第 41 卷 第 1 期/2021 年 1 月/光学学报 创刊四十周年特邀综述

光学学报

月球激光测距中的关键物理与技术问题

饶瑞中*

中国科学院安徽光学精密机械研究所，中国科学院大气光学重点实验室，安徽 合肥 230031

摘要 根据国际上公开发表利用的 1969—1972 年美国 Apollo 11、14、15 宇航员放置在月球上的三个角反射器以及 1970—1971 年苏联无人登月车放置的两个角反射器进行的月球激光测距的论文和技术文献，讨论了月球激光测距中的几个关键物理和技术问题，主要包括：1)角反射器阵列指向与其月面位置的精确定位；2)角反射器激光回波信号的确认；3)接收信号强度与信噪比；4)测距结果的精度；5)满月时为什么不适于测距；6)地球大气对激光测月及其精度的影响。现有技术文献对一些关键的技术细节描述尚不完备，判定接收信号来自角反射器对激光的反射缺乏直接的物理证据，现在声称的距离测量精度与激光本身特性的关系尚需进一步分析。

关键词 测量；月球激光测距；角反射器；信噪比；Poisson 概率分布；测量精度

中图分类号 P228.5 **文献标志码** A **doi**：10.3788/AOS202141.0112002

Discussion on Some Key Physical and Technical Problems About Lunar Laser Ranging

Rao Ruizhong*

Key Laboratory of Atmospheric Optics, Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Hefei, Anhui 230031

Abstract Based on published literatures about lunar laser ranging with three retro-reflectors landed on the Moon by the astronauts of Apollo 11, 14, and 15 missions in 1969—1972 and the two retro-reflectors landed on the Soviet roving vehicles in 1970—1971, some related physical and technical problems in lunar laser ranging are analyzed and discussed. These problems include: 1) the direction of the retro-reflector array and the accurate determination of its position on the lunar surface; 2) the identification of laser echo signals from the retro-reflector; 3) the intensity of receiving signals and the signal-to-noise ratio; 4) the precision of the lunar laser ranging results; 5) the difficulty of ranging in the full moon period; 6) the effect of the Earth's atmosphere on lunar laser ranging and its precision. Some key technical details in the ranging loop have not been given in the published literature. There is a lack of direct physical evidences for the identification of signals as the laser back from retro-reflectors. The further analysis on the relationship between the lunar ranging precision claimed and the laser characteristics is needed.

Key words measurement; lunar laser ranging; retro-reflector; signal-to-noise ratio; Poisson probability distribution; measurement accuracy

OCIS codes 120.1880; 120.4820

1 引 言

如果要举一项人类历史上最伟大的科学技术成就，毫无疑问是美国 Apollo 载人登月。除了具备人类登上地球外第一个天体所展示的非凡技术水平以及经一些实验获得的对月球的科学认知以外，宇航员还在月面上放置了能将入射光原方向返回的光学设备——角反射器(CCR)。从地面发射激光，照射这些角反射器，并测量回波信号，就可以进行月球和地球间距的直接测量，精确的距离变化量可以为引

收稿日期：2020-05-25；**修回日期**：2020-06-18；**录用日期**：2020-07-15

* **E-mail**：rao@aiofm.ac.cn

力理论等天文和物理科学研究提供实验验证，从而开创了地月激光测距(LLR)这项专门的技术[1]。迄今为止，这些角反射器的唯一功能就是为激光测距服务，因此被称为 LRRR(laser ranging retro-reflector)。

1969 年 7 月、1971 年 2 月和 7 月 Apollo 11，14，15 上的宇航员分别在月面放置了一台 CCR 阵列。前两台 CCR 阵列的技术指标相同，是由 10×10(纵向上的小角反射器的数量×横向上的小角反射器的数量)的 100 个小 CCR 组成的 0.46 m×0.46 m 的方形阵列，每个圆形的小 CCR 的直径为 38 mm，陷入深度为 19 mm，CCR 阵列的有效面积为 0.1134 m^2。第三个 CCR 阵列是由两块 17×12 和 8×12 六边形排列的共 300 个小 CCR 组成的 1.05 m×0.64 m 矩形阵列，每个小 CCR 的技术指标与前两台相同，CCR 阵列总有效面积为 0.3402 m^2[2]。1970 年 11 月和 1973 年 1 月苏联 Lunakhod 1 和 Lunakhod 2 月球车放置的两台法国研制的 LRRR 技术指标相同，都是由 14 个边长为 106 mm 的三角形紧密排列组成的 2×7 的 0.44 m×0.19 m 条形阵列，CCR 阵列总有效面积为 0.0734 m^2[3]。5 台 LRRR 已都被用于 LLR，其中面积最大的 Apollo 15 使用率最高，约占 70%。而 Lunakhod 1 长期未被使用，直到 2010 年才被最高性能的 LLR 系统 APOLLO 所发现。图 1 所示为 Apollo 15 放置在月面的角反射器。

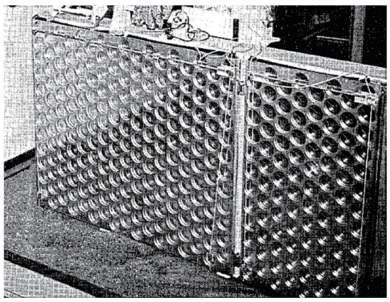


图 1 Apollo 15 放置在月面的角反射器[4]

Fig. 1 Retro-reflectors landed on the Moon by Apollo 15[4]

Apollo LRRR 的倡议和设计者、当时的 Princeton 大学研究生 Faller 说："它已经服役 50 年了，而且仍然工作着。由于月球颗粒(微小灰尘)落在角反射器上，它的透明度不再那么好了，50 年来透过率(可能指反射效率)从 100%下降到 10%，但激光的亮度也提高了 10 倍，弥补了它的性能恶化。"[5]。这只可能是一种推测，因为 LRRR 的反射效率是无法在地球上直接测量的，虽然激光亮度提高了 10 倍，但 LLR 回波信号几乎不变，于是推测 LRRR 的反射效率下降了 10 倍。

早在 Apollo 11 号登月前的 1962 年 5 月 9、10、11 日麻省理工学院(MIT)电子学研究实验室就利用自然月面进行了激光测距[6]。能量为 50 J、持续时间为 0.5 ms 的红宝石 0.6943 μm 激光(1960 年 Maiman 发明的史上第一台激光器就是发射这种激光)由 12 inch(1 inch=2.54 cm)口径的卡式望远镜发射，并由 48 inch 的卡式望远镜接收，接收视场为 0.2 mrad，滤光片带宽为 0.7 nm，由光电倍增管探测信号。噪声为 1.11～1.52 个光电子，信号为 1.74～2.32 个光电子。

虽然理论分析认为地面接收的 LRRR 反射的信号应该远大于自然月面的漫反射信号、MIT 使用的也是刚刚问世不久且性能有限的激光器，半个世纪过去了，激光器和光电探测器技术性能远非当初可比，但 LLR 依然是一项难度很高的复杂任务。力挺 Apollo 登月的科学家大力宣传世界各地几十家天文台进行 LLR，实际上全球能够实现 LLR 的测站很少，并且分布很不均匀。虽然 Apollo 11 登月 2 周后(1969 年 8 月 1 日)，最初的 LLR 观测是由 California 大学的 Lick 天文台 3 m 望远镜(位于 California 州的 Mount Hamilton，当时世界第二大望远镜)进行的，接收信号达到了 1.6 个光子。但一个月后持续的 LLR 则是由 Texas 大学的 McDonald 天文台的 2.7 m 望远镜(位于 Texas 州的 Mount Locke，当时世界第三大望远镜)承担的。McDonald 天文台 LLR 系统使用的是脉宽为 4 ns 的红宝石激光，其重复频率为 0.3 Hz，单脉冲能量约为 3 J，每个脉冲回波接收信号最大为 0.2 个光子(指平均值，即 5 个脉冲只有 1 个接收到 1 个光子的回波)，测距精度为 20 cm[2,7]。

