典型光流算法在条纹位移测量中的分辨力和测量范围

类智方*，孙平**，代晴

山东师范大学物理与电子科学学院，山东 济南 250014

摘要 分析了 Horn-Schunck 全局光流算法和 Lucas-Kanade 局域光流算法在条纹位移测量中的分辨力和测量范围，结果表明：当 Horn-Schunck 算法的相对误差和 Lucas-Kanade 算法的相对误差小于 2%时，两种算法的相位分辨力都能够达到 $10^{-13}\pi$，对应像面上的位移分辨力为 1.6×10^{-12} pixel，两种算法在理论上与四步相移法的分辨力相当；在有噪声的情况下，两种算法的分辨力都达到了 0.01π，对应像面上的位移分辨力为 0.16 pixel；在相对误差小于 2%、方均根误差小于 3%时，Horn-Schunck 算法和 Lucas-Kanade 算法的测量范围分别为 0～17π/100 和 0～52π/100，分别约为 0～π/6 和 0～π/2，并且测量范围受噪声的影响很小。

关键词 光计算；位移测量；位移分辨力；位移测量范围；光流；条纹光流

中图分类号 O439 **文献标志码** A **doi**：10.3788/AOS202040.0320001

Discussion on Resolution and Measuring Range of Typical Optical Flow Algorithm in Fringe Displacement Measurement

Lei Zhifang*, Sun Ping**, Dai Qing

School of Physics and Electronics, Shandong Normal University, Jinan, Shandong 250014, *China*

Abstract In this work, the resolution and measuring range of the Horn-Schunck global optical flow algorithm and Lucas-Kanade local optical flow algorithm in fringe displacement measurement are analyzed. The simulation results show that when the relative error of the Horn-Schunck algorithm and Lucas-Kanade algorithm is less than 2%, and the resolution of Horn-Schunck algorithm and Lucas-Kanade algorithm can reach $10^{-13}\pi$. Furthermore, the corresponding displacement resolution on image plane is 1.6×10^{-12} pixel. This shows that the resolution of the two algorithms is consistent with that of the four-step phase shift method. In the case of noise, the resolution of both algorithms reaches 0.01π, and the displacement resolution of the corresponding image surface is 0.16 pixel. When the relative error is less than 2% and the root-mean-square error is less than 3%, the measurement ranges of Horn-Schunck algorithm and Lucas-Kanade algorithm are 0–17π/100 and 0–52π/100, approximately 0–π/6 and 0–π/2, respectively, and the measurement ranges are less affected by noise.

Key words optics in computing; displacement measurement; displacement resolution; displacement measuring range; optical flow; fringe-based optical flow

OCIS codes 200.4740; 330.7325; 350.4800

1 引 言

光流是瞬时速度场，当观测目标运动时，在观测面上所成的像就会移动，像素移动的瞬时速度的变化称为光流。光流场本质上是运动的三维目标在观测成像面上的二维运动的投影。因此，通过提取图像时间序列中的光流信息，能够进行运动分析。Arnheim 等[1]提出了光流的概念，Horn 等[2]和 Lucas 等[3]分别对光流进行了数学描述，形成了 Horn-Schunck(H-S)光流算法和 Lucas-Kanade(L-K)光流算法，从此开启了光流的研究。近年来，随着人工智能的发展，光流检测技术颇受关注，逐渐成为国际研究的热点[4]，大量的光流算法开始涌现，并被应用于诸多领域。利用光流能够实现医学图像的

收稿日期：2019-06-11；**修回日期**：2019-09-23；**录用日期**：2019-10-12

基金项目：国家自然科学基金(61975099，11902317)、山东省自然科学基金(ZR201702090137)

* **E-mail**：mhzlzf@qq.com；** **E-mail**：sunpingmail@163.com

分析、复原、配准，以及血液、细胞的运动监控[5-6]，分析雷达和卫星所返回的天气数据，有效地预测恶劣天气[7]。利用光流技术能够对人体面部和眼部，以及手势等体态特征进行判断[8]，进而实现人机交互。光流可以用于视频跟踪监控，实现对运动车辆的检测[9]；还可以用来分析视频，完成人体行为的识别[10]。

光流法可用于微变形的测量，具有高精度的优点。条纹光流是组成条纹的像素点在像面内的平面运动。将条纹形成的光流与传统的相移技术相结合，能够实现多步相移和两步相移干涉[11-12]。Zhao 等[13]率先将光流技术用于条纹图像的解析，通过建立光流与离面位移之间的理论关系，实现了基于迈克耳孙光路的离面位移测量。Zhao 等[14]利用图像相关(DIC)方法，实现了光流场计算与条纹图像空间频率的结合，再次实现了离面位移测量。以此为基础，Xiao 等[15]基于两幅条纹图实现了变形场三维分量的测量。微位移测量的实现，显示出了光流方法的高精度。Hartmann 等[16]将全局的 H-S 光流算法[2]、局域的 L-K 光流算法[3]与数字图像相关方法进行对比后发现，L-K 局域光流算法比高精度 DIC 算法[17-18]更具竞争力，而 H-S 全局光流算法则更为灵敏[16]。Feng 等[19]采用图像插值运算对 L-K 光流算法进行了改进，实现了散斑图像的二维变形场测量，同时也验证了光流方法具有高精度的优点。

利用条纹的移动形成的光流进行位移测量是一种新型的微位移测量技术[12]，其测量分辨力、精度以及测量范围等基本特性还有待深入分析，这些特性对变形测量的理论探讨与实验应用都具有重要作用。分辨力是测量装置能有效测得的被观测量的最小示值；测量范围是指能保证所规定的准确度，并使误差处于规定极限内的量值范围。本文以经典的 H-S 全局光流算法和 L-K 局域光流算法为例，讨论了它们在相对误差小于 2%的条件下测量条纹平移时的分辨力和测量范围。由于测量分辨力涉及能够测量的最小值，实验方法难以实现，因此采用模拟的方法进行对比分析。

2 典型的光流算法

当物体运动时，在观测面上可以把运动过程分解为多幅瞬时图像，两幅相邻帧的图像之间的灰度差异代表像素点的移动。光流的计算是通过图像之间的灰度差异来进行的。光流的计算结果不仅代表了像素点速度的大小，也呈现出了该点的运动方向。在计算光流场时，通常需要遵循以下两个假设：1)两帧图像之间的运动为微小运动；2)两帧图像之间的亮度恒等不变。

