

# 高斯型 PT 对称波导中高斯光波的控制

党婷婷<sup>1</sup>, 王娟芬<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>大同大学物理与电子科学学院, 山西 大同 037009;

<sup>2</sup>太原理工大学物理与光电工程学院, 山西 太原 030024

**摘要** 基于光波在 PT(Parity-Time)对称波导中传输的理论模型,采用数值模拟研究了高斯光波在高斯型 PT 对称克尔非线性平板波导中的传输控制特性。PT 对称波导要求其折射率分布呈偶对称,而增益/损耗分布呈奇对称。研究表明:在高斯型 PT 对称波导中,基模高斯光波可以形成波浪形光束,并稳定地传输;随着折射率分布强度的增加,波浪形光束的振荡频率增加,振荡幅度减小。一阶高斯光波在 PT 对称波导中传输时,在折射率较大的条件下,两束光可以被束缚在波导中心稳定地传输,而二阶高斯光波则需要更大的折射率分布强度才能被束缚。该研究结果可为 PT 对称波导在全光开关控制上的应用奠定理论基础。

**关键词** 非线性光学; 高斯光波; 宇称时间对称波导; 克尔非线性; 复折射率; 光波传输

中图分类号 O437

文献标志码 A

doi: 10.3788/AOS202040.0319001

## Control of Gaussian Optical Waves in Gaussian Parity-Time Symmetric Waveguide

Dang Tingting<sup>1</sup>, Wang Juanfen<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>School of Physics and Electronic Science, Datong University, Datong, Shanxi 037009, China;

<sup>2</sup>College of Physics and Optoelectronics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan, Shanxi 030024, China

**Abstract** The propagation control characteristic of Gaussian optical waves in parity-time (PT)-symmetric Kerr nonlinear planar waveguide with a Gaussian distribution is numerically studied based on the theoretical model of the optical-wave propagation in a PT-symmetric waveguide. The PT-symmetric waveguide requires the refractive-index distribution of the waveguide to have an even symmetry, whereas the gain/loss distribution must be odd. The results demonstrate that in the Gaussian PT-symmetric waveguide, the fundamental-mode Gaussian optical wave can form a wave-shaped beam that has a stable propagation. When the strength of the refractive-index distribution is increased, the oscillation frequency of the wave-shaped beam increases and the oscillation amplitude decreases. When the refractive index becomes larger, the two beams of the first-order Gaussian optical wave in the PT-symmetric waveguide can be restricted at the center of the waveguide, allowing stable propagation of the two beams. The second-order Gaussian optical wave requires a stronger refractive-index distribution for it to be restricted. This work lays a theoretical foundation for the application of PT-symmetric waveguide in all-optical switching control.

**Key words** nonlinear optics; Gaussian optical wave; parity-time-symmetric waveguide; Kerr nonlinear; complex refractive index; optical-wave propagation

**OCIS codes** 190.6135; 190.3270; 190.4390

## 1 引 言

PT(Parity-Time)对称的概念最初来自量子力学。Parity 表示宇称算符或者空间反演算符,一般缩写为 P。Time 表示时间反演算符,一般缩写为

T。PT 对称表征系统在宇称变换和时间反演变换下的对称性。Bender 等<sup>[1-2]</sup>提出如果非厄米的哈密顿量满足 PT 对称性,则其可能拥有实的本征谱。

PT 对称必须满足  $P\hat{T}H = \hat{H}PT$ ,即要求势函数  $V(x) = V^*(-x)$ 。也就是说,PT 对称要求势能函

收稿日期: 2019-07-29; 修回日期: 2019-08-28; 录用日期: 2019-09-29

基金项目: 国家自然科学基金(61675144)

