

# 基于偏振相机的全斯托克斯偏振仪优化研究

黎海育<sup>1</sup>, 李抄<sup>2</sup>, 李校博<sup>1</sup>, 王辉<sup>3</sup>, 胡浩丰<sup>1\*</sup>, 刘铁根<sup>1</sup>

<sup>1</sup>天津大学精密仪器与光电子工程学院光电信息技术教育部重点实验室, 天津 300072;

<sup>2</sup>军事科学院系统工程研究院卫勤保障技术研究所, 天津 300160;

<sup>3</sup>河北师范大学物理科学与信息工程学院, 河北 石家庄 050024

**摘要** 通过在分焦平面(DoFP)偏振相机前置相位延迟器,可将线偏振斯托克斯矢量的测量拓展为全斯托克斯矢量(FSV)的测量。针对基于 DoFP 相机的 FSV 偏振仪,提出了两种分别利用矩阵分解和伪逆模型估算 FSV 的优化策略。针对不同的 FSV 估算模型,这两种优化策略在两次光强采集的条件下可最小化测算方差,从而实现了测量精度的最优化。特别地,利用 DoFP 相机固有的测量冗余特性,提出了基于两次光强采集的波片相位延迟量自标定解析解,该自标定算法可在实际应用中替代波片相位延迟量标定环节,同时为动态变化环境下的实时偏振测量提供技术支持。

**关键词** 物理光学; 偏振; 偏振仪; 分焦平面相机; 全斯托克斯矢量; 自标定

中图分类号 O438

文献标志码 A

doi: 10.3788/AOS202040.0326001

## Optimization of Polarization-Camera-Based Full Stokes Polarimeter

Li Haiyu<sup>1</sup>, Li Chao<sup>2</sup>, Li Xiaobo<sup>1</sup>, Wang Hui<sup>3</sup>, Hu Haofeng<sup>1\*</sup>, Liu Tiegen<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Key Laboratory of Opto-electronics Information Technology, Ministry of Education, School of Precision Instrument & Opto-electronics Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China;

<sup>2</sup>Institute of Medical Support Technology, Institute of System Engineering, Academy of Military Sciences, Tianjin 300160, China;

<sup>3</sup>College of Physics Science and Information Engineering, Hebei Normal University, Shijiazhuang, Hebei 050024, China

**Abstract** The measurement of linearly-polarized Stokes vector can be extended to the measurement of full Stokes vector (FSV) by placing a phase retarder, such as a waveplate, in front of the division-of-focal-plane (DoFP) polarization camera. In this study, we propose two optimization strategies to estimate FSV by matrix-decomposition and pseudo-inverse models for DoFP-camera-based FSV polarimeters. According to different FSV estimation models, these two strategies can minimize the measurement variance under the condition of two light-intensity acquisition, thereby optimizing the measurement precision. In particular, by using the inherent measurement redundancy of the DoFP camera, we also propose a self-calibrated analytical solution of the phase retardance of waveplate. This self-calibrated algorithm can replace the step of separate calibration of the phase retardance of waveplate in practical application and can provide technical support for real-time polarization measurement in dynamic environments.

**Key words** physical optics; polarization; polarimeter; division-of-focal-plane camera; full Stokes vector; self-calibration

**OCIS codes** 260.5430; 120.5410; 110.5405

## 1 引言

偏振作为光波的基本特性之一,可以提供光强信息和光谱信息等传统手段不能提供的物理特

性<sup>[1-2]</sup>。因此,基于偏振光学的测量和成像技术在众多领域被广泛应用,例如基于偏振度(DoP)或偏振角(AoP)信息可以实现散射介质环境下(雾霾、浑浊水下、烟尘等)的图像复原<sup>[3-5]</sup>,基于穆勒矩阵

收稿日期: 2019-09-17; 修回日期: 2019-10-09; 录用日期: 2019-10-21

基金项目: 国家自然科学基金(61775163)、中国科协青年人才托举工程项目(2017QNRC001)

\* E-mail: haofeng\_hu@tju.edu.cn

(Mueller matrix)成像可以实现生物组织病变的检测<sup>[6]</sup>,以及基于全斯托克斯矢量(FSV)可实现目标的识别和探测<sup>[7-8]</sup>等。

特别地,FSV作为一个4维矢量可完备地表征光场的偏振状态,因此针对FSV的成像和测量具有重要的理论研究价值和实际应用价值<sup>[9-10]</sup>。目前,测量FSV的偏振测量仪主要分以下几种:分时系统<sup>[11]</sup>、分振幅系统<sup>[12]</sup>、分焦平面系统<sup>[13]</sup>、孔径分割系统<sup>[14]</sup>等。随着微纳加工技术和光电探测芯片技术的快速发展,基于分焦平面(DoFP)系统的偏振相机因其在实时性测量、小型化等方面的独特优势<sup>[15]</sup>,近年来受到广泛关注。且与普通相机价格差距较小,被大量应用于金属表面检测<sup>[16]</sup>和生物组织检测<sup>[17]</sup>等领域。分焦平面偏振相机由两部分构成:一部分是由4个不同偏向的微光栅阵列构成的微偏振片阵列,其偏振方向分别为 $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ 和 $135^\circ$ ;另一部分为感光芯片。