设 t 时刻图像上任一像素点 P 在位置坐标 (x,y) 处的灰度值为 $I(x,y,t)$。经过 Δt 时间后，P 移动到新位置，记为 P'，位置坐标变为 $(x+\Delta x, y+\Delta y)$，灰度值为 $I(x+\Delta x, y+\Delta y, t+\Delta t)$。根据光流的亮度恒等不变假设，可得

$$I(x,y,t)=I(x+\Delta x,y+\Delta y,t+\Delta t)。\tag{1}$$

利用泰勒公式展开(1)式，并略去二阶以上的高阶项，可得

$$I(x+\Delta x,y+\Delta y,t+\Delta t)= I(x,y,t)+\frac{\partial I}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial I}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial I}{\partial t}\Delta t。\tag{2}$$

考虑到(1)式，可得

$$\frac{\partial I}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial I}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial I}{\partial t}\Delta t=0。\tag{3}$$

(3)式两边同除以 Δt，可以得到

$$\frac{\partial I}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial I}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t}+\frac{\partial I}{\partial t}=0\tag{4}$$

或

$$I_x u+I_y v+I_t=0,\tag{5}$$

式中：$I_x=\frac{\partial I}{\partial x}$ 和 $I_y=\frac{\partial I}{\partial y}$ 为图像关于 x 和 y 的偏导数；$I_t=\frac{\partial I}{\partial t}$ 为图像关于时间 t 的偏导数；u 和 v 为光流矢量的两个分量。

(4)式和(5)式称为光流基本方程。根据光流基本方程无法求出 u 和 v 的唯一解，需要用其他的约束条件来确定光流矢量的唯一解。

2.1 H-S 算法原理

H-S 算法在引入约束条件时，所用的基本思想是在计算光流过程中要求光流自身足够光滑，即要求在给定的邻域内，$\nabla^2 u+\nabla^2 v$ 足够小(∇^2 为拉普拉斯算子)，即

$$\min\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]。\tag{6}$$

结合(5)式和(6)式，H-S 算法可把计算光流的问题转化为解决变分问题，即

$$\min\iint_\Omega\left\{(I_x u+I_y v+I_t)^2+\alpha^2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\tag{7}$$

式中：$(x,y)\in\Omega$，Ω 为图像域；$(I_x u+I_y v+I_t)^2$ 为构造能量函数；α 为平滑参数。若要计算该能量函

数的最小值，可以分别对 u 和 v 求导数，再令导数为 0，可得

$$I_x^2 u + I_x I_y v = \alpha^2 \nabla^2 u - I_x I_t, \tag{8}$$

$$I_y^2 v + I_x I_y u = \alpha^2 \nabla^2 v - I_y I_t。 \tag{9}$$

(8)式和(9)式称为 Euler-Lagrange 方程。利用 Gauss-Seidel 迭代法来求解该方程，可以得到图像上每个位置的第 $n+1$ 次迭代估计(u^{n+1}, v^{n+1})，即

$$\begin{cases} u^{n+1} = \bar{u}^n - \dfrac{I_x(I_x\bar{u}^n + I_y\bar{v}^n + I_t)}{\alpha^2 + I_x^2 + I_y^2} \\ v^{n+1} = \bar{v}^n - \dfrac{I_y(I_x\bar{u}^n + I_y\bar{v}^n + I_t)}{\alpha^2 + I_x^2 + I_y^2} \end{cases}, \tag{10}$$

式中：$\bar{u}$ 和 $\bar{v}$ 为以(x, y)为中心的子区域内 u 和 v 的平均值。按照(10)式进行迭代计算得到的 u^{n+1} 和 v^{n+1} 就是 2 帧图像之间的光流矢量的 2 个分量。

2.2　L-K 算法原理

L-K 光流算法引入约束条件的基本思想是在满足光流基本方程的条件下，假设在一个小的空间窗口内光流(u, v)为常数，小窗口的尺寸为 $w \times w$，在窗口中的像素取 $1, 2, \cdots, n'$($n' = w \times w$)，得到一系列方程

$$\begin{cases} I_{x1} u + I_{y1} v = -I_{t1} \\ I_{x2} u + I_{y2} v = -I_{t2} \\ I_{x3} u + I_{y3} v = -I_{t3} \\ \qquad \cdots \\ I_{xn'} u + I_{yn'} v = -I_{tn'} \end{cases}, \tag{11}$$

式中：$I_{x1}, I_{x2}, \cdots, I_{xn'}$ 分别为在小窗口内，对应像素点的光强 I 对 x 的偏导数；$I_{y1}, I_{y2}, \cdots, I_{yn'}$ 分别为在小窗口内，对应像素点的光强 I 对 y 的偏导数；$I_{t1}, I_{t2}, \cdots, I_{tn'}$ 分别为在小窗口内，对应像素点的光强 I 对 t 的偏导数。

将(11)式这组方程写成矩阵的形式，即

$$\begin{pmatrix} I_{x1} & I_{y1} \\ I_{x2} & I_{y2} \\ \vdots & \vdots \\ I_{xn'} & I_{yn'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} I_{t1} \\ I_{t2} \\ \vdots \\ I_{tn'} \end{pmatrix}。 \tag{12}$$

采用最小二乘法求解(12)式，得到

$$\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{b}), \tag{13}$$

式中：$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} I_{x1} & I_{y1} \\ I_{x2} & I_{y2} \\ \vdots & \vdots \\ I_{xn'} & I_{yn'} \end{pmatrix}$；$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$；$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} I_{t1} \\ I_{t2} \\ \vdots \\ I_{tn'} \end{pmatrix}$。$\boldsymbol{V}$ 就是所要求的光流矢量。