\* E-mail: dangting\_12@163.com

数的实部是位置坐标  $x$  的偶函数,而虚部是  $x$  的奇函数。由 Maxwell 方程导出的光波传输线性方程与量子力学中薛定谔方程具有类似的结构。2007 年,El-Ganainy 等<sup>[3]</sup>首次将量子力学中的 PT 对称概念引入到光学领域中。光学中的 PT 对称系统可以通过光学介质的复折射率分布来实现,要求复折射率的实部是  $x$  的偶函数,而虚部是  $x$  的奇函数。

研究人员已在理论和实验中证实 PT 对称波导系统具有许多独特的光学性质。实验上,Rüter 等<sup>[4]</sup>在铌酸锂晶体(LiNbO<sub>3</sub>)中构建了 PT 对称波导,并得到非互易光波的传输特性。此外,光学透明<sup>[5]</sup>、磁光非互易性<sup>[6]</sup>、单向不可见性<sup>[7-8]</sup>,以及完美吸收体<sup>[9-11]</sup>等特性也逐渐被研究人员发现。基于 PT 对称光学系统的这些奇特性质,研究人员已提出了一些新型的光学器件,例如光开关<sup>[12]</sup>以及芯片上的光学隔离器<sup>[13-14]</sup>等。2008 年,Muslimani 等<sup>[15]</sup>首次研究了 PT 对称波导系统中的光孤子,非线性 PT 对称波导系统中可以形成各种空间光孤子<sup>[16-17]</sup>。自此之后,在不同复折射率分布的非线性 PT 对称波导,如周期分布<sup>[18-22]</sup>、双曲分布<sup>[23-27]</sup>等各种系统中的光孤子也得到了研究。然而高斯光波在呈高斯分布的 PT 对称波导中的传输特性还未得到研究。本文采用数值模拟的方法讨论高斯型 PT 对称波导中基模、一阶和二阶高斯光波的控制。此次研究结果可为 PT 对称波导在全光控制中的应用奠定一定的理论基础。

## 2 理论模型

光波在一维 PT 对称波导系统中传输,其波导的折射率表达式为

$$n(x) = n_0 + n_R(x) + i n_1(x) + n_2 |A|^2, \quad (1)$$

式中: $n_0$  表示波导的基底折射率; $n_2$  可正可负,表示波导中的自聚焦或自散焦克尔非线性效应; $n_R(x)$  和  $n_1(x)$  分别为线性复折射率的实部和虚部,表示波导的折射率分布和增益/损耗分布。PT 对称条件要求复折射率必须满足如下条件:

$$n_R(-x) = n_R(x), \quad n_1(-x) = -n_1(x), \quad (2)$$

即波导的折射率分布  $n_R(x)$  必须是横向空间坐标  $x$  的偶函数,而增益/损耗分布  $n_1(x)$  必须是坐标  $x$  的奇函数。

考虑一个沿  $z$  方向传输的单色线偏振光,在傍轴近似下,基于(1)式的折射率分布,由 Maxwell 方程组可推导出光波传输方程<sup>[28-29]</sup>:

$$i \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{k}{n_0} (n_R + i n_1) A + k \frac{n_2}{n_0} |A|^2 A = 0, \quad (3)$$

该方程可以用来描述光波在 PT 对称波导中的传输,如果不考虑克尔非线性效应,此方程可退化为文献<sup>[4]</sup>中的线性模型。式中: $A$  表示光波的振幅; $k = 2\pi n_0/\lambda_0$  表示波数, $\lambda_0$  为真空中的波长。引入如下变换: $U = ka (|n_2|/n_0)^{1/2} A$ ,  $X = x/a$ ,  $Z = z/L_D$ , 其中  $a$  和  $L_D = ka^2$  分别表征 PT 对称复折射率分布的宽度和衍射长度,它们具有长度的量纲。经变量代换,(3)式可写成无量纲的形式<sup>[28]</sup>,即

$$i \frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + [V(X) + iW(X)]U + \sigma |U|^2 U = 0, \quad (4)$$