基于DoFP偏振相机,只需要一次采集即可实现偏振光线偏振分量的测量。但是,必须引入相位延迟装置(例如液晶相位延迟器、波片等),且必须至少改变相位延迟器的偏振状态两次来获取对应偏振态下的光强图,才能实现FSV测量<sup>[15,17]</sup>。目前,国内外针对FSV偏振仪的测量策略优化主要是基于传统相机,在这种条件下最优的测量策略是要求传统相机的测量矩阵满足“球设计”(spherical design),即最优的测量矩阵对应的特征向量在庞加莱球(Poincare sphere)上可构成正多面体结构<sup>[18-19]</sup>。针对基于DoFP偏振相机的FSV偏振仪的估算策略的优化,尚未得到广泛关注。特别地,日本的Shibata等<sup>[20]</sup>提出了基于三次光强采集的估算策略,虽然可以实现FSV的测量和计算,但该方法并未考虑噪声的影响,非最优策略。在实际应用中,偏振测量受噪声干扰较大,噪声的存在将

会导致FSV的估算结果偏离真实值。此外,本文所展示的相位延迟器的相位延迟量和FSV各参量的同步测量仅限于三次光强采集的情况,尚未研究是否可通过更少的测量次数实现同步测量、提升测量效率。

本文基于DoFP偏振相机和单个可旋转波片,提出了两种不同模型下的FSV优化估算策略:优化策略一基于矩阵分解模型,当波片的相位延迟量为 $120^\circ$ 时,可实现FSV测算方差的最小化,同时可在水平方向(或竖直方向)将DoFP偏振相机的分辨率提升一倍;优化策略二基于伪逆模型,验证了基于常用的四分之一波片可实现最小测算方差估算,但与策略一相比,该策略对应的DoFP偏振相机的空间分辨率较低。最后,基于两次光强采集,本文还提出了利用DoFP偏振相机固有的测量冗余实现同步自标定波片相位延迟量的解析方法,一定程度上解决了传统偏振仪使用前必须标定相位延迟量的约束。

## 2 FSV 估算基本原理

本文以基于单个可旋转波片和DoFP偏振相机[图1(a)]的FSV偏振仪[图1(b)]为例,研究基于两次光强采集的波片旋转角度优化问题,旨在最小化FSV估算的方差,从而最优化FSV的测量精度。由于DoFP相机的微偏振片阵列可产生4种不同的偏振解析状态,因此通过两次改变波片的旋转角度,可获得8个对应于不同偏振解析状态的光强值<sup>[1-2]</sup>,可表示为

$$\mathbf{I} = \mathbf{W}_{8 \times 4} \cdot \mathbf{S}, \quad (1)$$

式中: $\mathbf{I} = \{I_{ij} | i=1,2; j=1,2,3,4\}$ 表示测量光强; $\mathbf{S} = [s_0, s_1, s_2, s_3]^T$ 表示待测的全斯托克斯矢量;测量矩阵 $\mathbf{W}_{8 \times 4}$ 的各行向量元素 $(1, \omega_{1ij}, \omega_{2ij}, \omega_{3ij})$ 满足

$$\begin{cases} \omega_{1ij} = \cos 2\varphi_j \cdot (\cos^2 2\theta_i + \cos \delta \sin^2 2\theta_i) + \sin 2\varphi_j \cdot (1 - \cos \delta) \sin 2\theta_i \cos 2\theta_i \\ \omega_{2ij} = \cos 2\varphi_j \cdot (1 - \cos \delta) \sin 2\theta_i \cos 2\theta_i + \sin 2\varphi_j \cdot (\sin^2 2\theta_i + \cos \delta \cos^2 2\theta_i), \\ \omega_{3ij} = -\cos 2\varphi_j \cdot \sin \delta \sin 2\theta_i + \sin 2\varphi_j \cdot \sin \delta \cos 2\theta_i \end{cases} \quad (2)$$

式中: $\delta$ 和 $\theta_i$ 分别表示波片的相位延迟量和第 $i$ 次旋转改变的波片角度; $\varphi_j$ 表示偏振阵列的4个偏振角度,分别为 $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ 和 $135^\circ$ 。

将微偏振片阵列的4个角度代入(2)式,可得测量矩阵 $\mathbf{W}_{8 \times 4}$ 为

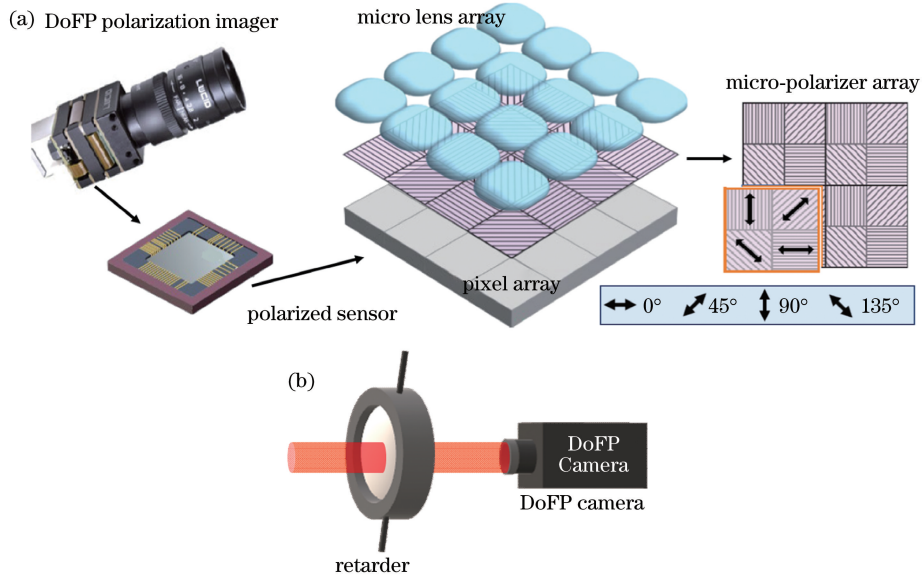


图 1 偏振相机及 FSV 偏振仪。(a) DoFP 偏振相机结构图 (以 PHX050S-PC, LUCID<sup>®</sup> 为例);(b) 基于 DoFP 相机和可旋转相位延迟器的全斯托克斯偏振测量仪