3　光流位移测量原理

某时刻 t 采集到的(像面上)干涉条纹图一般可以表示为

$$I(x, y, t) = a(x, y, t) + b(x, y, t)\cos\varphi(x, y, t), \tag{14}$$

式中：$a(x, y, t)$为背景光的光强；$b(x, y, t)$为干涉条纹图的振幅；$\varphi(x, y, t)$为干涉条纹图的相位值。设在 Δt 时间内条纹上某点从(x, y, t)移动到(x', y', t')处，$x' = x + \Delta x$，$y' = y + \Delta y$，$t' = t + \Delta t$。将 $I(x', y', t')$在点(x, y, t)进行泰勒展开，略去高阶项，取一级近似，可得

$$\begin{aligned} I(x', y', t') = {} & a(x', y', t') + b(x', y', t') \times \\ & \Big[\cos\varphi(x, y, t) - \sin\varphi(x, y, t)\frac{\partial\varphi(x, y, t)}{\partial x}\Delta x - \\ & \sin\varphi(x, y, t)\frac{\partial\varphi(x, y, t)}{\partial y}\Delta y - \\ & \sin\varphi(x, y, t)\frac{\partial\varphi(x, y, t)}{\partial t}\Delta t\Big]。 \end{aligned} \tag{15}$$

一般情况下，$a(x', y', t')$和 $b(x', y', t')$的变化较小，可以将其看作 $a(x, y, t)$和 $b(x, y, t)$。根据光流基本方程，可得

$$\frac{\partial\varphi(x, y, t)}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial\varphi(x, y, t)}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\Delta\varphi(x, y, t)}{\Delta t} = 0, \tag{16}$$

式中：$\Delta\varphi$ 为点(x, y, t)在 Δt 时间内的相位变化量。$u(x, y, t) = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$，$v(x, y, t) = \dfrac{\Delta y}{\Delta t}$，对于平面波干涉，有 $\dfrac{\partial\varphi(x, y, t)}{\partial x} = 2\pi f_{\mathrm{ix}}$，$\dfrac{\partial\varphi(x, y, t)}{\partial y} = 2\pi f_{\mathrm{iy}}$，其中 f_{ix} 和 f_{iy} 为像面上点(x, y, t)处 x 方向和 y 方向的条纹频率。由(16)式得到

$$\Delta\varphi(x, y, t) = -(2\pi f_{\mathrm{ix}} u + 2\pi f_{\mathrm{iy}} v)\Delta t。 \tag{17}$$

若图像是平行条纹，则沿 y 方向的条纹频率为 0，(17)式可进一步表示为

$$\Delta\varphi(x, y, t) = -2\pi f_{\mathrm{ix}} u \Delta t。 \tag{18}$$

若物面坐标为(x_{o}, y_{o})，则 $x = M_{\mathrm{c}} x_{\mathrm{o}}$，$y = M_{\mathrm{c}} y_{\mathrm{o}}$，其中 M_{c} 为成像系统的放大率。通过坐标变换，可将(18)式转换为被测物面的相位分布。

4　位移测量范围与分辨力分析

4.1　模拟分析步骤

首先，按照(14)式模拟生成第一帧(t 时刻)像面条纹图像，对其加载水平位移 Δx_t 以模拟条纹变形，得到第二帧($t + \Delta t$ 时刻)图像，Δx_t 为水平位移准确值，对应的变形相位为 $\Delta\varphi_t$。然后，利用光流算法计算变形前后两帧图像之间的光流场 u，则位移的计算值为 $\Delta x = u\Delta t$。由于采集图像对时间间隔

无要求，因此可令 $\Delta t=1$。最后，比较计算值与准确值，并计算误差，确定分辨力和测量范围。由于每次计算得到的是条纹图的整体平移，因此采用相对误差 E 和方均根误差（RMSE）表征计算值的误差分布。相对误差描述的是结果的计算值与准确值之间的差距，方均根误差描述的是计算值围绕准确值的波动情况。设定初始位移量，逐次增加或减小相移量，即可求得分辨力和测量范围。相对误差 E 和方均根误差 V_{RMSE} 分别为

$$E=\frac{\Delta x-\Delta x_t}{\Delta x_t}\times 100\%, \tag{19}$$

$$V_{\mathrm{RMSE}}=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\Delta x_i-\Delta x_t)^2}, \tag{20}$$

式中：Δx_i 为计算值中某行的第 i 个数据；N 为计算值中某行的数据个数；Δx 为计算值；Δx_t 为准确值。

4.2　测量范围分析

4.2.1　H-S 算法的测量范围

按照(14)式模拟生成第一帧（t 时刻）像面条纹图像，令 $a=0$，$b=1$，$\varphi=2\pi f_{\mathrm{ix}}x$，$f_{\mathrm{ix}}=0.03125\ \mathrm{pixel}^{-1}$，像面图像大小为 512 pixel×512 pixel。对应物面图像大小为 40 mm×40 mm，物面上 x 方向的条纹频率为 $f_{\mathrm{ox}}=0.4\ \mathrm{mm}^{-1}$，放大率为 $M=12.8$ pixel/mm。对第一帧图像在像面上叠加相移量，使条纹发生水平位移。参照文献[16]中对像素为 2.2 pixel 的中型散斑颗粒取步长为 0.02 pixel，本文对宽度为 32 pixel的条纹，取0.3 pixel的步长，能够满足要求。本文中的相移为 $\pi/100\sim\pi$，步长取 $\pi/100$，对应的位移量为0.16 pixel。生成不同相移量的进行位移后的图像（作为第二帧图像，$t+\Delta t$ 时刻）。利用 H-S 算法，迭代次数取 800，求出不同相移量图像的光流场 u，光流场 u 代表条纹移动的位移，单位为 pixel。将计算值与准确值之间的相对误差和方均根误差作为纵坐标，相移作为横坐标，得到图 1 和图 2，其中图 1(b)和图 2(b)分别为图 1(a)和图 2(a)中方框区域的放大图。可见，该区域的相对误差小于 2%。

从图 1 中可以看出，相对误差的趋势总体上是增大的，但 H-S 算法在相移大于 $71\pi/100$ 时，出现了相对误差陡降的情况，当相移大于 $87\pi/100$ 时，相对误差达到最小值，此后又陡增。从图 2 中可以看出，方均根误差的总体趋势是增大的，但 H-S 算法在相移大于 $73\pi/100$ 时，出现了方均根误差陡降的情况，当相移大于 $87\pi/100$ 时，方均根误差在达到最小后又陡增。