式中: $U$  表示无量纲的振幅; $X$  表示横向坐标; $Z$  表示传播距离; $V(X) = \frac{k^2 a^2}{n_0} n_R(x)$ ,  $W(X) = \frac{k^2 a^2}{n_0} \cdot n_1(x)$  分别表示无量纲的折射率和增益/损耗分布<sup>[30]</sup>; $\sigma = n_2/|n_2| = \pm 1$ , 其中“ $\pm$ ”分别代表波导中的自聚焦和自散焦非线性效应。

PT 对称波导的折射率和增益/损耗分布可用高斯形式<sup>[28]</sup>表示为

$$V(X) = V_0 \exp(-X^2), \quad W(X) = W_0 X \exp(-X^2), \quad (5)$$

式中: $V_0$ 、 $W_0$  分别表示折射率分布和增益/损耗分布的强度。文献<sup>[28, 31]</sup>指出,对于高斯分布的复 PT 对称势,当折射率分布的强度比增益/损耗分布强,即  $|V_0| > |W_0|$  时,该 PT 对称系统具有实的本征谱,否则该系统的本征值处于混合状态。本文只考虑实本征谱的情况。(5)式描述的 PT 对称平板波导示意图如图 1 所示。

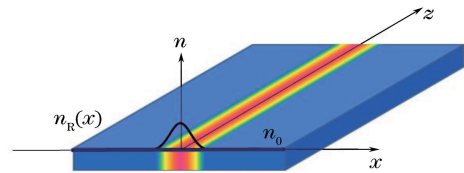


图 1 PT 对称平板波导示意图

Fig. 1 Schematic of PT-symmetric planar waveguide

图 2 所示为强度  $V_0 = 1$ ,  $W_0 = 0.8$  时,PT 对称波导的实部折射率分布函数  $V(X)$ ,虚部增益/损耗分布函数  $W(X)$  的曲线图。由图 2 可知,波导折射率分布函数  $V(X)$  在 PT 对称波导中心处的值最大,即波导中心的折射率最大,远离中心,其折射率

逐渐减小,所以 PT 对称波导中心具有束缚光的作用。对于波导的增益/损耗分布函数  $W(X)$ , 孤子在  $X < 0$  区域产生损耗,而在  $X > 0$  区域获得增益。

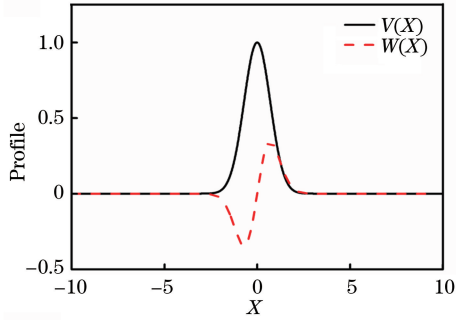


图 2 折射率分布函数  $V(X)$  和增益/损耗分布函数  $W(X)$  的曲线图 ( $V_0=1, W_0=0.8, \eta=1$ )

Fig. 2 Curves of refractive-index distribution function  $V(X)$  and gain/loss distribution function  $W(X)$  ( $V_0=1, W_0=0.8, \eta=1$ )

由于大多数激光器的输出都是高斯光束,因此下面主要讨论高斯光波在 PT 对称波导中的传输控制特性。

### 3 数值模拟结果及讨论

高斯光波的横截面场分布满足高斯分布。一维基模、一阶和二阶高斯光波的无量纲场分布  $U_0, U_1$

和  $U_2$  可分别表示为

$$U_0(X, 0) = \exp\left(-\frac{X^2}{2\eta^2}\right), \quad (6)$$

$$U_1(X, 0) = 2 \frac{X}{\eta} \exp\left(-\frac{X^2}{2\eta^2}\right), \quad (7)$$

$$U_2(X, 0) = \left[4\left(\frac{X}{\eta}\right)^2 - 2\right] \exp\left(-\frac{X^2}{2\eta^2}\right), \quad (8)$$