Fig. 1 Polarization camera and FSV polarimeter. (a) Structure of DoFP polarization image (taking PHX050S-PC, LUCID<sup>®</sup> as an example); (b) schematic of full Stokes polarimeter based on DoFP camera and rotatable phase retarder

$$\mathbf{W}_{8 \times 4} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos^2 2\theta_1 + \cos \delta \sin^2 2\theta_1 & (1 - \cos \delta) \sin 2\theta_1 \cos 2\theta_1 & -\sin \delta \sin 2\theta_1 \\ 1 & -(\cos^2 2\theta_1 + \cos \delta \sin^2 2\theta_1) & -(1 - \cos \delta) \sin 2\theta_1 \cos 2\theta_1 & \sin \delta \sin 2\theta_1 \\ 1 & (1 - \cos \delta) \sin 2\theta_1 \cos 2\theta_1 & (\sin^2 2\theta_1 + \cos \delta \cos^2 2\theta_1) & \sin \delta \cos 2\theta_1 \\ 1 & -(1 - \cos \delta) \sin 2\theta_1 \cos 2\theta_1 & -(\sin^2 2\theta_1 + \cos \delta \cos^2 2\theta_1) & -\sin \delta \cos 2\theta_1 \\ 1 & \cos^2 2\theta_2 + \cos \delta \sin^2 2\theta_2 & (1 - \cos \delta) \sin 2\theta_2 \cos 2\theta_2 & -\sin \delta \sin 2\theta_2 \\ 1 & -(\cos^2 2\theta_2 + \cos \delta \sin^2 2\theta_2) & -(1 - \cos \delta) \sin 2\theta_2 \cos 2\theta_2 & \sin \delta \sin 2\theta_2 \\ 1 & (1 - \cos \delta) \sin 2\theta_2 \cos 2\theta_2 & (\sin^2 2\theta_2 + \cos \delta \cos^2 2\theta_2) & \sin \delta \cos 2\theta_2 \\ 1 & -(1 - \cos \delta) \sin 2\theta_2 \cos 2\theta_2 & -(\sin^2 2\theta_2 + \cos \delta \cos^2 2\theta_2) & -\sin \delta \cos 2\theta_2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

根据(1)式和(3)式,可通过反解光强值估算得到待测的 FSV。反解光强的估算模型有很多,当测量矩阵为方阵时,可直接通过矩阵求逆运算实现 FSV 估算,当测量矩阵为非方阵时,可通过矩阵伪逆运算实现 FSV 估算<sup>[19]</sup>。考虑到基于 DoFP 偏振相机的 FSV 偏振仪的测量矩阵具有结构特殊性,本文提出以下两种分别基于矩阵分解和伪逆运算的

FSV 估算模型。

### 2.1 优化模型一:基于测量矩阵分解的 FSV 估算模型

不难证明(3)式中的测量矩阵  $\mathbf{W}_{8 \times 4}$  的秩满足  $\text{Tr}(\mathbf{W}_{8 \times 4})=4$ ,是列满秩的,因此可以解析出全部 4 个 FSV 参数。更有意义的是,该测量矩阵的各个行向量具有结构相似性,且其拆解得到的两个子矩阵也满足列满秩,即

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{W}_{4 \times 4-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos^2 2\theta_1 + \cos \delta \sin^2 2\theta_1 & (1 - \cos \delta) \sin 2\theta_1 \cos 2\theta_1 & -\sin \delta \sin 2\theta_1 \\ 1 & \cos^2 2\theta_2 + \cos \delta \sin^2 2\theta_2 & (1 - \cos \delta) \sin 2\theta_2 \cos 2\theta_2 & -\sin \delta \sin 2\theta_2 \\ 1 & (1 - \cos \delta) \sin 2\theta_1 \cos 2\theta_1 & (\sin^2 2\theta_1 + \cos \delta \cos^2 2\theta_1) & \sin \delta \cos 2\theta_1 \\ 1 & (1 - \cos \delta) \sin 2\theta_2 \cos 2\theta_2 & (\sin^2 2\theta_2 + \cos \delta \cos^2 2\theta_2) & \sin \delta \cos 2\theta_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{W}_{4 \times 4-2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -(\cos^2 2\theta_1 + \cos \delta \sin^2 2\theta_1) & -(1 - \cos \delta) \sin 2\theta_1 \cos 2\theta_1 & \sin \delta \sin 2\theta_1 \\ 1 & -(\cos^2 2\theta_2 + \cos \delta \sin^2 2\theta_2) & -(1 - \cos \delta) \sin 2\theta_2 \cos 2\theta_2 & \sin \delta \sin 2\theta_2 \\ 1 & -(1 - \cos \delta) \sin 2\theta_1 \cos 2\theta_1 & -(\sin^2 2\theta_1 + \cos \delta \cos^2 2\theta_1) & -\sin \delta \cos 2\theta_1 \\ 1 & -(1 - \cos \delta) \sin 2\theta_2 \cos 2\theta_2 & -(\sin^2 2\theta_2 + \cos \delta \cos^2 2\theta_2) & -\sin \delta \cos 2\theta_2 \end{bmatrix} \end{array} \right., \quad (4)$$