20 世纪 80 年代中期，位于美国 Texas 州的 McDonald 天文台改用 0.76 m 望远镜和一台重复频率为 10 Hz、单脉冲能量为 150 mJ、脉宽为 200 ps 的 Nd:YAG 激光器(0.532 μm)进行 LLR，该系统称为 MLRS，每个脉冲接收信号强度为 0.002 个光子。与此同时，位于法国 Grasse 的 de la Cote d′Azur 天文台(OCA)的 CERGA 测月系统用 1.5 m 望远镜和一台重复频率 10 Hz、单脉冲能量 75 mJ、脉宽 70 ps 的 Nd:YAG 激光器(0.532 μm)进行 LLR，每个脉冲接收信号的强度为 0.01 个光子[8]。此外，美国夏威夷 Maui 岛上的 Haleakala 天文台、德国 Wettzell 观测站和意大利 Matera 等也进行了少量的有效测距。

2005 年建造并初步工作的目前性能最高的工作在可见光波段的 LLR 系统是位于美国 New Mexico 州 Apache Point 天文台的 APOLLO，它包括一台 3.5 m 望远镜和一台重复频率为 20 Hz、单脉冲能量为 115 mJ、脉宽为 90 ps 的 Nd:YAG 激光器(0.532 μm)。该系统经性能优化后于 2007 年开始持续测距工作，接收信号最强可达几个光子，测距精度达 mm 水平。

得益于红外探测器性能的提高，法国 OCA 天文台在 21 世纪实现了用 Nd:YAG 激光器(1.064 μm)在近红外波段进行 LLR 的工作，并获得了一些在 0.532 μm 和 1.064 μm 两个波长同时测距的系统数据。红外信号强于可见光信号，二者对大部分 LRRR 的测距精度相当，但红外对 L2 的测距精度显著优于可见光，超越了 APOLLO 的性能[9]，这套系统是目前公开报道的世界上唯一工作在红外波段的 LLR 系统。

LLR 是继续利用 Apollo 登月工程遗产的唯一实验[8]。现在国际社会广泛存在着对 Apollo 登月真实性的质疑，放置在月面上的角反射器成为 Apollo 11 确实存在于月球上的单一最好证据[5]。骗局论者认为，月面反射器是由无人登月器自动放置的，苏联的月球号无人着陆器也曾将激光反射器放置在月面上。从技术角度来看，如果由人来放置反射器，让反射器朝向地球很容易，而自动放置则不那么简单，两者的工程设计不一样。从照片上看，反射器不像是被自动放置并与地球对向的[10]。这里提到的质疑者承认了 LRRR 在月球上的存在，专家的释疑依据了登月照片的真实可靠性。

我国激光测月研究起步于 20 世纪 80 年代，中国科学院上海天文台 1985 年开始对 LLR 资料进行处理与分析，并进行应用研究[11]。1990 年中国科学院云南天文台建立了 1.2 m 望远镜 10 Hz 共光路激光测月系统，并于 2018 年 1 月 22 日晚成功探测到了 Apollo 15 月面反射器的回波[12]，于 2018 年 1 月 23 日测得 3 组 Apollo 15、1 组 Apollo 14 和 2 组 Apollo 11 的数据，于 2018 年 1 月 24 日测得 1 组 Apollo 15 和 1 组 Apollo 14 的数据，于 1 月 26 日测得 3 组 Apollo 15、2 组 Apollo 14、1 组 Apollo 11 的数据。

据《科技日报》报道，位于中山大学珠海校区的“天琴计划”激光测距台站(在不到一年的时间内台站建设完成)于 2019 年 6 月 8 日晚首次测到 Apollo 15 的信号，于 8 月 14 日凌晨首次测到 Apollo 14 信号，于 11 月 7 日晚首次同时获得月球上的 5 个目标(A15、A14、A11、L17、L21)信号，并实现高精度的月距离测量，目前科研团队对地月距离的测量精度正在评估中。据了解，该地月激光测距系统仅工作在 1.064 μm，未工作在可见光波段，应该是世界上第二个工作在红外波段的 LLR 系统。

LLR 接收信号是(亚)单光子量级，其体现的技术水平是十分高超的，无论是起步时间、传播距离还是技术难度都远超现在的量子卫星上的“针尖对麦芒”的星地光路对准技术，无论是远距离指向定位、单光子探测等硬件技术还是强背景噪声下弱信号的甄别等软件技术都包含精密、巧妙之处。目前公开发表的文献虽然给出了丰富的信息，但依然有一些关键问题没有给出清晰的说明，有必要对其进行讨论、辨析。

2 角反射器指向与月面位置的精确定位

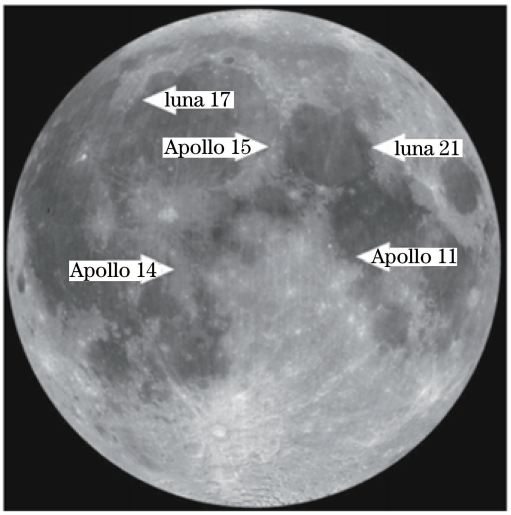
由于角反射器的反射效率随入射光线偏离法线的角度的增大而迅速下降，安放 LRRR 时应使其法线方向正对地球。Apollo 角反射器项目负责人 Fall 说：“宇航员能花在将月面角反射器对准地球上的时间是有限的”，这说明角反射器的摆放是有一定难度的[5]。Apollo 11 初步科学报告介绍说，宇航员 Armstrong 使用罗盘将东西方向校准在刻度的一格范围内，将气泡水平仪指向西南，水平方向的校准精度在 0.5°以内。如果将最大可能的放置公差考虑在内，东西向的对准精度为±0.7°，从而使对准平动图案(月球平动引起的地球方向的变化)中心位置的精度小于 1°[2]。这个结果应该是根据安装 LRRR 所需要的太阳高度指示器、罗盘和气泡水平仪预先设定的程序所推测的理想结果，至于宇航员是否能准确地按照要求安装到位、安装后 LRRR 是否受月面土壤和外部活动(如飞船起飞)的影响，则无从得知，更无法实际测定真实的定位结果。

苏联月球车如何精确地把角反射器自动摆放好，无疑不是一件简单的事情，目前尚未看到有关自动摆放 LRRR 的具体技术和方法的文献资料。Lunakhod 的 LRRR 的对准精度约为 5°[13]，这个判断的依据也不清楚。