式中:  $\eta$  表示高斯光波的宽度。

#### 3.1 基模高斯光波在高斯型 PT 对称波导中的传输特性

下面讨论基模高斯光波在 PT 对称克尔非线性介质波导中的传输。通过 MATLAB 软件,采用分步傅里叶变换算法进行数值模拟。图 3 给出了基模高斯光波在普通克尔非线性介质中的传输。从图 3 中可以看出,当高斯光波的宽度  $\eta=0.7$  时,光波承受的衍射效应大于自聚焦克尔非线性效应,光波在传输过程中不断被展宽,如图 3(a) 所示。当高斯光波宽度逐渐增大时,衍射效应逐渐减小,光波逐渐被束缚,如图 3(b) 和 3(c) 所示,光波几乎可以呈直线型稳定传输。而图 3(d) 中,当宽度  $\eta=3$  时,光波在波导中的衍射效应小于自聚焦克尔非线性效应,于是在自聚焦类透镜的作用下,光波在传输过程中呈现周期会聚的形式。

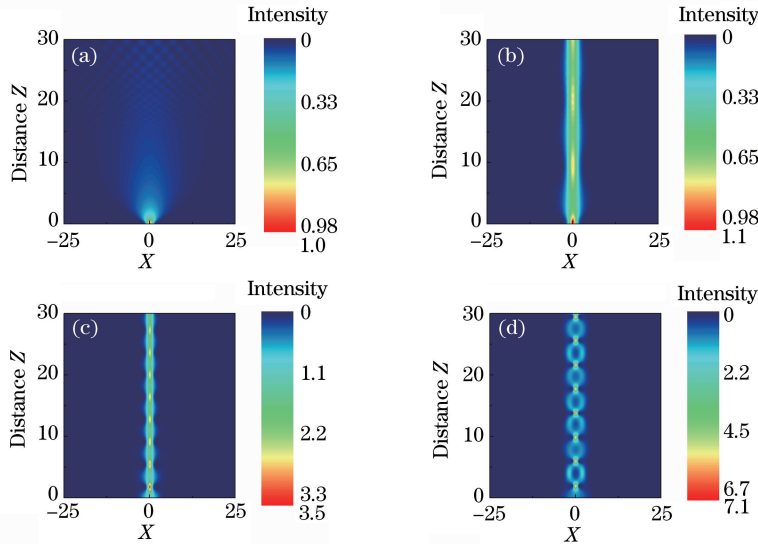


图 3 基模高斯光波在只有衍射和克尔非线性效应的普通克尔非线性介质波导中的传输演化图, 光波强度  $V_0=0, W_0=0$ 。(a)  $\eta=0.7$ ; (b)  $\eta=1$ ; (c)  $\eta=2$ ; (d)  $\eta=3$

Fig. 3 Propagation evolutions of fundamental-mode Gaussian optical waves in ordinary Kerr nonlinear media waveguide which only includes diffraction and nonlinear effect, when  $V_0=0$  and  $W_0=0$ .

(a)  $\eta=0.7$ ; (b)  $\eta=1$ ; (c)  $\eta=2$ ; (d)  $\eta=3$

图 4 所示为基模高斯光波的波形图和折射率分布函数  $V(X)$  的曲线对比图,当光波的宽度  $\eta=0.7$  时,其波形图与折射率分布函数  $V(X)$  几乎完全重

合。图 5 所示为不同宽度的高斯光波在 PT 对称克尔非线性平面波导中的传输演化图。从图 5(a) 和 5(b) 中可以看出,当  $\eta=0.7, 1$  时,高斯光波在高斯