满足  $\text{Tr}(\mathbf{W}_{4 \times 4-k'}) = 4$ ,  $k' \in \{1, 2\}$ 。其中  $\mathbf{W}_{4 \times 4-1}$  为  $0^\circ$  和  $45^\circ$  微偏振片对应的测量矩阵,  $\mathbf{W}_{4 \times 4-2}$  为  $90^\circ$  和  $135^\circ$  微偏振片对应的测量矩阵。因此, 理论上, 测量矩阵  $\mathbf{W}_{8 \times 4}$  可以拆分成两个子矩阵, 分别实现 FSV 的估算。换言之, 可以将两次测量得到的 8 次光强值分为两个单独的光强组, 分别进行反解运算过程, 即

$$\begin{cases} \mathbf{I}_1 = \mathbf{W}_{4 \times 4-1} \cdot \mathbf{S} \\ \mathbf{I}_2 = \mathbf{W}_{4 \times 4-2} \cdot \mathbf{S} \end{cases} \quad (5)$$

这两个子测量矩阵均为方阵, 因此均可直接通过矩阵求逆运算实现 FSV 的估算, 计算式为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{S}}_1 = [\mathbf{W}_{4 \times 4-1}]^{-1} \cdot \mathbf{I}_1 \\ \hat{\mathbf{S}}_2 = [\mathbf{W}_{4 \times 4-2}]^{-1} \cdot \mathbf{I}_2 \end{cases} \quad (6)$$

式中: “-1” 表示矩阵的逆;  $\hat{\mathbf{S}}_1$  和  $\hat{\mathbf{S}}_2$  表示两个子测量矩阵反解得到的 FSV 估算值。根据(6)式可以同时获得 FSV 的两个估算值  $\hat{\mathbf{S}}_1$  和  $\hat{\mathbf{S}}_2$ 。由于两个子矩阵对应的偏振解析态是完全独立的, 这两个估算过程也是基于完全独立、不重合的光强组  $\{\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2\}$ , 因此可通过求平均运算得到 FSV 的估算值:

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{\hat{\mathbf{S}}_1 + \hat{\mathbf{S}}_2}{2} \quad (7)$$

从而进一步地提升测量精度, 降低测量方差。在光强  $\mathbf{I}$  的采集过程中, 受方差大小为  $\sigma^2$  的加性噪声影响, 每个 FSV 的 4 个参数  $(s_0, s_1, s_2, s_3)$  的测算方差为

$$\gamma_i = \sigma^2 \cdot \{[\mathbf{W}_{4 \times 4-i} \cdot (\mathbf{W}_{4 \times 4-i})^T]^{-1}\}_{kk}, i \in [0, 3], \quad (8)$$

式中,  $\{\cdot\}_{kk}$  表示矩阵的第  $k$  个主对角元素。一般情况下, 4 个 FSV 参数  $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$  的估算权重是相同的, 因此这 4 个参数对应的估算方差对 FSV 整体估算精度的评价亦是等同的, 引入 EWV (Equally Weighted Variance,  $V_{EW}$ ) 作为衡量 FSV 估算性能 (或方差) 的指标<sup>[18, 21]</sup>, 表达式为

$$V_{EW} = \sum_{i=0}^3 \gamma_i = \sigma^2 \cdot \sum_{k=1}^4 \{[\mathbf{W}_{4 \times 4-i} \cdot (\mathbf{W}_{4 \times 4-1})^T]^{-1}\}_{kk} \quad (9)$$

因此, 最优的 FSV 估算策略对应的最优波片相位延迟量  $\delta_{opt}$  及两次旋转角度  $(\theta_{1-opt}, \theta_{2-opt})$  应最小化 EWV:

$$(\delta_{opt}, \theta_{1-opt}, \theta_{2-opt})_i = \arg \min_{\delta, \theta_1, \theta_2} \{V_{EW}\} \quad (10)$$

事实上, 子测量矩阵  $\mathbf{W}_{4 \times 4-1}$  和  $\mathbf{W}_{4 \times 4-2}$  唯一的区

别在于后三列的符号正好相反, 其对应的最优解和最优值均相同。因此, 后续的优化问题研究只针对其中之一进行, 且有

$$V_{EW}[\hat{\mathbf{S}}] = V_{EW} \left[ \frac{\hat{\mathbf{S}}_1 + \hat{\mathbf{S}}_2}{2} \right] = \frac{1}{2} V_{EW1} = \frac{1}{2} V_{EW2}, \quad (11)$$

式中:  $V_{EW}[\cdot]$  表示计算方差。可通过全局优化方法得到(10)式的最优化数值解。本文采用 SCE (Shuffled Complex Evolution) 全局最优化方法, 该方法通过生成大量不同的偏振分析态, 模拟计算不同状态下的 EWV 值, 并通过全局评价体系实现全局最优解的获取, 相比于其他算法, 该算法鲁棒性更强, 更容易快速收敛到全局解<sup>[22-23]</sup>。

数值搜寻结果表明, (10) 式中优化问题的最优解满足:

1) 波片的最优相位延迟量为  $120^\circ$ , 即为三分之一波片;

2) 波片的最优旋转角度策略有两组:  $(49.87^\circ, 175.13^\circ)$  和  $(139.87^\circ, 85.13^\circ)$ , 实际上, 这两组波片角度具备的特征是  $139.87^\circ = 49.87^\circ + 90^\circ$ ,  $175.13^\circ = 85.13^\circ + 90^\circ$ ;