本文中的数据是在迭代次数为 800 时计算得到

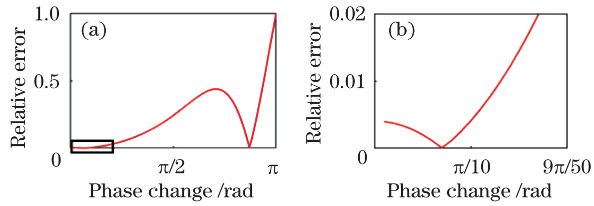

图 1　H-S 算法的相对误差分布。(a) 相移范围为(0, π]；(b) 相移范围为(0, 9π/50]（相对误差小于 2%）

Fig. 1　Relative error distribution of H-S algorithm. (a) Range of phase shift is (0, π]; (b) range of phase shift is (0, 9π/50] (relative error is <2%)

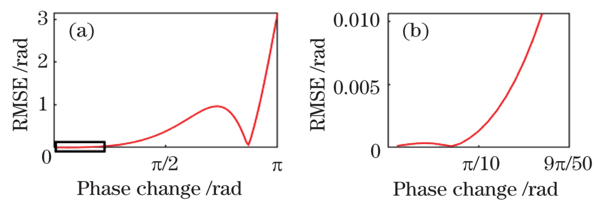

图 2　H-S 算法的方均根误差分布。(a)相移范围为(0, π]；(b) 相移范围为(0, 9π/50]（相对误差小于 2%）

Fig. 2　RMSE distributions of H-S algorithm. (a) Range of phase shift is (0, π]; (b) range of phase shift is (0, 9π/50] (relative error is <2%)

的（当迭代次数大于 1000 时，所得结果基本上不发生变化）。对比迭代次数为 700 和 800 时的计算结果，再结合图 3 和图 4 可知，当迭代次数大于 700 时，误差曲线趋于平稳。因此在 H-S 算法的整个误差分析中，迭代次数取 800 是合理的。当相移为 $17\pi/100$ 时，相对误差为 1.99%，小于 2%，位移计算值与理论值的差距非常小，计算结果非常准确，此时方均根误差为 1.07%，说明计算得到的位移场的整体波动非常小。由此可知，当相对误差小于 2%时，H-S 算法的测量范围为 $0\sim17\pi/100$。若测量要求相对误差小于 5%，则 H-S 算法的测量范围应为 $0\sim\pi/4$，此时方均根误差小于 4%，位移场的整体波动也较小。

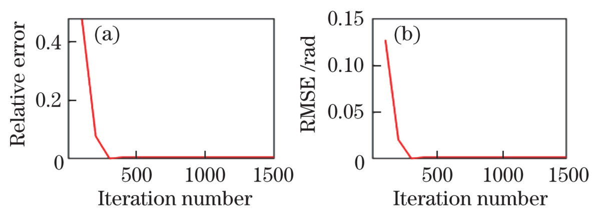

图 3　H-S 算法在迭代次数为 200～1500 时的误差分布。(a)相对误差；(b)方均根误差

Fig. 3　Error distributions of H-S algorithm with iteration rage from 200 to 1500. (a) Relative error; (b) RMSE

4.2.2　L-K 算法的测量范围

根据前文的模拟条件，取金字塔层数分别为 1

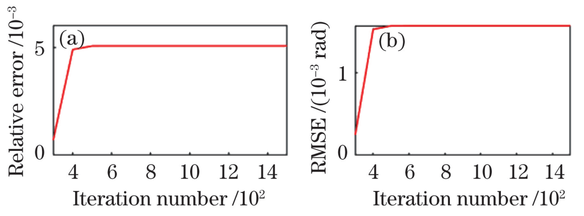

图 4　H-S算法在迭代次数为 300～1500 时的误差分布。(a)相对误差；(b)方均根误差

Fig. 4　Error distributions of H-S algorithm with iteration range from 300 to 1500. (a) Relative error; (b) RMSE

和 2，得到不同层数时，以相移作为横坐标，相对误差和方均根误差作为纵坐标的误差分布，如图 5 和图 6 所示。可以看出，L-K 算法的相对误差和方均根误差的变化趋势类似，而且在大于某个阈值后变大。在金字塔层数取 1 的条件下，当相移为52π/100时，相对误差为 1.74%（小于 2%），方均根误差为2.86%（小于 3%）。从相对误差来看，此时位移计算值与理论值相差非常小，计算结果非常准确；从方均根误差来看，计算得到的整体位移场的波动也在误差要求的范围内。

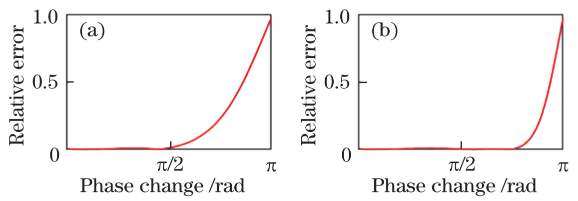

图 5　不同金字塔层数时 L-K 算法的相对误差分布。(a)金字塔层数为 1；(b)金字塔层数为 2

Fig. 5　Relative error distributions of L-K algorithm with different pyramid layers. (a) Number of pyramid layers is 1; (b) number of pyramid layers is 2

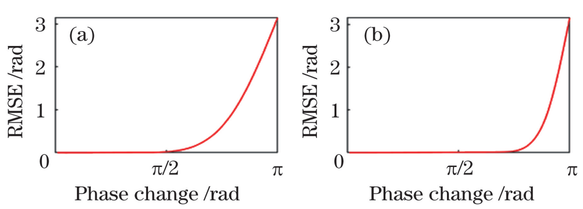

图 6　不同金字塔层数时 L-K 算法的方均根误差分布。(a)金字塔层数为 1；(b)金字塔层数为 2

Fig. 6　RMSE distributions of L-K algorithm with different numbers of pyramid layers. (a) Number of pyramid layers is 1; (b) number of pyramid layers is 2

