文方法相比于其他迭代方法,始终具有较快的计算速度,而且这种速度优势在采样点数量较多时体现得更为明显,因此,本文方法非常适合于计算大规模的高度数据。

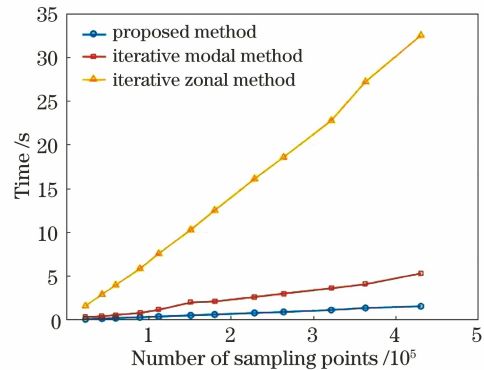


图 10 采样点数量对计算时间的影响

Fig. 10 Influence of the number of sampling points on the computing time

3.2 实验

采用基于圆偏振光的偏振重建方法^[10],搭建了如图 11 所示的实验系统,系统包括相机、1/4 波片、线偏振片以及附有右旋圆偏振膜的面光源等。其中,相机的分辨率为 $1360 \text{ pixel} \times 1024 \text{ pixel}$,被测对象是透镜表面,曲率半径为 90.56 mm ,面型精度 R_{RMS} 值优于 $\lambda/20$ ($\lambda = 632.8 \text{ nm}$)。为减小杂散光对重建结果的影响,在避光的环境下进行实验。

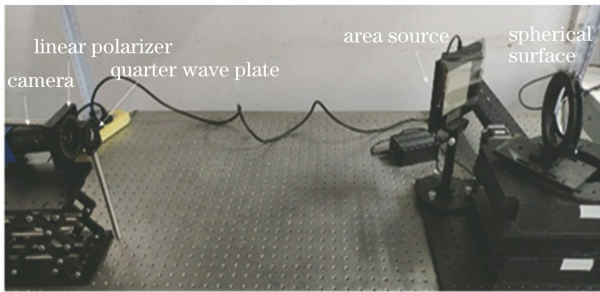


图 11 基于圆偏振光的偏振重建方法的实验装置图
Fig. 11 Setup of polarization reconstruction method based on circular polarized light

整个实验过程包括梯度测量和积分计算两个部分。在梯度测量的过程中,通过 1/4 波片和线偏振片的组合测量目标区域内反射光线的偏振态。将线偏振片固定在相机和波片之间,波片快轴方向与线偏振片透光轴方向的平行位置记为 0° 。固定线偏振片,波片以 10° 为步长从 0° 旋转至 360° ,每次旋转后用相机记录目标区域的强度图像,结果如图 12 所示。根据强度变化计算反射光的偏振态,然后依据偏振重建方法中梯度与偏振态的关系,解算各采样点处的梯度值。图 13(a)、(b)所示分别是目标区域内 x 方向和 y 方向的梯度分布情况。在表面高度的计算过程中,首先,将测量的 x 方向和 y 方向梯

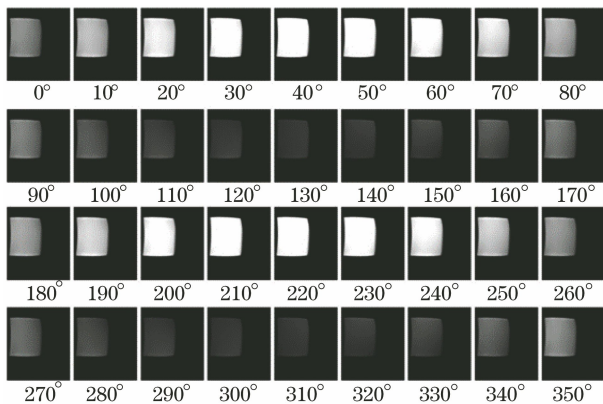


图 12 目标区域内强度随波片旋转角度的变化情况
Fig. 12 Intensity at different rotation angles of the wave plate within the target area