3) 每个 FSV 参数的测算方差为  $\sigma^2, 3.5\sigma^2, 3.5\sigma^2, 3\sigma^2$ , 总测算方差即 EWV 值为  $11\sigma^2$ 。

此外, 由于可同时计算得到 FSV 的两个估算值, 因此根据(11)式, 估算结果对应的 EWV 值可通过对这两个估算值求平均值来求得, 从而方差降低一半, 即  $5.5\sigma^2$ 。

测算方差 EWV 随波片相位延迟量的变化如图 2(a) 中虚线所示。为更清晰描述其对应关系, 图 2(a) 中的纵坐标为 EWV 取对数运算以后的值。由图 2(a) 可以看出, EWV 值随波片的相位延迟量的增加先减小再增大, 在  $120^\circ$  处取得最小值。此外, 另一种常用的评价指标条件数 (CN)<sup>[19]</sup> 随波片相位延迟量的变化曲线如图 2(a) 中实线所示。可以看出, 两种不同指标体系下的最优解重合, 均为  $120^\circ$ , 因此可以认为  $120^\circ$  即为 FSV 估算模型一所对应的最优相位延迟量。值得注意的是, 相比于条件数指标, 评价指标 EWV 在最优延迟量  $\delta = 120^\circ$  处的变化比较平缓, 即当延迟量在  $120^\circ$  附近时, 针对 FSV 的估算对 EWV 不敏感, 鲁棒性较好。

在波片相位延迟量取得最优值  $\delta = 120^\circ$  的情况下, EWV 与波片两次旋转角度  $(\theta_1, \theta_2)$  的关系如图 2(b) 所示。其中色彩越深表明 FSV 对应的 EWV 值越大, 越浅表明 FSV 估算对应的 EWV 值越小。

为更好地展现 EWV 取得最小值时,将图 2(b)中的极值点单独提取出来,如图 2(c)所示,当波片的两个旋转角度取  $(49.84^\circ, 175.13^\circ)$ ,  $(139.87^\circ, 85.13^\circ)$ ,  $(175.13^\circ, 49.87^\circ)$  和  $(85.13^\circ, 139.87^\circ)$  时,EWV 取得最小值  $11\sigma^2$ 。

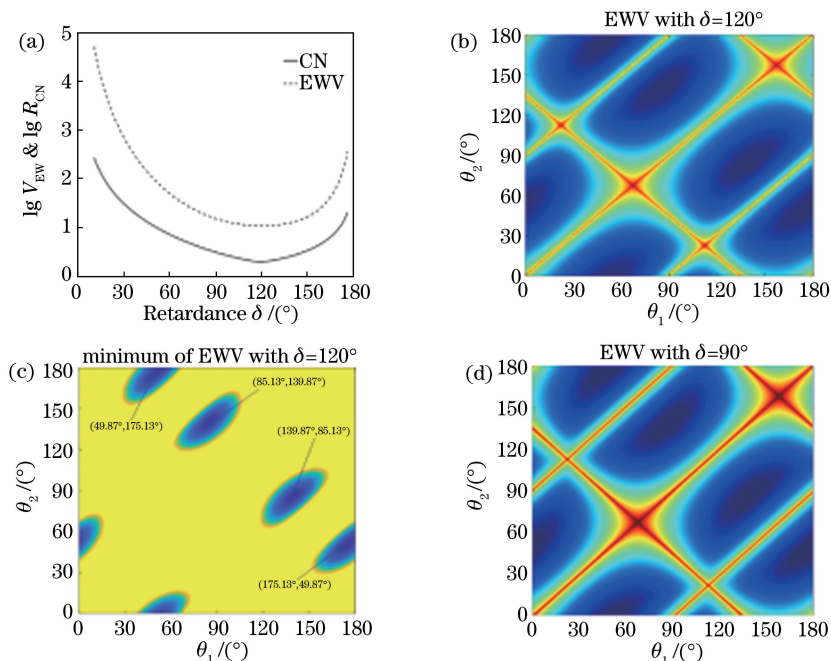


图 2 EWV 优化图。(a)EWV(取对数)和条件数与波片的相位延迟量之间的关系;(b)当相位延迟量为  $120^\circ$  时,EWV 与可旋转相位延迟器两次旋转角度  $(\theta_1, \theta_2)$  的关系;(c)相位延迟量为  $120^\circ$  时,EWV 取最小值时对应的最优解;(d)当相位延迟量为  $90^\circ$  时,EWV 与可旋转相位延迟器(四分之一波片)两次旋转角度  $(\theta_1, \theta_2)$  的关系

Fig. 2 Optimization of EWV. (a) EWV value (logarithm) and condition number (CN) as functions of phase retardance  $\delta$  of waveplate; (b) EWV value as a function of two rotation angles  $(\theta_1, \theta_2)$  of rotatable phase retarder with phase retardance  $\delta = 120^\circ$ ; (c) optimal solutions corresponding to minimum of EWV with phase retardance  $\delta = 120^\circ$ ; (d) EWV value as a function of two rotation angles  $(\theta_1, \theta_2)$  of rotatable phase retarder (quarter-wave plate) with phase retardance  $\delta = 90^\circ$