图 7 所示为当金字塔层数为 1，相对误差小于2%时，L-K 算法在[0，53π/100]相移范围内相对误差和方均根误差的变化。可以看出，虽然相对误差和方均根误差的变化曲线不是线性的，但各点的数据均小于误差要求。由此可得：当金字塔层数取 1时，L-K 算法的测量范围为 0～52π/100。在金字塔层数取 2 的条件下，当相移为 79π/100 时，相对误差为 1.99%，方均根误差则高达 10.14%，显然此时的相移是不可以作为阈值（测量范围）的；当相移为74π/100 时，相对误差为 0.03%，方均根误差为2.93%，满足误差要求。因此，当金字塔层数取 2时，L-K 算法的测量范围变为 0～74π/100。可见，金字塔层数取 2 时的测量范围比取 1 时的测量范围大。事实上，当金字塔层数取 1 时，L-K 算法所能测量的相移已经大于 π/2。因此，金字塔层数取 1 也能够满足微小位移的测量。

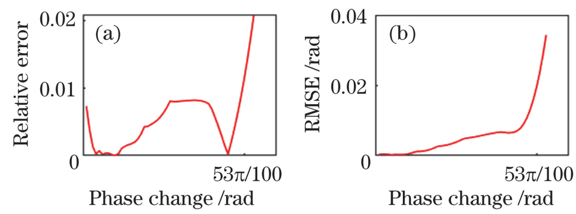

图 7　当金字塔层数取 1 且相对误差小于 2%时，L-K 算法在[0，53π/100]相移范围内的误差分布。(a)相对误差；(b)方均根误差

Fig. 7　Error distributions of L-K algorithm when number of pyramid layers is 1, relative error is less than 2%, and phase shift range is [0, 53π/100]. (a) Relative error; (b) RMSE

图 8 所示为不同金字塔层数条件下 H-S 算法与 L-K 算法的误差对比，其中 L-K1、L-K2 算法分别是金字塔层数为 1 和 2 时的 L-K 算法。可以看出，在误差允许的范围内，L-K 算法的测量范围比H-S 算法的测量范围稍大，说明 L-K 算法对超过17π/100的位移的计算能力略强于 H-S 算法。

4.3　分辨力分析

按照与上文相同的模拟条件模拟生成第一帧（t时刻）像面条纹图像。对第一帧图像在像面上叠加相移量，使条纹发生水平位移。取变形相位为π/10，将其作为初始的相移值，此后每次将初始相移值缩小为原来的 1/10，得到不同相移量的位移对应的图像（作为第二帧图像，$t+\Delta t$ 时刻）。再利用光流算法计算条纹的位移量，最后根据（19）式和（20）式计算相对误差和方均根误差。重复上述步骤16 次，得到算法的相对误差和方均根误差。

4.3.1　H-S 算法的分辨力

在模拟过程中，H-S 算法的迭代次数取 800。由于所加载的相移较小，因此 L-K 算法的金字塔层数取 1。由于计算得到的是条纹图像的整体位移，因此选取边缘效应小的第 256 行与实际值进行对

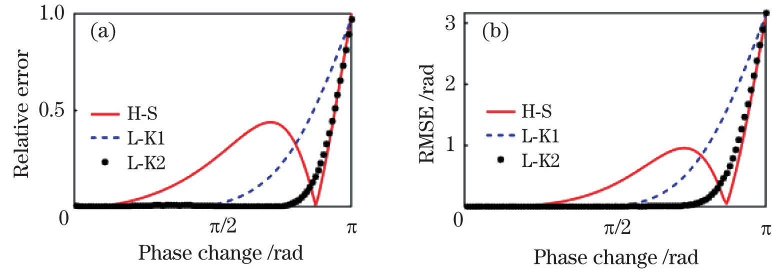

图 8　不同金字塔层数条件下，H-S 算法与 L-K 算法的误差对比。(a)相对误差；(b)方均根误差

Fig. 8　Comparison of errors between H-S algorithm and L-K algorithm with different numbers of pyramid layers. (a) Relative error; (b) RMSE

比，得到两组位移，如图 9、10 所示，其中 X 为位移场第 256 行中的数据元素。从图 9 中可以看出，当相移分别为 $10^{-12}\pi$、$10^{-13}\pi$、$10^{-14}\pi$、$10^{-15}\pi$、$10^{-16}\pi$ 时，对应的相对误差分别为 0.41%、0.39%、0.40%、0.94%和1.75%。若要求相对误差小于 2%，则可得出 H-S 算法的相位分辨力为 $10^{-16}\pi$。但是随着相移的减小，曲线开始从两边偏离下陷，中间部分凸出，特别是当相移为 $10^{-16}\pi$ 时，计算结果只在中间部分有数值。这说明 H-S 算法得到的位移计算结果的准确性随着相移量的减小而下降。由于取位移场的第 256 行和第 256 列的数据来计算相对误差，因此出现了相对误差反常的情况。结合图 9(a)～(e)中的测量数据分布可知，真正的相位分辨力应为 $10^{-13}\pi$，如图 9(b)所示，像面上的位移分辨力则为 1.6×10^{-12} pixel。

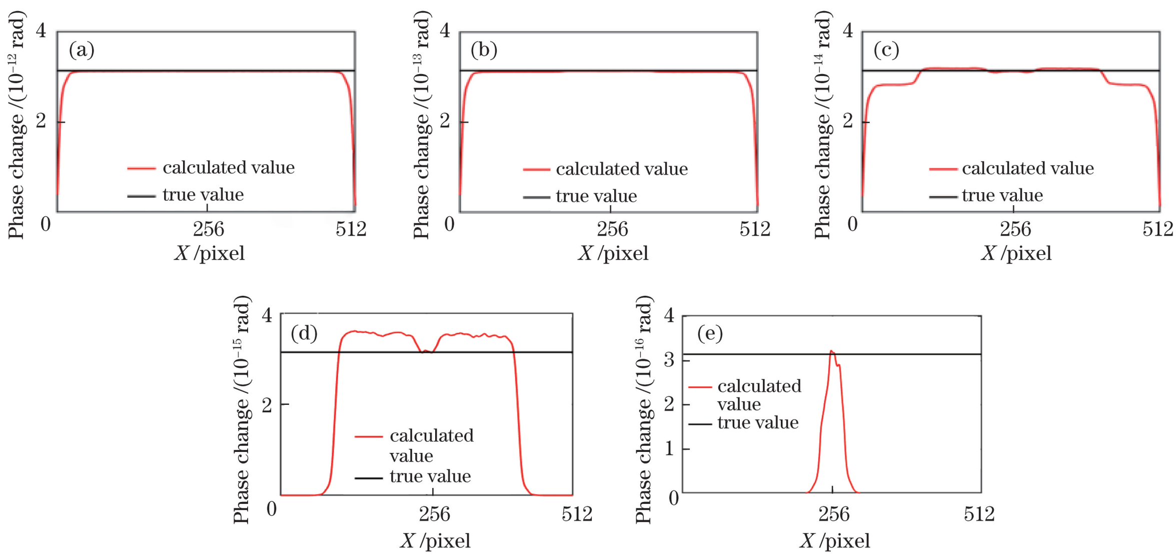

图 9　不同相移下，根据 H-S 算法得到的位移计算值与真实值的比较。(a)$10^{-12}\pi$；(b) $10^{-13}\pi$；(c) $10^{-14}\pi$；(d) $10^{-15}\pi$；(e) $10^{-16}\pi$