度数据填充为 140×120 的矩形阵列;然后,用(3)、(4)式和(16)、(17)式分别计算系数矩阵和差分向量的初始值,并依据 2.3 节提到的方法对系数矩阵和差分向量进行修正;最后,通过最小二乘法求解目标高度值。实验结果如图 14 所示。

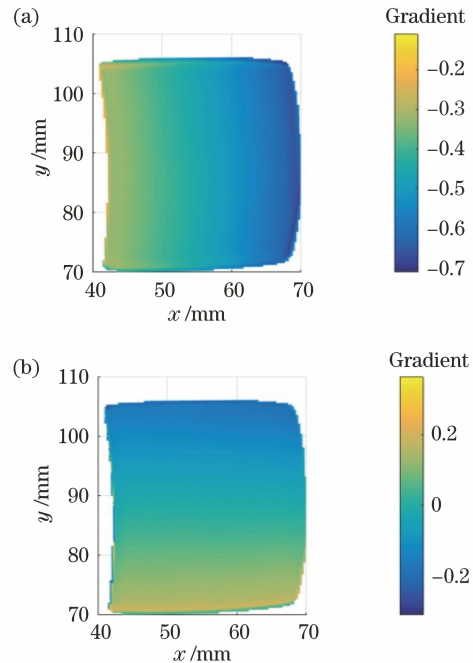


图 13 目标区域内的梯度分布。(a) x 方向梯度;
(b) y 方向梯度
Fig. 13 Gradient distribution in the target area.
(a) Gradient along x direction; (b) gradient along y direction

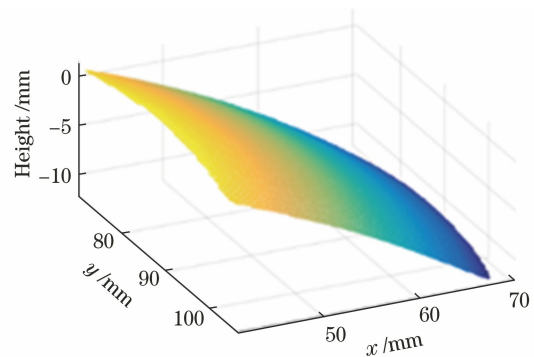


图 14 实验中重建的表面
Fig. 14 Reconstructed surface in the experiment

将测量的梯度数据应用到重采样后的 Southwell 方法中,与本文方法进行比较。由于无法直接计算重建表面与原表面之间的高度误差,采用最小二乘法获取重建表面的球心位置,将球心到表面点的距离与标准半径的差值作为各点的误差,计算公式为

$$R_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N [\sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2} - R]^2}{N_{\text{sam}}}}, \quad (21)$$

式中: (x_i, y_i, z_i) 是重建表面上点的坐标; (x_0, y_0, z_0) 是球形表面的球心; R 为被测球面的半径; N_{sam} 为采样点的数量。

图 15(a) 为使用本文方法时的重建误差图, 其 R_{RMS} 值为 0.023 mm, A_{PV} 值为 0.244 mm, 图 15(b) 为使用重采样后的 Southwell 方法的重建误差图, 其 R_{RMS} 值分别为 0.034 mm, A_{PV} 值为 0.326 mm。相比之下, 本文方法的误差相对较小。