型 PT 对称波导的调制下,形成了波浪形光束沿直线传输。这是因为当  $\eta=0.7, 1$  时,图 4 所示的初始输入的基阶高斯光波的波形宽度与  $V_0=1$  时的折射率分布函数  $V(X)$  波形宽度相近,从而光波可以很好地被波导束缚。随着光波宽度增大至大于 2 时,光波传输变得不稳定,如图 5(c)和 5(d)所示。当折射率分布强度  $V_0$  大于 0 且逐渐增大时,基阶高斯光波的传输演化图如图 6 所示。从图 6 可看出,随着强度  $V_0$  的增大,即波导中心的折射率逐渐增加,PT 对称波导对光波的束缚能力也逐渐增强,波浪形光束的振荡频率增加,振荡幅度减小,光波的强度逐渐增加,而光束宽度逐渐减小。相对于图 3 中没有 PT 对称波导作用时的传输演化,特别是图 3(a)中的光波展宽,其传输是稳定的,光波的宽度和功率呈周期性变化,长距离传输不发生展宽,类似于孤子。

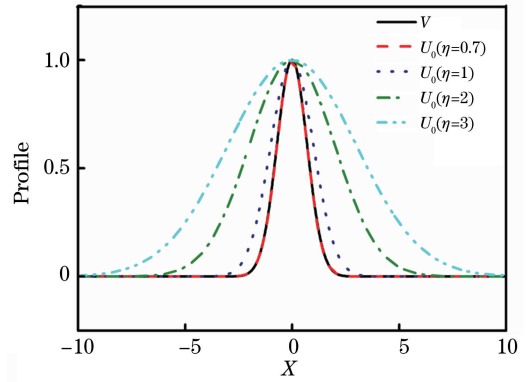


图 4 基模高斯光波的波形图和折射率分布函数曲线图,  $V_0=1$

Fig. 4 Waveform of fundamental-mode Gaussian optical wave and curves of refractive-index distribution function when  $V_0=1$

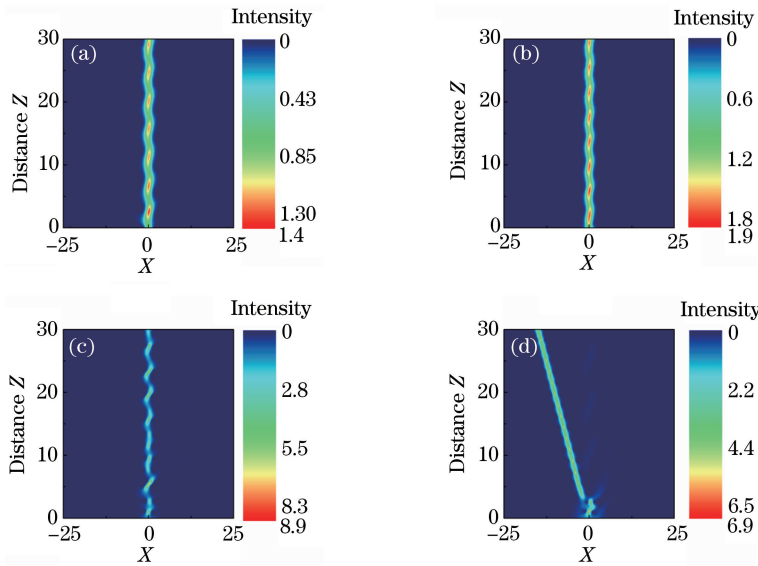


图 5 基模高斯光波在高斯型 PT 对称克尔非线性波导中的传输演化图,  $V_0=1, W_0=0.8$ 。

(a)  $\eta=0.7$ ; (b)  $\eta=1$ ; (c)  $\eta=2$ ; (d)  $\eta=3$

Fig. 5 Propagation evolutions of fundamental-mode Gaussian optical waves in Gaussian PT-symmetric Kerr nonlinear waveguide when  $V_0=1$  and  $W_0=0.8$ . (a)  $\eta=0.7$ ; (b)  $\eta=1$ ; (c)  $\eta=2$ ; (d)  $\eta=3$