由于该模型中的两次估计分别是针对  $0^\circ$  和  $45^\circ, 90^\circ$  和  $135^\circ$  两个部分独立实现的,结合 DoFP 偏振相机的微偏振片阵列的排列方式[图 1(a)],该估算模型实现了竖直方向上  $2 \text{ pixel} \times 1 \text{ pixel}$ (两种均可)的分辨率,与  $2 \text{ pixel} \times 2 \text{ pixel}$  单元相比,  $2 \text{ pixel} \times 1 \text{ pixel}$  的分辨率在 FSV 估算测量功能上提升了 1 倍。

由于实际中常用的波片是相位延迟量为  $90^\circ$  的四分之一波片,因此有必要计算波片延迟量为  $90^\circ$  时的 FSV 测算方差。实际上,这种情况下的延迟量固定为  $90^\circ$ ,即不需再对其进行优化。其他计算方式与最优延迟量为  $120^\circ$  时的一致。延迟量为  $90^\circ$  时对应的 EWV 值关于两次旋转角度的变化情况如图 2(d)所示。延迟量为  $90^\circ$  时的变化趋势和  $120^\circ$  时基本一致,均存在 4 组极大值点和 4 组极小值点。特别地,从图 2(d)中提取其 EWV 最小值点对应的最优旋转角度组合,如表 1 所示,EWV

最小值为  $15.32\sigma^2$ ,该值相比于延迟量为  $120^\circ$  时的最优解,测算方差增大了  $34.75\%$ 。这是因为相比于同时优化相位延迟量的情况,该优化问题对应的优化自由度降低,导致方差即 EWV 值增加,但在一个方向上仍然可以将空间分辨率提升一倍。实际上,对比表 1 和图 2(c)中的最优解可看出,最优解的位置虽不同但差异较小,可间接说明对于不同的波片相位延迟量,最优解的鲁棒性较好。因此,实际应用过程中可根据测量精度需求选择是否使用四分之一波片。

表 1 波片相位延迟量为  $90^\circ$  时的最优化旋转策略

Table 1 Optimal rotation strategy when phase retardance of waveplate is  $90^\circ$

Rotation angle / ( $^\circ$ )	1	2	3	4
$\theta_1$	176.8	86.7	138.2	176.8
$\theta_2$	48.3	138.2	86.7	48.3

## 2.2 优化模型二:基于伪逆运算的 FSV 估算模型

在不考虑提升 DoFP 偏振相机的空间分辨率大小的前提下,模型二提出了基于矩阵的 Moore-Penrose 伪逆<sup>[24]</sup>的 FSV 估算策略。该模型下,FSV 可由

$$\mathbf{S} = [\mathbf{W}_{8 \times 4}]^+ \cdot \mathbf{I}, \quad (12)$$

估算得到。式中:“+”表示矩阵 Moore-Penrose 伪逆,计算式为

$$[\mathbf{W}_{8 \times 4}]^+ = [\mathbf{W}_{8 \times 4}^T \mathbf{W}_{8 \times 4}]^{-1} \mathbf{W}_{8 \times 4}^T. \quad (13)$$

相比于模型一中的矩阵求逆运算,伪逆运算适用于任意维度的测量矩阵。因此,待估计 FSV 各分参数的测算方差为

$$\gamma_k = \{ \{ [\mathbf{W}_{8 \times 4}]^+ \}^T \cdot [\mathbf{W}_{8 \times 4}]^+ \}_{kk} =$$

$$[\mathbf{W}_{8 \times 4}]^T \cdot \mathbf{W}_{8 \times 4}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4(\sin^2 2\theta_1 + \sin^2 2\theta_2)}{1 - \cos 4(\theta_1 - \theta_2)} & \frac{2\sin 4\theta_1 + 2\sin 4\theta_2}{\cos 4(\theta_1 - \theta_2) - 1} & 0 \\ 0 & \frac{2\sin 4\theta_1 + 2\sin 4\theta_2}{\cos 4(\theta_1 - \theta_2) - 1} & \frac{4(\cos^2 2\theta_1 + \cos^2 2\theta_2)}{1 - \cos 4(\theta_1 - \theta_2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

因此,EWV 可表示为

$$V_{EW} = \sigma^2 \cdot \text{Tr}\{[\mathbf{W}_{8 \times 4}]^T \cdot \mathbf{W}_{8 \times 4}]^{-1}\} = \left[ \frac{3}{2} + \frac{8}{1 - \cos 4(\theta_1 - \theta_2)} \right] \cdot \sigma^2. \quad (18)$$

显然,当四分之一波片的两次旋转角满足 $|\theta_1 - \theta_2| = 45^\circ$ 时,EWV 取得最小值 $5.5\sigma^2$ 。且各 FSV 参数的测算方差分别为 $\frac{1}{2}\sigma^2, 2\sigma^2, 2\sigma^2, 1\sigma^2$ 。此外,在最优解附近,(18)式中的分母部分 $\cos 4(\theta_1 - \theta_2) = \cos 180^\circ$ ,余弦函数在 $180^\circ$ 附近变化较平稳,说明该最优解对 EWV 不敏感,具有较好的鲁棒性。

该模型的优势在于仅使用常用的四分之一波片即可实现最小 EWV 估计。但是与优化模型一相比,其空间分辨率不能提高,仍为 $2 \text{ pixel} \times 2 \text{ pixel}$ 。

## 3 波片延迟量同步自标定

需要注意的是,FSV 测量的自由度是 4,而两次 DoFP 偏振相机采集共获得 8 组光强,因此从估算模型对应解空间维度的角度出发可知,基于 DoFP 偏振相机的偏振仪具有内在的测量冗余性。理论上,测量冗余的存在可以提供更多的待测参数之间的关系,从而实现更大自由度的参数估算。因此,可利用该测量的冗余性实现其他参数的同步估算和测

$$\{ [\mathbf{W}_{8 \times 4}]^T \cdot \mathbf{W}_{8 \times 4}]^{-1} \}_{kk}. \quad (14)$$