Apollo 三个、Lunakhod 二个 LRRR 在月面的位置如图 2 所示。在早期的技术水平下，LRRR 在月心参考系下绝对位置的精度在 km(水平)和 100 m(径向)量级[11]。而 Lunokhod 1 登月车被从 2010 年 3 月美国 Lunar Reconnaissance Orbiter (LRO) 拍摄的图像中辨识出来，坐标不确定度约为 100 m。APOLLO

随之对该位置进行测距，得到了回波信号，信号强度与 Apollo 11、14 相仿，是 L2 的 4 倍左右[14]。

月地距离（径向）测量的高精度只有在 LRRR 月面位置（横向）高精度确定的情况下才有科学意义。对要求或获得的厘米或毫米级的月地测距精度而言，相比 LRRR 指向的精确确定，LRRR 在月面上具体位置的精确确定则更为困难，登月器或航天测控对LRRR位置的定位不可能达到这么高的精度。虽然地面激光测月已能实现月地距离的高精度测量，但 LLR 技术本身似乎不能实现对 LRRR 地理位置的精确测量。对于理想状态的 LLR 系统和大气状态，发散角为 1″（约为 5 μrad）的激光束照射到月面上，覆盖直径达 1.9 km 的区域，如何能将角反射器的位置确定到厘米或毫米精度仍未见报道。



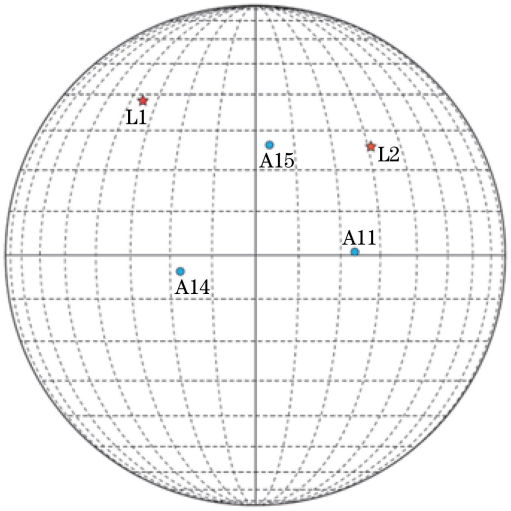


图 2 目前月面上 3 个 Apollo（A11、A14 和 A15）和 2 个 Lunakhod（L1、L2）角反射器的位置

Fig. 2 Positions of three Apollo retro-reflectors (A11, A14, and A15) and two Lunakhod retro-reflectors (L1 and L2) on surface of the Moon

在几乎没有反馈的情况下（大尺度月面特征望远镜可见，但角反射器不可见）精度达角秒量级的望远镜对目标的瞄准与跟踪本身就是一项难度巨大的技术挑战。为了获取 LRRR 回波信号所采用的时间、空间和光谱滤波技术都恰恰摒弃了有利于这项工作的背景光，而有利的大气视宁度、极小的发散角也恰恰与瞄准、跟踪所希望的条件相背。此外，月地运动还要求角秒量级的瞄准提前量，这些因素都大大增加了这项技术的难度[15]。

APOLLO 团队关于判定 LRRR 性能退化的一项研究也许与此有关[16]。在开展此项研究的实验中，他们将接收望远镜对准同一位置并将激光束按一定的偏置量在月面上进行扫描，接收到的信号强度随偏置量的变化情况如图 3 所示，从图 3 中推测得到光束宽度小于 1″。不知这预先对准的位置是否就是 LRRR 的准确位置（按照模型预测）？若是，则这种预先瞄准的方法是相当可靠的。

如果这预先对准的位置仅仅是 LRRR 的大致位置，光斑中心并非 LRRR，则接收信号是否存在？如果存在，那接收信号就不应该是 LRRR 的回波，说明：1）自然月面的回波信号强度与 LRRR 回波信号强度相当，无法区分；2）利用自然月面可以进行光束宽度的测量。如果接收信号不存在，则重复进行此扫描过程，直到找到接收信号，而信号强度峰值（一系列扫描过程中的最大值）对应的就是 LRRR 的位置，但其精度显然不足以达到 cm 或 mm 的精度。我们应记住，判断接收的信号是否来自角反射器的激光回波不是实时进行的，而是在持续几十分钟的一次测量之后进行数据处理才能判断的。因此

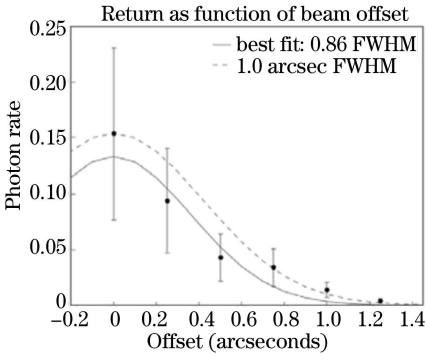


图 3 2005 年 12 月 9 日光束偏置优化结果（偏置步长为 0.25″）[16]

Fig. 3 Beam offset optimization result on December 9, 2005 (at offset step of 0.25″)[16]

进行一系列扫描是需要占用相当长时间的。

这里存在一个光学技术问题：APOLLO 系统是在同光路进行发射激光束和接收回波信号的，如何改变发射方向而固定接收方向？如果是在望远镜内的透射/接收(T/R)光学系统中故意产生偏置，当偏置量不超出视场，望远镜的光通量不发生改变才行。如果发射光束的光通量受偏置影响而不能全部照射到月球上，接收信号强度就会降低。

3 月面角反射器回波信号的确认

LLR 是一项极具技术挑战性的工作，从信噪比的角度来看，在不利的条件下，几乎所有的接收光子皆为背景噪声而非激光回波。此外，观测数据皆需筛选，这需要考虑到 Poisson 性质。因此，在数据预处理中，确定哪些光子是真实的回波信号至关重要[17]。排除掉测量系统(包括光学系统、电路系统和探测器等)本身固有的噪声，激光测月接收的信号应该包括 6 个方面的来源。3 个方面是不同物体对发射激光的反射回波：月面角反射器反射的激光回波，月面本身反射的激光回波，以及大气层对激光的散射回波(包括上行的后向散射和下行的前向散射)；另外 3 个方面则来自其他光源：月面角反射器反射的太阳光(直射到月面的和经地球反射的太阳光再次照射到月面)，月面本身反射的太阳光，以及太阳在大气层中的散射光。

在各种来源的接收信号中，真正的 LRRR 激光回波信号所占比例很小，为了提高信噪比，需要从接收视场、光谱区间、时间区间等方面进行滤波，以尽可能地减小其他来源的信号。但在日常观测中，无论接收单元使用多窄的空间、光谱和时间滤波器，从各种噪声源发出的巨量的“志愿者”光子都可能触发探测电子系统。由于进来的所有的光子彼此都是不可分辨的，鉴别来自月球的回波信号一直是个艰巨的任务。从初始的 LLR 实验起，除了依赖物理的滤波方法，实验中一直要依赖可靠的统计滤波方法[18]。

噪声大小取决于光学系统的接收视场、滤光片的光谱宽度以及望远镜的接收口径[13]。空间滤波技术一般通过减小接收视场、光谱滤波一般使用窄带滤光片、时间滤波则采用距离门控技术(只采集对应于根据月地模型进行距离预测的某一时段内的数据)初步滤除大部分确定而明显的噪声。信号与噪声的初步区分目前都是以数据处理方法为主，比如有依靠经验的屏幕处理方法等各类滤波算法等。测月信号非常微弱，角反射器返回的光子数达到亚光子量级，月面反射更是微弱，有信号的地方相对比较集中。