Fig. 9　Comparison of displacement value calculated by H-S algorithm and true value under different phase shifts. (a) $10^{-12}\pi$; (b) $10^{-13}\pi$; (c) $10^{-14}\pi$; (d) $10^{-15}\pi$; (e) $10^{-16}\pi$

4.3.2　L-K 算法的分辨力

从图 10 中可以看出，当相移分别为 $10^{-12}\pi$、$10^{-13}\pi$、$10^{-14}\pi$、$10^{-15}\pi$、$10^{-16}\pi$ 时，对应的相对误差分别为 1.12%、0.82%、3.37%、17.94% 和 46.71%。与 H-S 算法相同，随着相移的减小，位移计算结果从与理论值吻合变为两侧偏离理论值，说明 L-K 算法得到的位移计算结果的准确性随着相移的减小而下降。若要求相对误差小于 2%，则可得出 L-K 算法的相位分辨力为 $10^{-13}\pi$，像面上的位移分辨力则为 1.6×10^{-12} pixel，如图 10(b)所示。

图 11 所示为 H-S 算法、L-K 算法和四步相移法分辨力的相对误差分布。值得注意的是，当相移小于或等于 $10^{-13}\pi$ 时，四步相移法测量位移的相对误差小于 1%，这说明四步相移有很高的分辨力，而且测量精度很高。与四步相移法相比，H-S 光流算法和 L-K 光流算法的测量精度较低，但分辨力相当，能够用于微小位移的测量。

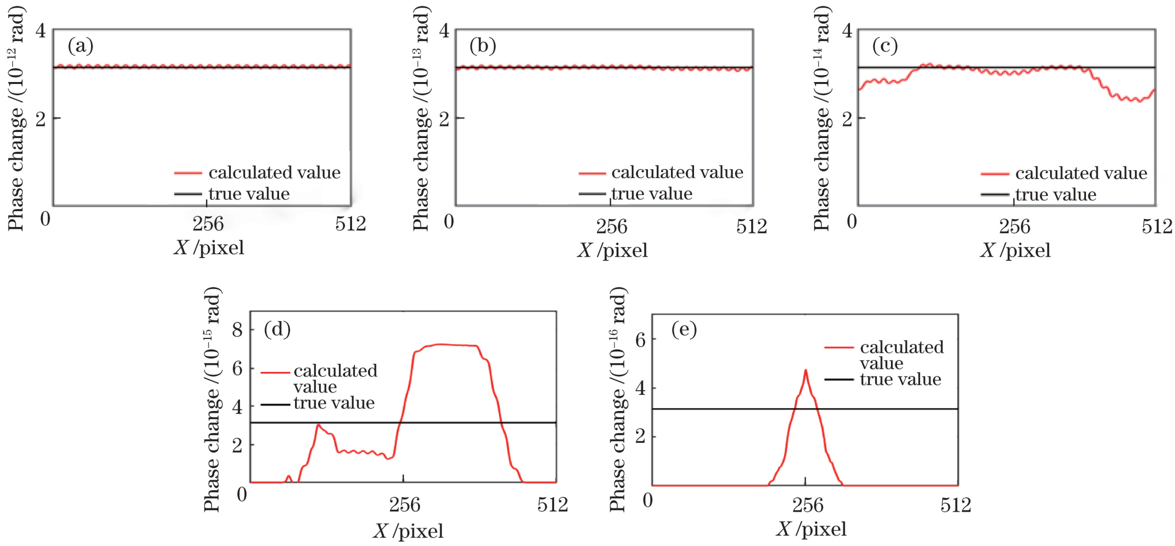

图 10　不同相移下，根据 L-K 算法得到的位移的计算值与真实值的比较。(a) $10^{-12}\pi$；(b) $10^{-13}\pi$；(c) $10^{-14}\pi$；(d) $10^{-15}\pi$；(e) $10^{-16}\pi$

Fig. 10　Comparison of displacement value calculated by L-K algorithm and true value under different phase shifts. (a) $10^{-12}\pi$; (b) $10^{-13}\pi$; (c) $10^{-14}\pi$; (d) $10^{-15}\pi$; (e) $10^{-16}\pi$

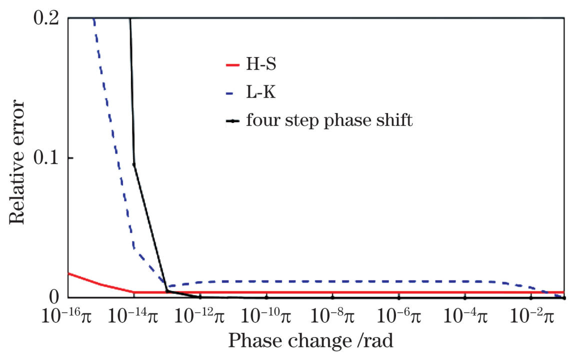

图 11　H-S 算法、L-K 算法、四步相移法分辨力的相对误差对比

Fig. 11　Comparison of resolution relative errors of H-S algorithm, L-K algorithm, and four step phase shift

4.4　图像传感器噪声对算法测量范围的影响

图像传感器在采集图像时会对图像产生噪声影响，图像传感器噪声可以近似看作是高斯白噪声[20]，按照上文的模拟条件，对生成的图像加载信噪比为 40 dB 的高斯噪声；然后分别采用 H-S 算法和 L-K 算法进行位移测量的模拟实验，实验结果如图 12～15 所示。从图 12(a)、图 13(a)、图 14(a)和图 15(a)可以看出，加载噪声后，两种算法所得到的曲线趋势与不加噪声所得的模拟结果基本一致。从图 12(b)、图 13(b)、图 14(b)和图 15(b)中可以看出，算法得到的测量范围与不加噪声得到的测量范围基本一致。由此可知，H-S 算法的测量范围应为 0～17π/100，L-K 算法的测量范围应为 0～52π/100。