式中: $\{ \cdot \}_{kk}$ 表示矩阵 $\{ [\mathbf{W}_{8 \times 4}]^+ \}^T \cdot [\mathbf{W}_{8 \times 4}]^+$ 的第 $k$ 行第 $k$ 列的元素。

总测算方差 EWV 为

$$V_{EW} = \sum_{i=0}^3 \gamma_i = \text{Tr}\{[\mathbf{W}_{8 \times 4}]^T \cdot \mathbf{W}_{8 \times 4}]^{-1}\}. \quad (15)$$

最优的 FSV 估算策略对应的最优波片相位延迟量 $\delta_{\text{opt}}$ 及两次旋转角度 $(\theta_{1-\text{opt}}, \theta_{2-\text{opt}})$ 应满足 EWV 值最小,即

$$(\delta_{\text{opt}}, \theta_{1-\text{opt}}, \theta_{2-\text{opt}})_i = \arg \min_{\delta, \theta_1, \theta_2} \{V_{EW}\}. \quad (16)$$

当波片为常用的四分之一波片(即波片延迟量 $\delta = 90^\circ$ 固定,不再作为参变量优化)时,有

量,例如波片的相位延迟量。日本的 Shibata 等<sup>[20]</sup>虽然提出了基于三次 DoFP 相机光强采集的相位延迟量同步自标定,但其对应的测量总光强数为 12,测量冗余量过高。本文验证了仅需两次 DoFP 光强采集即可实现相同的功能,在实际应用中可降低测量成本,提高测量和同步自标定的速度。

以波片的两次旋转角度为 $0^\circ$ 和 $45^\circ$ 为例,DoFP 获取的 8 组偏振解析态对应的光强值分别为

$$\begin{cases} I_0 = \frac{1}{2}(s_0 + s_1), I_1 = \frac{1}{2}[s_0 + (s_2 \cos \delta + s_3 \sin \delta)] \\ I_2 = \frac{1}{2}(s_0 - s_1), I_3 = \frac{1}{2}[s_0 - (s_2 \cos \delta + s_3 \sin \delta)] \\ I_4 = \frac{1}{2}[s_0 + (s_1 \cos \delta - s_3 \sin \delta)], I_5 = \frac{1}{2}(s_0 + s_2) \\ I_6 = \frac{1}{2}[s_0 - (s_1 \cos \delta - s_3 \sin \delta)], I_7 = \frac{1}{2}(s_0 - s_2) \end{cases}. \quad (19)$$

因此,估算得到 FSV:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{I_0 + I_2} \begin{bmatrix} I_0 + I_2 \\ I_0 - I_2 \\ I_5 - I_7 \\ \frac{I_1 - I_3 - (I_5 - I_7) \cos \delta}{\sin \delta} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

同时,估算出波片的相位延迟量,可表示为

$$\delta = \arccos\left(\frac{I_4 - I_3}{I_5 - I_2}\right) = \arccos\left(\frac{I_1 - I_6}{I_5 - I_2}\right). \quad (21)$$

根据(20)式和(21)式可知,该方法可在实现FSV估算的同时,实现波片相位延迟量的同步估算,即标定,本文称该性质为“同步自标定”。但是,当 $I_5 - I_2 = 0$ 即待测光的FSV满足 $s_2 + s_1 = 0$ 时,自标定性质失效,且当待标定波片的相位延迟量为 $180^\circ$ 时,针对FSV中 $s_3$ 分量的估算失效。

“自标定”在实际应用中具有重要的意义。因为传统的偏振仪在应用前对波片相位延迟量进行标定是实现高精度测量的必备环节。“自标定”性质的存在一方面省去了该环节,节省了实验成本,降低了实验难度<sup>[2]</sup>;另一方面,在一些动态变化的环境中,波片的相位延迟量不是固定不变的,往往受环境温度等因素的影响<sup>[20]</sup>。“自标定”为环境变化情况下实施动态、准确的偏振测量和成像提供了保障。

## 4 结 论

基于DoFP偏振相机的FSV偏振测量仪可通过两次改变前置可调相位延迟器(例如波片等)的状态(例如波片的旋转角度等),实现FSV的测算。基于不同的FSV测算模型提出了两种不同的优化策略:其一,基于测量矩阵分解并利用一个 $120^\circ$ 相位延迟的波片实现了测算方差的最小化,且该优化策略使DoFP相机在FSV测量方面的空间分辨能力提升了1倍;其二,利用伪逆估算模型和常用的四分之一波片实现了与模型一相同的最小测算方差,为实际应用提供了理论支持,但缺点是其对应的优化策略不能提升空间分辨率。最后利用DoFP的固有测量冗余特性,提出了仅通过DoFP进行两次光强采集即可实现波片相位延迟量的同步自标定,克服了传统偏振仪需要提前、单独标定波片相位延迟量的缺点,同时为动态变化环境下的实时偏振应用提供了技术支撑。

所提出的优化策略仅针对基于单个相位延迟器(波片)的偏振仪结构。事实上,多个相位延迟器串联可进一步提升FSV测量和估算精度,所提出的优化模型和方法同样适用于该类型的FSV偏振仪结构。另外,所提出的同步自标定仅针对相位延迟量,但在实际应用中,对波片旋转角度的标定同样重要,理论上,可通过增加测量次数实现旋转角的同步自标定。上述两个问题均具有重要的研究意义和价值,可作为后续工作展开。