由于测月激光使用无调制的直流光信号，回波信号又极其微弱，在每个脉冲的回波信号中，噪声往往大于信号，没有物理方法能将信号与噪声区分开来。按照 Marki 的说法，回波信号的唯一标志是起伏方差很小(即小于自然月面的起伏)[19]。注意，这里回波信号的起伏方差应该指的是单次接收信号对应的距离(接收时刻)的变化，而不是指单次接收信号光强度的变化，因为接收到的信号都是(亚)光子量级，现在一般所采用的探测器是单光子探测器，单次接收信号的强度是不变的(单光子)。如果接收的激光信号是从自然月面(应该是粗糙的)反射的回波，则测量的距离有起伏。而由于每次测距所获得的信号次数是很有限的，直接按照起伏方差进行判断比较困难。

3.1 基于偏离随机噪声 Poisson 分布的信号确认方法

开展 LLR 常规测量的最主要的美国团队对回波信号的确认是以“噪声服从 Poisson 概率分布、明显偏离 Poisson 概率预期的接收信号即为 LRRR 的反射回波”这一基本原理进行的[18,20]。中国科学院云南天文台也采用这种原理进行测月数据处理，其基本流程如下[12]。

首先，对测距残差数据(实际测量值与理论模型预期值的差值，如图 4 所示)在距离门内的分布以一定宽度(如 10 ns)进行时序网格划分，将每个网格内的距离残差数据对应的回波次数(数据点数)做成直方统计图(图 5)。然后对直方统计结果进行 Poisson 概率分析，以总数据点数的平均值 λ 作为 Poisson 分布的特征值，计算每个网格出现点数 n_k($n_k=0,1,2,\cdots$)的 Poisson 概率：

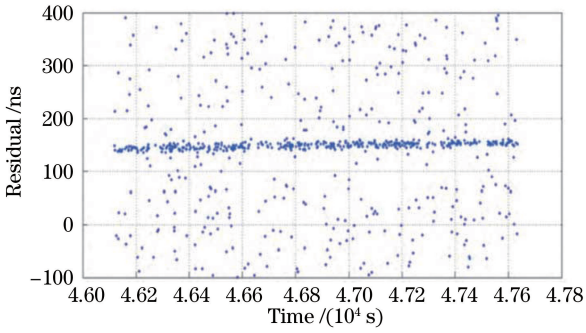


图 4 Apollo 15 测距残差数据[12]

Fig. 4 LLR residual data of Apollo 15[12]

$$P(n_k)=\frac{\lambda^{n_k}}{n_k!}\mathrm{e}^{-\lambda}。\tag{1}$$

设定合适的阈值 T，若某网格内数据点数出现的概率 $P(n_k)$小于阈值 T(即在此时间间隔内的回波次数明显超出预期 Poisson 概率)，即认为该网格内包含了 LLR 回波信号(或者是由某种系统性原因造成的)，通过后续处理识别信号点数据。阈值 T 是一个重要的经验值，关系到识别的准确性和可靠性。

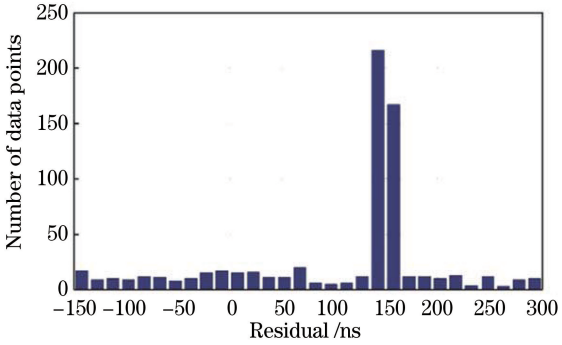


图 5 以一定时间间隔统计的测距残差数据直方图[12]

Fig. 5 Histogram of LLR residual data at certain interval[12]

由于探测器本身噪声水平也比较高，因此数据处理过程中没有细分反射回来的太阳光和器件本身的噪声，这些噪声都是随机分布的。而激光回波相对比较集中，能形成一条有规律的回波线，所以可以被识别出来。如果月面返回的光子正好落在信号区域，则无法将其识别出来，这种情况可能会造成测量误差变大，所以需要剔除一些偏差较大的数据。

注意按照 Poisson 概率确定的网格中有回波信号，但也无法保证其中都是回波信号，这其中也可能包含了噪声。

表 1 列出了 Lick 天文台利用 Apollo 11 LRRR 获得的最早的测月数据[2]，表中标出了判断出的信号数据值。标注 e 的第 19 次测距明确指出望远镜指向 LRRR 以南 16 km 处，激光没有照射到 LRRR(这是目前检索到的文献中唯一提到的 LLR 工作中自然月面对激光的回波测量实验)。虽然第 20 次测距得到的较弱的回波信号被指出是由卷云导致的信号衰减造成的，然而正常的第 17 次测距和第 21 次测距判断出的信号强度(以 b 标出)与第 19 次月面回波信号(通道 4 和 11)并没有明显的区别。上述数据甄别方法得到的激光回波信号中可能包含了噪声，此次测量结果表明，自然月面和 LRRR 反射的回波信号强度大致是相同的。标注 f 的第 20 次测量在月亮附近观察到卷云。

表 1 最早的 Lick 天文台测月数据[2]

Table 1 Earliest LLR data measured by Lick observatory[2]

Run	Total counts												No. of shots	Time for middle of run	Channel width, μs	Time of first channel[a] μs
	Channel															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12				
10	12	8	16	18	12	14	10	17	13	[b]27	12	12	20	10:21	2.0	−20
11	12	12	12	11	11	6	13	11	14	[b]26	10	14	14	10:32	2.0	−20
12	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	16	—	2.0	−10
13	13	8	8	12	7	[b]18	11	5	6	7	8	12	13	11:04	2.0	−10
14	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	6	—	1.0	−10
[d]15	4	3	3	5	4	[b]17	6	8	10	5	6	8	18	11:23	1.0	−5
16	1	1	2	2	[b]6	3	3	1	2	1	3	2	10	11:36	0.5	−1
17	6	3	4	2	[b]11	[b]9	2	7	2	4	2	5	16	11:45	0.5	−1
18	3	1	3	5	3	[b]19	3	3	4	1	0	4	22	12:03	0.5	−1
[e]19	3	3	3	10	4	3	5	2	5	5	8	5	22	12:19	0.5	−1
[f]20	2	1	1	0	3	4	[b]6	2	4	2	2	4	10	12:23	0.5	−1
21	5	2	2	3	2	1	[b]21	[b]11	3	4	5	2	22	12:45	0.5	−1

将望远镜偏离月球进行观测，可以直接获得大气回波信号(大气对激光的后向散射和自然光的散射光)的强度及其概率分布特征；将望远镜瞄准偏离月面角反射器的区域，可以直接获得自然月面回波信号(激光反射回波和太阳光)的强度及其概率分布特征。将这两种信号的强度及其概率分布特征与 LRRR 激光回波信号的强度及其概率分布特征进行系统的比较分析，则可以验证根据 Poisson 概率分布鉴别 LRRR 回波信号的可靠性。

在并非很好的测距条件下，回波信噪比很低，这种基于 Poisson 概率分布的数据甄别方法是很难奏效的。为此，有研究者试图引入其他的统计方法来优化这项工作，如利用贝叶斯分析[17]。他们对非常糟糕的模拟数据(14400 次激光脉冲发射，2313 次接收