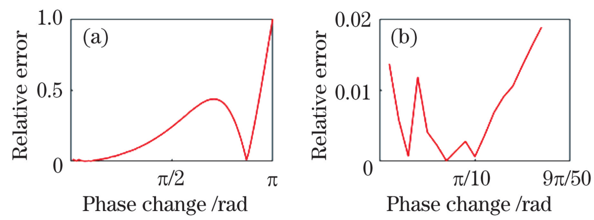

图 12　加载噪声后，采用 H-S 算法测量得到的位移的相对误差分布。(a) 相移范围为(0，π]；(b) 相移范围为(0，9π/50](相对误差小于 2%)

Fig. 12 Relative error distributions obtained by H-S algorithm with noise. (a) Range of phase shift is (0, π]; (b) range of phase shift is (0, 9π/50] (relative error is <2%)

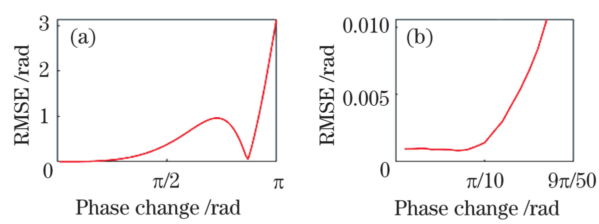

图 13　加载噪声后，采用 H-S 算法得到的位移的方均根误差分布。(a) 相移范围为(0，π]；(b) 相移范围为(0，9π/50](相对误差小于 2%)

Fig. 13 Displacement RMSE distributions obtained by H-S algorithm with noise. (a) Range of phase shift is (0, π]; (b) range of phase shift is (0, 9π/50] (relative error is <2%)

4.5　图像传感器噪声对算法分辨力的影响

保持分辨力模拟条件不变，对生成的图像加载

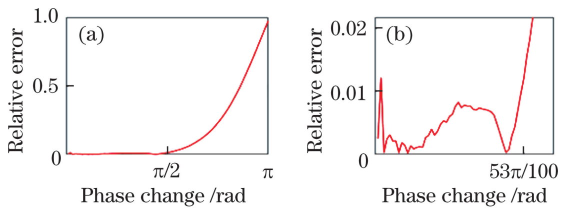

图 14　加载噪声后，采用 L-K 算法得到的位移的相对误差分布。(a) 相移范围为(0, π]；(b) 相移范围为(0, 53π/100](相对误差小于 2%)

Fig. 14　Displacement relative error distributions obtained by L-K algorithm with noise. (a) Range of phase shift is (0, π]; (b) range of phase shift is (0, 53π/100] (relative error is <2%)

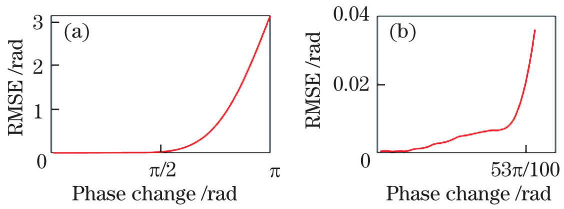

图 15　加载噪声后，采用 L-K 算法得到的位移的方均根误差分布。(a) 相移范围为(0, π]；(b) 相移范围为(0, 53π/100] (相对误差小于 2%)

Fig. 15　Displacement RMSE distributions obtained by L-K algorithm with noise. (a) Range of phase shift is (0, π]; (b) range of phase shift is (0, 53π/100] (relative error is <2%)

噪声，模拟实验结果如图 16～18 所示。由图 16、17 可以看出，加载噪声后，$10^{-14}\pi$～$10^{-1}\pi$ 之间的曲线的走势似乎并不明朗。但从图 18 中可以看出，两种算法的分辨力因噪声的存在而受到了影响。当相移为 $10^{-3}\pi$ 时，H-S 算法和 L-K 算法的相对误差分别为 15.26% 和 39.72%；而当相移为 $10^{-2}\pi$ 时，这两种算法的相对误差分别为 0.77% 和 1.71%。可见，在有噪声的情况下，H-S 算法和 L-K 算法的分辨力均为 0.01π，对应的像面分辨力则为 0.16 pixel。

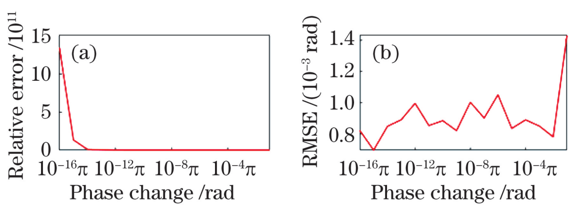

图 16　加载噪声后，H-S 算法的分辨力误差分布。(a) 相对误差；(b)方均根误差

Fig. 16　Resolution error distributions of H-S algorithm with noise. (a) Relative error; (b) RMSE

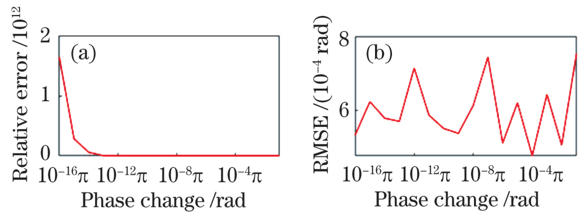

图 17　加载噪声后，L-K 算法的分辨力误差分布。(a)相对误差；(b)方均根误差

Fig. 17　Resolution error distributions of L-K algorithm with noise. (a) Relative error; (b) RMSE

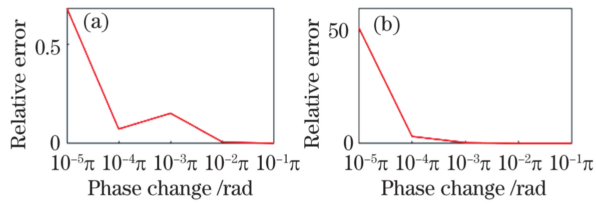

图 18　不同算法的分辨力相对误差分布。(a) H-S 算法；(b) L-K 算法(相移范围为$[10^{-3}\pi, 10^{-1}\pi]$)