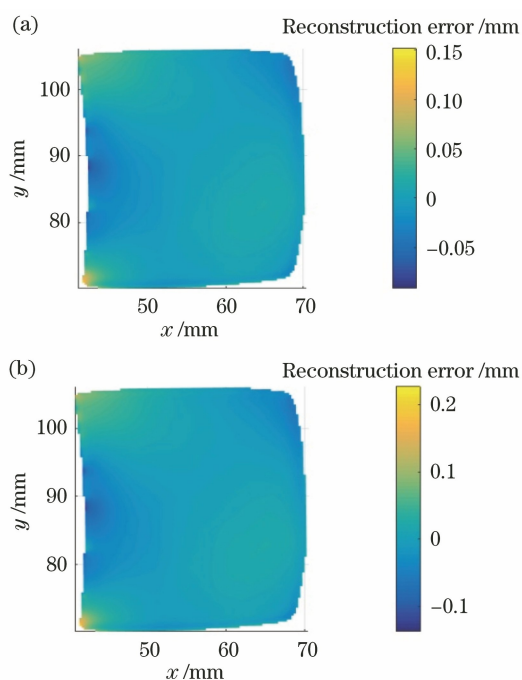


图 15 不同方法的重建误差图。(a) 本文方法;
(b) 重采样后的 Southwell 方法

Fig. 15 Reconstruction error map by different methods.

(a) Proposed method; (b) Southwell method after resampling

4 结 论

对离散梯度的积分方法进行分析, 以区域法为基础, 针对非标准矩形的采样点分布和非矩阵数据两种情况提出了改善的方案, 可实现快速、高精度的重建。首先, 为减小非标准矩形分布引入的截断误差, 结合二维泰勒展开理论, 同时采用 x 方向和 y 方向的梯度去计算相邻点的差分, 并根据一阶偏导项和二阶偏导项之间的近似关系, 推导出新的小

截断误差的差分算子, 用于减小积分方法的重建误差; 其次, 针对非矩阵高度数据的计算时间问题, 提出一种非迭代的计算方法, 采用非数 NaN 将非矩阵梯度数据填充为矩阵形式, 通过矩阵运算计算差分向量, 并根据差分向量和索引向量中无效点 NaN 的位置修改系数矩阵, 应用最小二乘法, 可直接无迭代地完成重建计算, 节省计算时间。数值实验结果表明: 当采样点按照桶形和枕形两种非矩形排列分布时, 本文方法的重建精度明显优于其他两种方法; 在处理非矩阵数据时, 本文方法的计算速度明显快于基于迭代的区域法和模式法 (迭代次数为 20), 并且, 随着采样点数量的增加, 本文方法在速度方面的优势更加突出。此外, 通过基于圆偏振光的偏振重建实验验证本文方法的性能, 实验结果与仿真结论基本吻合。因此, 本文方法适用于快速、精确地重建大尺寸高度数据。

参 考 文 献

- [1] Ji Z Y, Zhang X F, Zheng Z L, et al. Algorithm based on the optimal block zonal strategy for fast wavefront reconstruction [J]. *Applied Optics*, 2020, 59(5): 1383-1396.
- [2] Vieggers M, Brunner E, Soloviev O, et al. Nonlinear spline wavefront reconstruction through moment-based Shack-Hartmann sensor measurements [J]. *Optics Express*, 2017, 25(10): 11514-11529.
- [3] Pant K K, Burada D R, Bichra M, et al. Weighted spline based integration for reconstruction of freeform wavefront [J]. *Applied Optics*, 2018, 57(5): 1100-1109.
- [4] Wei P, Li X Y, Luo X, et al. Influence of lack of light in partial subapertures on wavefront reconstruction for Shack-Hartmann wavefront sensor [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2020, 47(4): 0409002. 魏平, 李新阳, 罗曦, 等. 部分子孔径缺光对夏克-哈特曼波前传感器波前复原的影响 [J]. *中国激光*, 2020, 47(4): 0409002.
- [5] Liang P, Ding J, Jin Z, et al. Two-dimensional wave-front reconstruction from lateral shearing interferograms [J]. *Optics Express*, 2006, 14(2): 625-634.
- [6] Guo Y F, Xia J P, Ding J P. Recovery of wavefront from multi-shear interferograms with different tilts [J]. *Optics Express*, 2014, 22(10): 11407-11416.
- [7] Frankot R T, Chellappa R. A method for enforcing integrability in shape from shading algorithms [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1988, 10(4): 439-451.