到信号，只有 8 个接收信号是真实的激光 LRRR 回波，仅约占 0.35%）进行了正确的识别，但并未用于实际 LLR 数据的处理。此后 20 年来，也未见该方法应用于 LLR 工作的报道。这种贝叶斯分析可能更不可靠，因为它并不依赖于信号的任何具体物理特性，只根据对回波可能的数学特征进行推测判断。

3.2 基于激光脉冲时序编码的信号确认方法

开展 LLR 常规测量的另一个主要团队——法国 OCA 天文台发表的有关文献中没有引用基于偏离随机噪声 Poisson 分布的信号确认方法相关的文献，也未涉及相关内容，可以认为他们没有采纳这种原理。在他们的论文中明确提及，对发射的激光脉冲序列进行时序编码以便对回波进行确认，具体地讲，以 10 Hz 的频率发射 4 个脉冲，第 1 个脉冲和后续 3 个脉冲的时间间隔依次为 1.6，4.1，5.7 ns[13]。问题是，他们测距实验的回波信号接收率仅为 0.01，即平均每 100 个脉冲才能接收到 1 个回波，有多少数据包含 1 个完整的编码序列？又如何能利用 4 个连续脉冲的编码识别出真正的激光回波信号呢？

4 LLR 回波信号强度与信噪比

在信号处理中，描述信号可靠性的一个核心指标是信噪比，即信号与噪声的比值，这是一个无量纲的参数。只有信噪比大于一定阈值的数据是可靠的，信噪比越大，测量结果越可靠。

通过测量无激光发射时的接收信号可以简单地将 LRRR 激光回波和主要噪声源之一的 LRRR 反射的太阳光分离。但由于月面上的激光照射区域远大于 LRRR，无法从物理上直接区分 LRRR 反射激光的回波信号与 LRRR 外月面反射的激光回波信号。激光发射与不发射时接收信号的比值应该是月面回波的信噪比；激光发射时照射 LRRR 位置与照射无 LRRR（可用偏离近似代替）位置的回波信号的比值是 LRRR 存在与否的信噪比。

据估算，若 LLR 望远镜接收视场为 4″，则满月时的信噪比约为 10^{-7}；若使用 1 nm 光谱带宽的滤光片进行光谱滤波，则信噪比约为 10^{-5}；再对 20 Hz 重复频率（50 ms）进行门控为 1 ns 的时序滤波，则信噪比可高达 500[21]。而现在采用适用于测距的性能最好的激光器并配备 3.5 m 大口径望远镜的 APOLLO 测月系统接收的回波信号也仅在单光子水平。而背景噪声要么为零、要么不小于一个光子，因此按照通常的信噪比定义，测距信号的信噪比可能较小。

在激光测距工作中，当使用单光子探测器时不采用通常的信噪比定义，而是以一定时间间隔内接收到有效回波信号的次数作为信号的强度（实际上是回波率），相应地，其使用的信噪比的定义不同于常规的信噪比[22]：

$$R_{\mathrm{SNR}}=N_{\mathrm{signal}}/\sqrt{N_{\mathrm{pulse}}}\,, \tag{2}$$

式中：N_{signal} 为信号点数；$N_{\mathrm{pulse}}=N_{\mathrm{signal}}+N_{\mathrm{noise}}$，其中 N_{noise} 为噪声点数。假设接收数据是稳定一致的，即信号强度一致，噪声强度一致，则总信噪比与 $\sqrt{N_{\mathrm{pulse}}}$ 成正比。按照这种判据，通过增加有效观测时间、获取更多的数据可提高信号的识别度。美国 LLR 团队发表的文献均未明确提及测月数据信噪比的有关信息，中国发表的第一篇测月论文就采用上述定义分析了测量数据的信噪比。

法国 OCA 天文台发表的论文详细介绍了各项噪声信号的起伏方差大小，并给出了这些噪声造成的总的测距不确定度的方差，但对其中的一些噪声性质及其对测距信号影响分析的依据没有给出清楚的说明[13]，如白天月球上 LRRR 反射的太阳光背景噪声的频率 f_{Noise} 为 2 MHz，而夜晚背景噪声的频率为几千赫兹；其对测距精度影响的分析是以 $f_{\mathrm{Noise}}/N_{\mathrm{signal}}$ 作为自变量来进行的。

5 LLR 测距数据的精度

APOLLO 系统进行的月地测距精度达到了 mm 量级[21]。虽然采用各种理论模型和数据分析方法处理了月面高程、大气折射等带来的可能影响，但对大气湍流影响的处理只是通过使用视宁度这个参量分析了光斑扩展的范围。关于光波通过大气湍流带来的光强起伏（闪烁）以及光强起伏的概率分布对接收信号分析处理的影响，都没有涉及。与此密切相关的是，接收光子是噪声还是 LRRR 激光回波信号是通过比较接收信号的概率分布与 Poisson 概率分布来判定的。

mm 级精度虽然给 LLR 带来了巨大的技术挑战，但这种精度甚至更高的精度对于引力等物理学理论的检验可能是必须的。然而，即使对纯粹的地面望远镜与 LRRR 之间距离的测量精度确实可以达到精密的 mm 量级，但如何处理地基或月面的震动等因素及其对望远镜和 LRRR 测量精度的影响以及获得的结果也是不清楚的。LRRR 在月心参考系下绝对位置的精度在 km（水平）和 100 m（径向）量级[11]，那么 LLR 的 mm 量级测距精度的意义何在？这无疑带来两大问题：LLR 距离门设定的可靠

性和 LLR 测距科学应用的可靠性。

纯粹的 LLR 精度能否达到 mm 量级，目前的分析依然存在 2 个待解决的问题：1）光子从脉冲中的哪个具体时刻发射？2）光子从 LRRR 阵列中的哪个角反射器反射？由于 LLR 接收信号都是单光子级别，这两个问题都与目前热门的量子科学问题有关，信号的处理必然涉及到量子理论，而 LLR 的研究中从未正面涉及过该理论。

5.1 LRRR 阵列尺度对测距精度的影响

Apollo 角反射器指向名义上偏离正对地球平均位置的角度在 1°之内，而月球方位的变化（平动）可使偏离角最大达 10°[23]。Apollo 15 的 LRRR 阵列在纵、横方向上分别有 25 和 12 个角反射器，尺度达 1.05 m×0.64 m。当 LRRR 的指向偏离正对地球的方向达 1°时，处于纵、横方向两端的两个小角反射器到地面望远镜的距离之差约为 17 mm 和 10 mm；而当 LRRR 的指向偏离正对地球的方向达 10°时，处于纵、横方向两端的两个小角反射器到地面望远镜的距离之差约为 170 mm 和 100 mm。Müller 等[15]估计的由此引起的单次测距结果的均方根误差约为 50 mm。法国 OCA 的 LLR 测距精度也声称达到 mm 量级，决定测距精度的最主要因素就是 LRRR 的尺度[13]，APOLLO 团队也持同样的观点，如图 6 所示[21]，图中稠密的数据点被认为是 LRRR 回波信号，约 1 ns（1000 ps）的宽度被认为是由 LRRR 的有限尺度造成的。

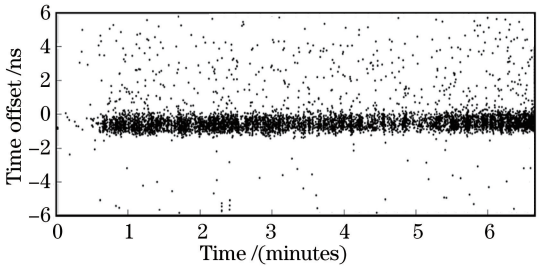


图 6 2010 年 3 月 23 日 APOLLO 针对 Apollo 15 LRRR 的 8000 次发射的接收回波（100 ns 门控中的 12 ns 间隔内的接收回波）[21]