Fig. 18　Resolution relative error distributions of different algorithms. (a) H-S algorithm; (b) L-K algorithm (range of phase shift is $[10^{-3}\pi,\ 10^{-1}\pi]$)

5　误差讨论

对于 H-S 算法而言，Gauss-Seidel 迭代法本来就是求解方程组的近似方法，对光流场进行计算时难免会有所偏差。在迭代过程中，每次迭代计算都要使用上一次迭代所求得的光流，而且每次迭代计算得到的光流都会进行一次均值处理，这样也会带来一定误差。对于 L-K 算法，光流在给定的窗口内为常数，进而可在窗口内得到一个方程组。而实际上，窗口内的光流不一定都相同，这样的假设势必会带来计算误差。而且在迭代计算光流时，也会带来误差。

6　结　　论

通过模拟分析，验证了 H-S 光流算法和 L-K 光流算法对于微小位移都具有非常高的分辨力，适合用于微小位移的测量。当要求位移测量的相对误差小于 2% 时，两种算法的相位分辨力都能够达到 $10^{-13}\pi$，对应的像面上的位移分辨力都可以达到 1.6×10^{-12} pixel，与四步相移法的分辨力相当。当加载信噪比为 40 dB 的噪声时，两种算法的分辨力都达到了 0.01π，对应的像面上的位移分辨力都可以达到 0.16 pixel。测量范围不受噪声影响，因此，在相对误差小于 2% 时，H-S 算法的测量范围为

$0 \sim 17\pi/100$，约为 $0 \sim \pi/6$，L-K 算法的测量范围为 $0 \sim 52\pi/100$，约为 $0 \sim \pi/2$。

参 考 文 献

[1] Arnheim R, Gibson J J. The perception of the visual world[J]. The Journal of Aesthetics and Art Criticism, 1952, 11(2): 172-173.

[2] Horn B K P, Schunck B G. Determining optical flow [J]. Artificial Intelligence, 1981, 17(1/2/3): 185-203.

[3] Lucas B, Kanade T. An iterative image registration technique with an application to stereo vision[C]// Proceedings of International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI '81), Proceedings of the 7th International Joint Conference on Artificial Intelligence, August 24-28, 1981, Vancouver, BC, Canada. [S.l]: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1981: 674-679.

[4] Song S, Yang J, Wang Y T. Technology and prospect of global optical flow[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2014, 26(5): 841-850.
宋爽，杨健，王涌天. 全局光流场估计技术及展望[J]. 计算机辅助设计与图形学学报，2014，26(5): 841-850.

[5] Barba-J L, Moya-Albor E, Escalante-Ramírez B, et al. Segmentation and optical flow estimation in cardiac CT sequences based on a spatiotemporal PDM with a correction scheme and the Hermite transform [J]. Computers in Biology and Medicine, 2016, 69: 189-202.

[6] Cao Z L, Dong E Q, Zheng Q, et al. Accurate inverse-consistent symmetric optical flow for 4D CT lung registration [J]. Biomedical Signal Processing and Control, 2016, 24: 25-33.

[7] Liu S J, Zhang L. Optical flow method and its application in the field of meteorology[J]. Advances in Meteorological Science and Technology, 2015, 5(4): 16-21.
柳士俊，张蕾. 光流法及其在气象领域里的应用[J]. 气象科技进展，2015，5(4): 16-21.

[8] Zhang X G, Tian Y T, Yan F, et al. Micro-expression recognition based on global optical flow feature[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2016, 29(8): 760-768.
张轩阁，田彦涛，颜飞，等. 基于全局光流特征的微表情识别[J]. 模式识别与人工智能，2016，29(8): 760-768.

[9] Huang X, Xiao S D, Song B. Detection of vehicle's abnormal behaviors in surveillance video[J]. Computer Systems & Applications, 2018, 27(2): 125-131.
黄鑫，肖世德，宋波. 监控视频中的车辆异常行为检测[J]. 计算机系统应用，2018，27(2): 125-131.

[10] Li Q H, Li A H, Wang T, et al. Double-stream convolutional networks with sequential optical flow image for action recognition[J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38(6): 0615002.
李庆辉，李艾华，王涛，等. 结合有序光流图和双流卷积网络的行为识别[J]. 光学学报，2018，38(6): 0615002.

[11] Vargas J, Quiroga J A, Sorzano C O S, et al. Two-step interferometry by a regularized optical flow algorithm [J]. Optics Letters, 2011, 36(17): 3485-3487.

[12] Vargas J, Quiroga J A, Sorzano C O S, et al. Multiplicative phase-shifting interferometry using optical flow [J]. Applied Optics, 2012, 51(24): 5903-5908.

[13] Zhao R, Sun P. Deformation-phase measurement by optical flow method [J]. Optics Communications, 2016, 371: 144-149.

[14] Zhao R, Sun P. Deformation-phase measurement by digital speckle correlation method[J]. Applied Physics B, 2016, 122(10): 251.

[15] Xiao F, Zhao R, Sun P. Three-dimensional displacement measurement based on the combination of digital image correlation and optical flow[J]. Applied Optics, 2016, 55(29): 8207-8212.

[16] Hartmann C, Wang J, Opristescu D, et al. Implementation and evaluation of optical flow methods for two-dimensional deformation measurement in comparison to digital image correlation [J]. Optics and Lasers in Engineering, 2018, 107: 127-141.

[17] Liu X Y, Tan Q C, Xiong L, et al. Performance of iterative gradient-based algorithms with different intensity change models in digital image correlation [J]. Optics & Laser Technology, 2012, 44(4): 1060-1067.

[18] Pan B, Li K, Tong W. Fast, robust and accurate digital image correlation calculation without redundant computations[J]. Experimental Mechanics, 2013, 53(7): 1277-1289.

[19] Feng W, Jin Y, Liu W L. Displacement field determination using an iterative optical flow strategy [J]. Measurement Science and Technology, 2018, 29(7): 075402.

[20] Gao Z R, Xu X H, Su Y, et al. Experimental analysis of image noise and interpolation bias in digital image correlation [J]. Optics and Lasers in Engineering, 2016, 81: 46-53.