- [8] Zeng W, Wang H Y, Liu Y Q, et al. 3D reconstruction of space target IR image based on IR-SFS algorithm[J]. *Chinese Optics*, 2014, 7(3): 376-388.
曾蔚, 王汇源, 刘莹奇, 等. 基于 IR-SFS 算法空间目标红外影像 3D 重建[J]. *中国光学*, 2014, 7(3): 376-388.
- [9] Ferraton M, Stolz C, Mériaudeau F. Optimization of a polarization imaging system for 3D measurements of transparent objects[J]. *Optics Express*, 2009, 17(23): 21077-21082.
- [10] Garcia N M, de Erasquin I, Edmiston C, et al. Surface normal reconstruction using circularly polarized light[J]. *Optics Express*, 2015, 23(11): 14391-14406.
- [11] Huang L, Ng C S, Asundi A K. Dynamic three-dimensional sensing for specular surface with monoscopic fringe reflectometry[J]. *Optics Express*, 2011, 19(13): 12809-12814.
- [12] Xiao Y L, Su X Y, Chen W J, et al. Three-dimensional shape measurement of aspheric mirrors with fringe reflection photogrammetry[J]. *Applied Optics*, 2012, 51(4): 457-464.
- [13] Zhang S K, Li L H, Sun J N, et al. Surface measurement of angel lobster eye X-ray lens based on fringe reflection[J]. *Acta Optica Sinica*, 2019, 39(9): 0934001.
张诗鲲, 黎龙辉, 孙建宁, 等. 基于条纹反射方法的 Angel 型龙虾眼 X 射线镜片面型测试[J]. *光学学报*, 2019, 39(9): 0934001.
- [14] Tang H C, Li D H, Li L, et al. Planar object surface shape speckle pattern deflectometry based on digital image correlation[J]. *Acta Optica Sinica*, 2019, 39(2): 0212006.
汤海潮, 李大海, 李磊, 等. 基于数字图像相关的平面物体面形散斑图形偏折术[J]. *光学学报*, 2019, 39(2): 0212006.
- [15] Freischlad K R, Koliopoulos C L. Modal estimation of a wave front from difference measurements using the discrete Fourier transform[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1986, 3(11): 1852-1861.
- [16] Mochi I, Goldberg K A. Modal wavefront reconstruction from its gradient[J]. *Applied Optics*, 2015, 54(12): 3780-3785.
- [17] Tong K N, Zheng Y, Zhang Z, et al. Model of radial basis functions based on surface slope for optical freeform surfaces[J]. *Optics Express*, 2018, 26(11): 14010-14023.
- [18] Fried D L. Least-square fitting a wave-front distortion estimate to an array of phase-difference measurements[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1977, 67(3): 370-375.
- [19] Hudgin R H. Optimal wave-front estimation[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1977, 67(3): 378-382.
- [20] Southwell W H. Wave-front estimation from wave-front slope measurements[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1980, 70(8): 998-1006.
- [21] Huang L, Asundi A. Improvement of least-squares integration method with iterative compensations in fringe reflectometry[J]. *Applied Optics*, 2012, 51(31): 7459-7465.
- [22] Li G H, Li Y Q, Liu K, et al. Improving wavefront reconstruction accuracy by using integration equations with higher-order truncation errors in the Southwell geometry[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2013, 30(7): 1448-1459.
- [23] Ren H Y, Gao F, Jiang X Q. Least-squares method for data reconstruction from gradient data in deflectometry[J]. *Applied Optics*, 2016, 55(22): 6052-6059.
- [24] Huang L, Xue J P, Gao B, et al. Zonal wavefront reconstruction in quadrilateral geometry for phase measuring deflectometry[J]. *Applied Optics*, 2017, 56(18): 5139-5144.
- [25] Zou W Y, Rolland J P. Iterative zonal wave-front estimation algorithm for optical testing with general-shaped pupils[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2005, 22(5): 938-951.
- [26] Roddier F, Roddier C. Wavefront reconstruction using iterative Fourier transforms[J]. *Applied Optics*, 1991, 30(11): 1325-1327.
- [27] Bond C Z, Correia C M, Sauvage J F, et al. Iterative wave-front reconstruction in the Fourier domain[J]. *Optics Express*, 2017, 25(10): 11452-11465.