Fig. 6 Receiving echo of Apollo 15 LRRR for 8000 times launching on March 23, 2010 (receiving echo within 12 ns interval for 100 ns gating)[21]

LLR 接收的单光子信号能否认为必然从 LRRR 阵列的某一单元角反射器返回？这是否牵扯到量子力学中的光子非定域性问题？仅按照几何光学的光线传播理论处理就可以了？当 LRRR 的指向偏离正对地球的方向达 10°时，在纵、横两个方向上每个单元角反射器的测量不确定度约为 7 mm 和 8 mm。即使能确定单个光子是从某个单元角反射器反射的，但肯定无法确定其在这个单元角反射器（直径为 38 mm）的具体位置。多个回波光子的平均位置可认为是在单元角反射器的中心，但不确定其方差能否满足 mm 的测距精度。

5.2 激光脉冲特性对 LLR 测距精度的影响

月球激光测距实际上测量的是月地距离与理论预期值的差值。通过理论模型预测，测距系统中设定了控制快门，只接收对应于理论预期距离前后一小段距离的时间。按照 APOLLO 技术系统的分析，激光出光时刻的测量精度达 15 ps，而激光脉冲的脉宽达 90 ps。地面接收的一个光子最初处于脉冲的哪个具体时刻是无法确定的，即使是多次信号的统计平均，仅这个因素造成的距离不确定误差也都明显大于 mm 量级（10 ps 脉宽的脉冲的传播距离约为 3 mm）。

早期 LLR 工作中，Lick 天文台系统 B 使用的是脉宽为 60～80 ns 的红宝石激光，重复频率为 1/3 Hz，单脉冲能量约为 10 J。接收系统使用一个分光棱镜将信号分别送到两个光电倍增管，探测系统使用了一个双通道鉴别器对两个光电倍增管的输出信号进行整形和鉴别。由于每个脉冲只可能对应几个光电子的回波信号，鉴别器将接收到的脉冲信号拉伸到与发射脉冲相同的长度。信号的重叠是必要的，如果不进行鉴别，每个光电倍增管输出的光电子就可能与发射脉冲内的任意时刻联系起来[2]。2 个探测器只有同时接收到信号才能完成测距。

对于每次脉冲发射，一般只能获得一个光子的接收信号（很多次还接收不到），经过分光只可能有一个探测器探测到光子，使用两个探测器的必要性是什么？即使 2 个探测器都收到信号（这几乎是不可能的），又如何将接收信号拉伸到发射脉冲的长度？即使上一点能做到，又怎么通过重叠来判断接收时刻？

5.3 不同时刻对运动目标多次测距的统计结果与 LLR 的测距精度

LLR 单次测得的地月距离的不确定度无论如何都明显大于 mm 量级，各个台站的 LLR 工作者声称的 mm 精度都是通过一次连续有效测量获得的多次信号的统计平均得到的。根据统计分析中平均值的起伏方差与单次测量值起伏方差之间的关系，距离平均值的测量误差为

$$\sigma_{\mathrm{r}}=\sigma/\sqrt{N}, \tag{3}$$

式中：σ 为单次测量的均方根误差；N 为测量次数。

APOLLO 测距结果显示标准差为 293 ps，相当于精度约为 88 mm(单程精度约为 44 mm)[24]。从 44 mm 精度得到 1 mm 的精度，需要上千次的测量回波信号。研究团队在数据处理时将多次脉冲单光子回波的时序叠加构成的波形分布的半峰全宽(FWHM)定义为距离的起伏方差，如图 7 所示。图 7(a)是望远镜出口处放置的用于定标的角反射器的反射信号的时间序列及其拟合结果；图 7(b)是月面 LRRR 的回波信号的时间序列及其拟合结果，图中梯形线是月球平动导致的 LRRR 阵列引起的时间变化，拟合曲线是根据图 7(a)中的定标曲线和图 7(b)中梯形曲线的卷积而得到的。

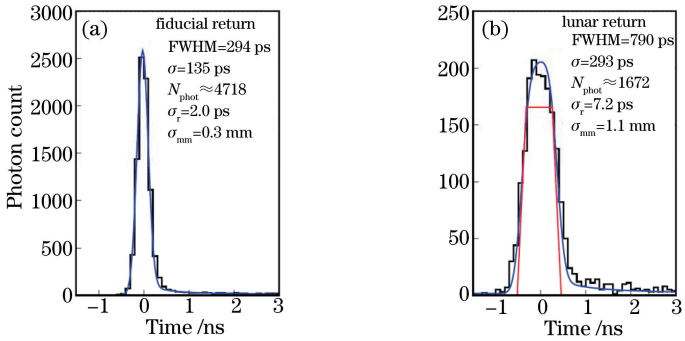


图 7 2010 年 3 月 23 日 APOLLO 测月数据的时序分布[24]。(a)从望远镜上定标角反射器上反射的参考信号；(b) Apollo 15 LRRR 上的反射信号

Fig. 7 Sequence distributions of APOLLO lunar laser ranging data on March 23, 2010. (a) Reference signal reflected by calibration angular reflector on telescope; (b) reflection signal of LRRR on Apollo 15

注意定标曲线的 FWHM 与 σ 的比值为 2.18，LLR 回波信号的 FWHM 与 σ 的比值为 2.70；正态分布的该比值约为 2.35。这说明出射脉冲信号的随机特性中包含了某种非随机信息，而接收回波信号的随机特性是否包含某种非随机信息需要解卷积扣除角反射器尺度的影响才能判断。脉冲的形状对接收信号的时间序列是否存在影响？接收信号门控设置是否有利于靠近地球一端的角反射器反射激光脉冲？当然，这么微小的距离不太可能改变接收信号的概率。如果是这样，每一个单元角反射器反射的回波信号的概率应该是相同的(激光光斑远大于 LRRR 阵列面积，每个单元角反射器接收的光通量应该相同)，那么图 8(b)中回波信号分布的峰值对应的距离(或统计平均值)究竟是地面望远镜到哪一个单元角反射器的距离呢？难道是中心那个吗？

问题是：从各种 LLR 系统的技术方案来看，地面接收的一个光子是从哪个小角反射器反射回来的是无法确定的；这和从确定的两点间进行多次测量并进行统计分析是一回事吗？

光子从脉冲中的哪个具体时刻发射以及从 LRRR 阵列中的哪个角反射器反射这两个问题的核心都涉及光的量子性质。按照量子理论的观点，如果理论上就不能确定光子的具体位置和时刻，如何进行高精度的测距？

总之，判断现在 LLR 测距的真正的精度是困难的[13]。

6 满月为什么不利于 LLR？

早期的 LLR 工作都不能在满月期间进行。性能卓越的 APOLLO 可以在满月期间工作，但信号强度降低为 1/10[21,25]。相关研究工作者猜测这可能是由 LRRR 前表面的灰尘所致[9]。这难道意味着月球表面极其稀薄的气体形成足以扬起灰尘的风或者太阳照射能够使月面的灰尘扬起并落到 LRRR 上面？