图 7 所示为当  $V_0=1, W_0$  分别取  $0.8, 0, -0.8$  时,基阶高斯光波的传输演化图。由文献[29]可知,复折射率的增益/损耗分布  $W(X)$  可以引起光波的横向流动,分布强度  $W_0$  的正负可以控制波的起始传输方向。从图 7(a)中可看出,当  $W_0=0.8$  时,在初始输入端,形成的波浪形光束的光波先向左传输再向右传输。从图 7 中可以看出,当  $W_0=-0.8$  时,光波传输方向与图 7(a)中的正好相反。这是因为当  $V_0=1$  时,  $X<0$  区域呈现的是损耗,说明光波在传输过程中先向左流向损耗区域,然后在波导中

心折射率的束缚下向右返回到中心区域,接着流向增益区域,如此周期循环下去,形成了稳定的波浪形光束。图 7(b)给出了当  $W_0=0$  时光波的演化图。 $W_0=0$ ,即 PT 对称波导中没有增益/损耗。从图 7(b)可看出光波可以被束缚在波导中心呈直线稳定传输。

综上所述,根据高斯型 PT 对称波导的折射率分布可以控制基模高斯光波形成波浪形光束,而根据波导的增益/损耗分布可以控制高斯光波的横向流动。

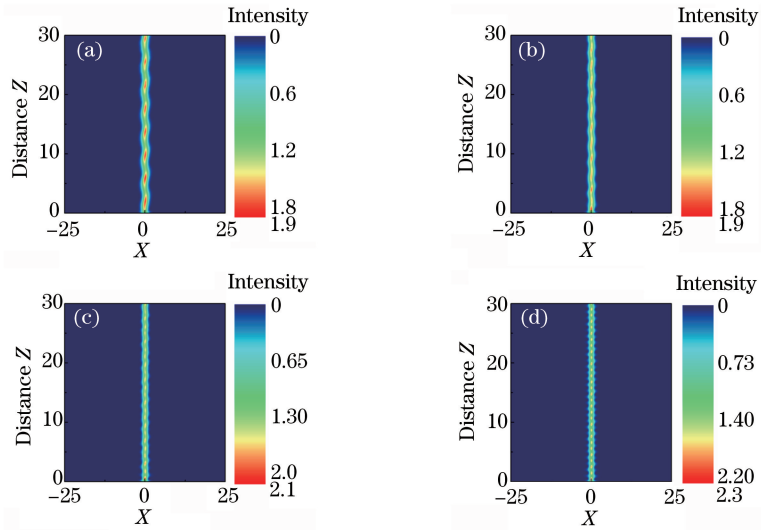


图 6 基模高斯光波在高斯型 PT 对称克尔非线性波导中的传输演化图,  $W_0=0.8, \eta=1$ 。

(a)  $V_0=1$ ; (b)  $V_0=2$ ; (c)  $V_0=3$ ; (d)  $V_0=4$

Fig. 6 Propagation evolutions of fundamental-mode Gaussian optical waves in Gaussian PT-symmetric Kerr nonlinear waveguide when  $W_0=0.8$  and  $\eta=1$ . (a)  $V_0=1$ ; (b)  $V_0=2$ ; (c)  $V_0=3$ ; (d)  $V_0=4$