## 参 考 文 献

- [1] Liao Y B. Polarization of optics[M]. Beijing: Science Press, 2003.  
廖延彪. 偏振光学[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [2] Goldstein D. Polarized light, revised and expanded [M]. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2003.
- [3] Li X B, Hu H F, Zhao L, et al. Polarimetric image recovery method combining histogram stretching for underwater imaging[J]. Scientific Reports, 2018, 8: 12430.
- [4] Liang J, Ju H J, Zhang W F, et al. Review of optical polarimetric dehazing technique [J]. Acta Optica Sinica, 2017, 37(4): 0400001.  
梁健, 巨海娟, 张文飞, 等. 偏振光学成像去雾技术综述[J]. 光学学报, 2017, 37(4): 0400001.
- [5] Hu H F, Li X B, Liu T G. Recent advances in underwater image restoration technique based on polarimetric imaging [J]. Infrared and Laser Engineering, 2019, 48(6): 0603006.  
胡浩丰, 李校博, 刘铁根. 基于偏振成像的水下图像复原技术研究最新进展[J]. 红外与激光工程, 2019, 48(6): 0603006.
- [6] Morimoto A, Matsunaga S, Kurihara D, et al. Visualization of mitotic HeLa cells by advanced polarized light microscopy[J]. Micron, 2008, 39(5): 635-638.
- [7] Tyo J S, Goldstein D L, Chenault D B, et al. Review of passive imaging polarimetry for remote sensing applications [J]. Applied Optics, 2006, 45 (22): 5453-5469.
- [8] Kanseri B, Rath S, Kandpal H C. Direct determination of the generalized Stokes parameters from the usual Stokes parameters [J]. Optics Letters, 2009, 34(6): 719-721.
- [9] Berry H G, Gabrielse G, Livingston A E. Measurement of the Stokes parameters of light [J]. Applied Optics, 1977, 16(12): 3200-3205.
- [10] Kihara T. Measurement method of Stokes parameters using a quarter-wave plate with phase difference errors[J]. Applied Optics, 2011, 50(17): 2582-2587.
- [11] Wang Y H, Zheng C L, Zhao Z T. Multi-point calibration method based on Stokes ellipsometry system [J]. Chinese Journal of Lasers, 2012, 39 (11): 1108013.  
王勇辉, 郑春龙, 赵振堂. 基于斯托克斯椭偏测量系统的多点定标法 [J]. 中国激光, 2012, 39(11): 1108013.
- [12] Du X L, Dai J M. Review of division-of-amplitude photo polarimeter [J]. Acta Metrologica Sinica,

- 2006, 27(4): 325-330.
- 杜西亮, 戴景民. 分振幅光偏振测量仪[J]. 计量学报, 2006, 27(4): 325-330.
- [13] Tyo J S, LaCasse C F, Ratliff B M. Total elimination of sampling errors in polarization imagery obtained with integrated microgrid polarimeters [J]. Optics Letters, 2009, 34(20): 3187-3189.
- [14] He H C. Study on optical system of simultaneous and complete polarization imaging[D]. Suzhou: Soochow University, 2014: 17-42.  
贺虎成. 分孔径同时偏振成像光学系统的研究[D]. 苏州: 苏州大学, 2014: 17-42.
- [15] Zhang Z G, Dong F L, Zhang Q C, et al. Fabrication of pixelated polarizer array and its application in polarization enhancement [J]. Acta Physica Sinica, 2014, 63(18): 184204.  
张志刚, 董凤良, 张青川, 等. 像素偏振片阵列制备及其在偏振图像增强中的应用[J]. 物理学报, 2014, 63(18): 184204.
- [16] Gruev V, Perkins R, York T. Material detection with a CCD polarization imager[C]//2010 IEEE 39th Applied Imagery Pattern Recognition Workshop (AIPR), October 13-15, 2010, Washington, DC, USA. New York: IEEE, 2010: 11973151.
- [17] Qi J, He C, Elson D S. Real time complete Stokes polarimetric imager based on a linear polarizer array camera for tissue polarimetric imaging [J]. Biomedical Optics Express, 2017, 8(11): 4933-4946.
- [18] Goudail F. Equalized estimation of Stokes parameters in the presence of Poisson noise for any number of polarization analysis states[J]. Optics Letters, 2016, 41(24): 5772-5775.
- [19] Foreman M R, Favaro A, Aiello A. Optimal frames for polarization state reconstruction [J]. Physical Review Letters, 2015, 115(26): 263901.
- [20] Shibata S, Hagen N, Otani Y. Robust full Stokes imaging polarimeter with dynamic calibration [J]. Optics Letters, 2019, 44(4): 891-894.
- [21] Li X B, Goudail F, Hu H F, et al. Optimal ellipsometric parameter measurement strategies based on four intensity measurements in presence of additive Gaussian and Poisson noise [J]. Optics Express, 2018, 26(26): 34529-34546.
- [22] Li X B, Hu H F, Wu L, et al. Optimization of instrument matrix for Mueller matrix ellipsometry based on partial elements analysis of the Mueller matrix[J]. Optics Express, 2017, 25(16): 18872-18884.
- [23] Duan Q Y, Gupta V K, Sorooshian S. Shuffled complex evolution approach for effective and efficient global minimization [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1993, 76(3): 501-521.
- [24] Perez J J G, Ossikovski R. Polarized light and the Mueller matrix approach [M]. Boca Raton: CRC press, 2017.