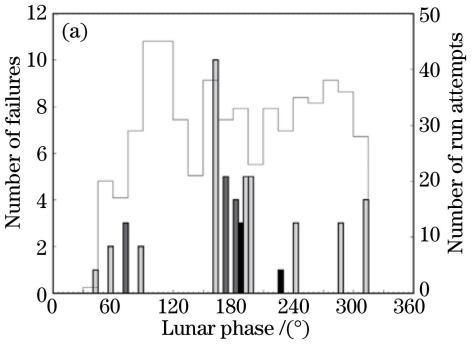
图 8(a)清楚展示了不同月相下的 APOLLO 对 Apollo 15 测月(从 2006-10-03 到 2009-06-15)实验次数与失败次数的分布[25]；图 8(b)给出了不同月相下的 APOLLO 测距结果分布[26]。可以清楚地看出：满月(月相角为 180°)时 LLR 测量失败的概率最大。统计结果表明，满月时 LLR 的成功率约为 33%，而其他时间 LLR 的成功率约为 90%。LLR 工作中采用了空间、光谱和时间滤波技术，大幅抑制了背景噪声，虽然满月时背景噪声比新月时大 3～5 倍，但回波信号强度依然约为噪声的 20 倍左右。但满月时 LLR 失败的概率远高于其他月相。

为什么满月时回波信号强而测量失败的概率依然最大呢？造成满月时 LLR 工作困难的原因至今不明，但 Battat 等认为满月的噪声肯定不是唯一的祸根。有关专家提出的一种可能原因是太阳照射 LRRR 导致其温度变化，从而引起角反射器结构的

变化，进而引起其反射性能的退化。

从 LLR 数据点的判断方法推测，是否太阳照射 LRRR 或月面产生的背景光与激光照射 LRRR 产生的回波信号不好区分？如果在激光不发射的情况下瞄准 LRRR 接收信号进行分析，或许能发现可能的原因。

法国 OCA 天文台是世界上唯一使用了红外激光进行LLR的平台，虽然他们认为使用红外激光比使用可见光的 LLR 测距效率提高了 8 倍，但各种月相下使用红外激光进行 LLR 的成功率分布与使用可见光相似，即满月时的失败率最高（虽然使用红外激光成功率高于可见光）。他们特别不解（至今也无答案）的是，L1 和 L2 的 LRRR 的反射性能对可见光的明显差异对于红外激光并没有出现[9]。



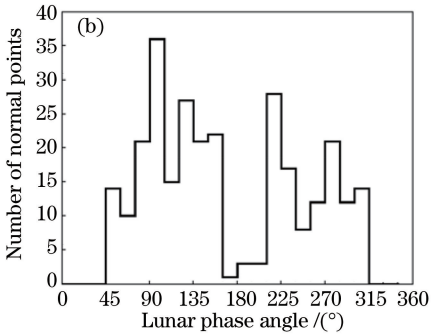


图 8 不同月相下的 APOLLO 测距结果分布以及 Apollo 15 测月实验次数与失败次数分布。(a) Apollo 15 测月（从 2006-10-03 到 2009-06-15）实验次数与失败次数的分布[25]；(b)不同月相下的 APOLLO 测距结果分布[26]

Fig. 8 APOLLO lunar ranging results under different phases of the Moon and numbers of experiments and failures of Apollo 15 lunar ranging. (a) Distribution of number of experiments and number of failures of Apollo 15 lunar ranging (from October 3, 2006 to June 15, 2009)[25]; (b) APOLLO lunar ranging results under different phases of the Moon[26]

参照沙漠地表的情况，近红外波段的反照率明显大于可见光波段的反照率：反照率在 0.53 μm 处约为 0.17，在 1.06 μm 处约为 0.28。科学家根据月面边缘同中心一样明亮的现象推测月表土壤具有蓬松的多孔结构，使得光照发生多次散射，从而使得其反射光照情况与比较光滑的球面不同（对于后者，反射光强应逐渐减弱）。我们看到的月球上显著的亮、暗区域反映了明显不同的反射率：静海区域的反射率为 5%～10%，高地反射率为 12%～18%。

另一方面，月球表面也存在空气，但极为稀薄，空气的浓度为 2×10^5 mol/cm^3，为地球大气浓度的 $1/10^{14}$，主要成分为氢、氦、氖、氩，氢、氖以及 90%的氦、10%的氩来自太阳风，其余的氦和氩来自辐射衰变。按照地球大气透过率的研究成果，这些气体在可见光与近红外波段没有显著的吸收特征。

以上月壤和空气的光学特性无法说明可见光和近红外光对于两个 LRRR 反射回波信号强度的差异。

7 地球大气对 LLR 及其测量精度的影响

测月数据的质量和数量都强烈依赖于大气条件和月相，高湿度、大气湍流和强背景噪声将使测月信号的探测非常困难[17]。地球大气对 LLR 的影响涉及激光在混浊和湍流大气中的传播效应，定量计算这些效应及其涉及的大气参数在 LLR 工作之初都已有分析探讨[27-30]。大气折射和散射引起的距离不确定度可能在 m 量级甚至更高，而大气湍流带来的随机起伏一般也在 mm 量级。随着 LLR 系统性能的不断提升，现在已认为地球大气是影响 LLR 测距精度的终极因素[30]。

仅由于 LLR 接收信号的极度微弱和 LRRR 尺度带来的信号不确定性，获取高精度的测距结果就要求一次有效测量必须得到上千次回波信号。在目前 LLR 的数据处理中，仅通过简单的统计分析获得平均值和方差，并以此作为最终结果和测量精度。大气湍流导致的信号强度起伏、激光束漂移等引起的测距信号的起伏是否对结果有影响尚未考虑。此外，大气湍流导致信号随机起伏，在有限样本的情况下其概率分布或许接近噪声的概率分布，因此在依据 Poisson 分布进行信号甄别时是否会把真实的 LRRR 回波信号作为噪声给剔除掉也未可知。

定量分析大气对 LLR 的影响仅靠整层大气折射率模型（依赖地面大气压力）、湍流模型（HV-5/7 等）是远远不够的，必须在 LLR 光路上实时获取大

气关键参数。而大气湍流的实时测量精度限制了湍流效应定量结果的精度，也无法保证 LLR 结果的高精度。

8 讨 论

Märki[19]分析了能进行常规测距工作的 4 个天文台的测距结果，发现实测信号的强度约为理论分析值的 1/1000。APOLLO 皆工作在很好的视宁度下，APOLLO 团队自己的分析也发现实测信号的强度与理论分析值存在巨大的差距，实测信号的强度为理论分析值的 1/24[16,21]。

激光回波信号明显小于理论预测值的原因可能是多方面的。APOLLO 团队的分析归因于角反射器性能的退化[16]。但 Marki 推断这些接收的信号都是来自月面本身的漫射，实际上就是说月面上的 LRRR 不起作用或者根本就不存在 LRRR。

为了澄清上述推测是否合理，在进行 LLR 时应该同时开展三项工作：1)LLR 望远镜偏离 LRRR 位置进行测距(不发射激光)，获取接收信号；2)LLR 望远镜偏离 LRRR 位置进行测距(发射激光)，获取接收信号；3)LLR 望远镜瞄准 LRRR 位置进行测距(不发射激光)，获取接收信号。将这三种情况下获得的信号与 LLR 望远镜瞄准 LRRR 位置进行测距(发射激光)的正常 LLR 信号进行系统对比分析，才能解答上述问题。

以往 LLR 测量时是否开展了上述三项工作并没有在 LLR 文献资料中提及，如果相关研究团队做了这些工作，所获得的相关结果无疑具有重要的学术意义和应用价值，应该公之于世。如果没有做过，则亡羊补牢，尚未为晚。只有澄清了这个问题，目前 LLR 研究的精力放在提高测距精度上才有意义。