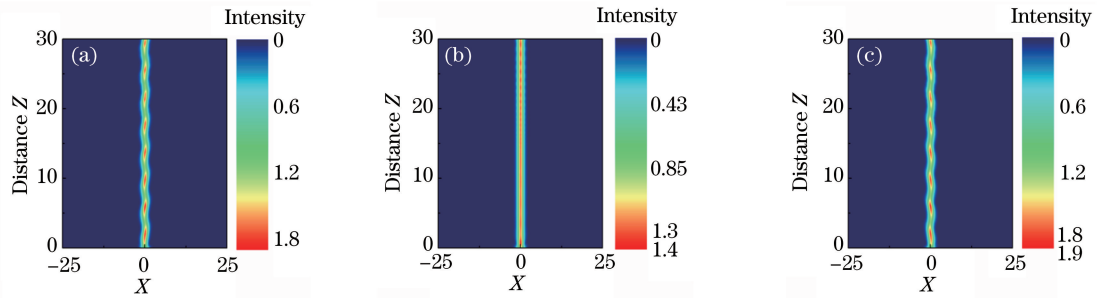


图 7 基模高斯光波在高斯型 PT 对称克尔非线性波导中的传输演化图,  $V_0=1, \eta=1$ 。

(a)  $W_0=0.8$ ; (b)  $W_0=0$ ; (c)  $W_0=-0.8$

Fig. 7 Propagation evolutions of fundamental-mode Gaussian optical waves in Gaussian PT-symmetric Kerr nonlinear waveguide when  $V_0=1$  and  $\eta=1$ . (a)  $W_0=0.8$ ; (b)  $W_0=0$ ; (c)  $W_0=-0.8$

### 3.2 一阶高斯光波在高斯型 PT 对称波导中的传输特性

图 8 所示为一阶高斯光波的波形图和折射率分布函数  $V(X)$  的曲线对比图。图 9 所示为当折射率分布函数的强度  $V_0$  逐渐增加时, 一阶高斯光波在高斯型 PT 对称克尔非线性波导中的传输图。从图 9(a) 中可知, 当  $V_0=1$  时, 一阶高斯光波的两束光会出现周期会聚的现象。而当折射率分布函数的强度  $V_0$  逐渐增大时, 一阶高斯光波的两束光被束缚在一起, 沿直线平行地稳定传输, 如图 9(b)~(d) 所示。这是因为当  $V_0$  逐渐增大时, PT 对称波导的中心折射率逐渐增大, 从而使得波导对光波的束缚能力逐渐增强, 因此光波被束缚在中心稳定地传输。经模拟发现, 当  $V_0 \geq 2, 0 \leq W_0 < 1$  时, 一阶高斯光波才能被束缚, 平行地稳定传输。在获得增益的区域,

光波峰值功率增加, 因而在传输过程中会周期性地形成高功率的光波。

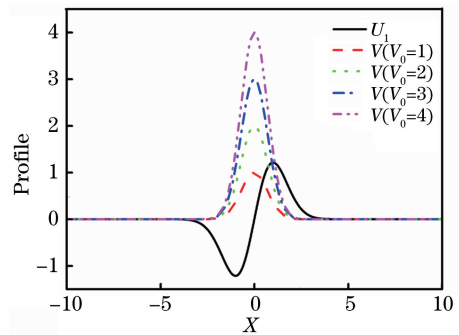


图 8 一阶高斯光波的波形图与折射率分布函数  $V(X)$  的曲线对比图,  $\eta=1$

Fig. 8 Waveform of first-order Gaussian optical wave and curves of refractive-index distribution function  $V(X)$  when  $\eta=1$