LRRR 是中国探月工程嫦娥三号着陆器登月前月球上唯一在工作的人造设备，一直承担了具有重大科学意义的月地测距任务，按照 APOLLO 团队的研究结果可知，其反射效率的退化已经很明显，鉴于当前 LLR 测量信号极度微弱、精度受限和月面 LRRR 分布不理想等因素，学术界强烈呼吁在月面上重新放置新的高性能 LRRR 或转发器。中国探月工程也实现了玉兔月球车在月面上行走以及开展了其他科学试验，而且一些国家开始研制新的设备[3,31]，不知嫦娥着陆器为什么不携带新一代角反射器。

在 Apollo 11 登月 50 年之后，不知何时可以实现此愿望。

致 谢 中国科学院云南天文台熊耀恒研究员、李语强研究员，中山大学李明教授，中国科学院物理研究所魏志义研究员，中国科学院安徽光学精密机械研究所毛庆和研究员、陈结祥研究员、于磊研究员等专家在本文写作过程中给予指教和大力帮助，特致衷心感谢！

参 考 文 献

[1] Bender P L, Currie D G, Poultney S K, et al. The lunar laser ranging experiment[J]. Science, 1973, 182(4109): 229-238.

[2] Alley C O, Bender P L, Chang R F, et al. Laser ranging retroreflector[R]. Washington: NASA, 1969, 214: 163-182.

[3] Turyshev S G, Williams J G, Folkner W M, et al. Corner-cube retro-reflector instrument for advanced lunar laser ranging[J]. Experimental Astronomy, 2013, 36(1/2): 105-135.

[4] Silverberg E C. Operation and performance of a lunar laser ranging station[J]. Applied Optics, 1974, 13(3): 565-574.

[5] Gilpin D. Princeton, Apollo 11, and GPS technology: vital connections that changed the world[EB/OL]. (2019-07-03)[2020-05-25]. http://www.towntopics.com/wordpress/2019/07/03/princeton-apollo-11-and-gps-technology-vital-connections-that-changed-the-world/.

[6] Smullin L D, Fiocco G. Optical echoes from the moon[J]. Nature, 1962, 194(4835): 1267.

[7] Alley C O, Chang R F, Currie D G, et al. Laser ranging retro-reflector: continuing measurements and expected results[J]. Science, 1970, 167(3918): 458-460.

[8] Dickey J O, Bender P L, Faller J E, et al. Lunar laser ranging: a continuing legacy of the Apollo program[J]. Science, 1994, 265(5171): 482-490.

[9] Courde C, Torre J M, Samain E, et al. Lunar laser ranging in infrared at the Grasse laser station[J]. Astronomy & Astrophysics, 2017, 602: A90.

[10] Pan H R. Brief discussion about Moon landing conspiracy:40th Anniversary of Apollo 11 Moon landing[J]. Space International, 2009(11): 15-20.
潘厚任. 简谈“阿波罗”登月骗局之争：阿波罗-11 登月 40 周年[J]. 国际太空, 2009(11): 15-20.

[11] Hua Y, Huang C L. On the observation and research of lunar laser ranging[J]. Progress in Astronomy, 2012, 30(3): 378-393.
华阳, 黄乘利. 月球激光测距观测与研究进展[J]. 天文学进展, 2012, 30(3): 378-393.

[12] Li Y Q, Fu H L, Li R W, et al. Research and experiment of lunar laser ranging in Yunnan observatories [J]. Chinese Journal of Lasers, 2019, 46(1): 0104004.
李语强, 伏红林, 李荣旺, 等. 云南天文台月球激光测距研究与实验[J]. 中国激光, 2019, 46(1): 0104004.

[13] Samain E, Mangin J F, Veillet C, et al. Millimetric Lunar Laser Ranging at OCA (Observatoire de la Côte d'Azur)[J]. Astronomy and Astrophysics Supplement Series, 1998, 130(2): 235-244.

[14] Murphy T W, Jr, Adelberger E G, Battat J B R, et al. Laser ranging to the lost Lunokhod 1 reflector [J]. Icarus, 2011, 211(2): 1103-1108.

[15] Müller J, Murphy T W, Jr, Schreiber U, et al. Lunar Laser Ranging: a tool for general relativity, lunar geophysics and Earth science[J]. Journal of Geodesy, 2019, 93(11): 2195-2210.

[16] Murphy T W, Jr, Adelberger E G, Battat J B, et al. Absolute calibration of LLR signal: reflector health status [C] // Proceedings of the 15th International Workshop on Laser Ranging, Canberra: Australia, 2006.

[17] Jefferys W H, Ries J G. Bayesian analysis of lunar laser ranging data[M]//Statistical Challenges in Modern Astronomy II. New York: Springer, 1997: 49-65.

[18] Ricklefs R L, Shelus P J. Poisson filtering of laser ranging data[C]//Proceedings of the Eighth International Workshop on Laser Ranging Instrumentation, Washington: NASA, 1993, 3214: 9.

[19] Märki A. Lunar laser ranging: a review [EB/OL]. (2018-05-15) [2020-05-25]. https://www.researchgate.net/publication/292130269_Lunar_Laser_Ranging_A_Review[LinkOut].

[20] Abbot R I, Shelus P J, Mulholland J D, et al. Laser observations of the Moon: identification and construction of normal points for 1969–1971 [J]. The Astronomical Journal, 1973, 78: 784-793.

[21] Murphy T W. Lunar laser ranging: the millimeter challenge[J]. Reports on Progress in Physics, 2013, 76(7): 076901.

[22] Pellegrini S, Buller G S, Smith J M, et al. Laser-based distance measurement using picosecond resolution time-correlated single-photon counting [J]. Measurement Science and Technology, 2000, 11(6): 712-716.

[23] Murphy T W, Adelberger E G, Battat J B R, et al. The apache point observatory lunar laser-ranging operation: instrument description and first detections [J]. Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 2008, 120(863): 20-37.

[24] Murphy T W, Jr, Adelberger E G, Battat J R, et al. APOLLO: millimeter lunar laser ranging[J]. Classical and Quantum Gravity, 2012, 29(18): 184005.

[25] Murphy T W, Jr, Adelberger E G, Battat J B R, et al. Long-term degradation of optical devices on the Moon[J]. LCARUS, 2010, 208(1): 31-35.

[26] Battat J B R, Murphy T W, Jr, Adelberger E G, et al. The apache point observatory lunar laser-ranging operation (APOLLO): two years of millimeter-precision measurements of the earth-moon Range1 [J]. Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 2009, 121(875): 29-40.

[27] Gardner C S. Effects of random path fluctuations on the accuracy of laser ranging systems [J]. Applied Optics, 1976, 15(10): 2539-2545.

[28] Kral L, Prochazka I, Hamal K. Optical signal path delay fluctuations caused by atmospheric turbulence [J]. Optics Letters, 2005, 30(14): 1767-1769.

[29] Kral L, Prochazka I, Hamal K. Random fluctuations of optical signal path delay in the atmosphere [J]. Proceedings of SPIE, 2006, 6364: 63640M.

[30] Currie D, Prochazka I. Lunar laser ranging and limits due to the Earth's atmosphere [J]. Proceedings of SPIE, 2015, 9614: 96140C.

[31] Preston A, Merkowitz S. Next-generation hollow retroreflectors for lunar laser ranging[J]. Applied Optics, 2013, 52(36): 8676-8684.