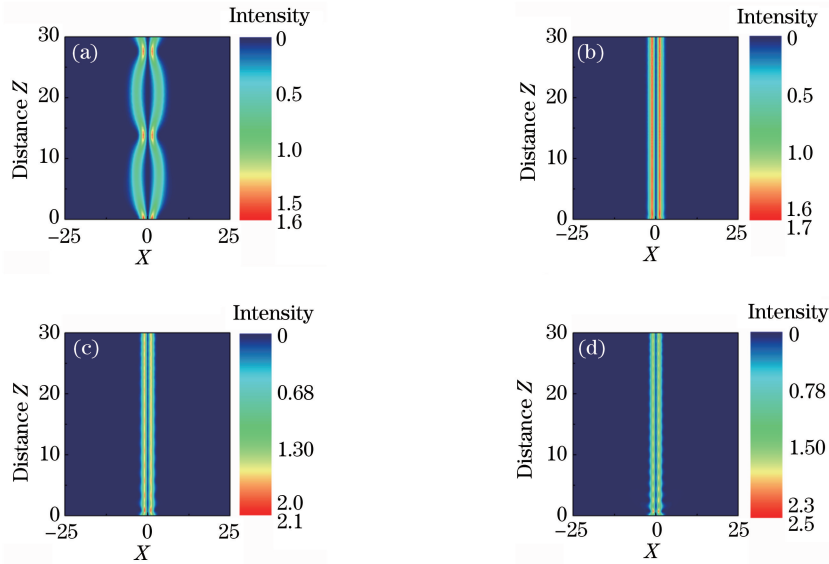


图 9 一阶高斯光波在高斯型 PT 对称克尔非线性波导中的传输演化图,  $W_0=0$ ,  $\eta=1$ 。  
(a)  $V_0=1$ ; (b)  $V_0=2$ ; (c)  $V_0=3$ ; (d)  $V_0=4$

Fig. 9 Propagation evolutions of first-order Gaussian optical wave in Gaussian PT-symmetric Kerr nonlinear waveguide when  $W_0=0$  and  $\eta=1$ . (a)  $V_0=1$ ; (b)  $V_0=2$ ; (c)  $V_0=3$ ; (d)  $V_0=4$

图 10 所示为在不同的增益/损耗强度  $W_0$  下, 一阶高斯光波在高斯型 PT 对称克尔非线性波导中的传输演化图。当  $W_0=0$  时, 即 PT 对称波导中没有增益/损耗时, 光波被束缚在波导中心, 波导中的两

束光平行地稳定传输, 如图 10(b)所示。当  $W_0=0.8$ ,  $-0.8$  时, 一阶高斯光波具有相似的传输特性, 但由于增益/损耗强度  $W_0$  的正负可以控制光波能量的横向流动, 因此两种情况下能量横向流动的方向相反。

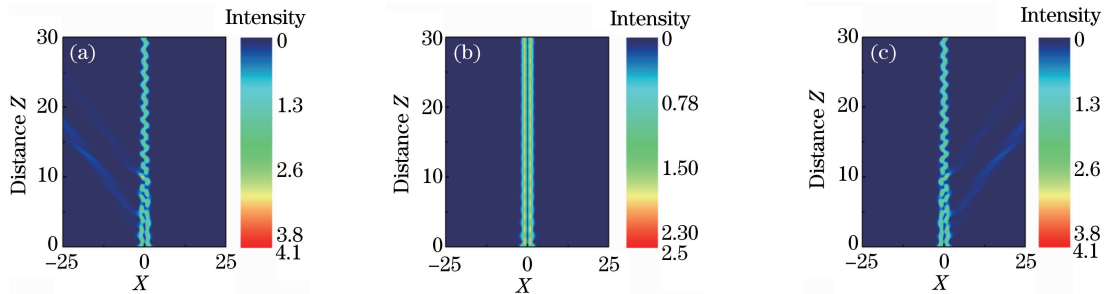


图 10 一阶高斯光波在高斯型 PT 对称克尔非线性波导中的传输演化图,  $V_0=4$ ,  $\eta=1$ 。  
(a)  $W_0=0.8$ ; (b)  $W_0=0$ ; (c)  $W_0=-0.8$

Fig. 10 Propagation evolutions of first-order Gaussian optical waves in Gaussian PT-symmetric Kerr nonlinear waveguide when  $V_0=4$  and  $\eta=1$ . (a)  $W_0=0.8$ ; (b)  $W_0=0$ ; (c)  $W_0=-0.8$

### 3.3 二阶高斯光波在高斯型 PT 对称波导中的传输特性

图 11 给出了二阶高斯光波的波形图和折射率分布函数  $V(X)$  的曲线对比图。由图 11 可知, 二阶高斯光波在传输过程中会形成三束光束, 并且相邻两束光的相位相反。图 12 所示为折射率分布强度  $V_0$  取不同值时, 二阶高斯光波在高斯型 PT 对称波导中的传输图。当折射率分布强度  $V_0$  较小时, PT 对称波导的束缚力较弱, 二阶高斯光

波的二束光发生周期性碰撞, 如图 12(a)、(b)所示。当折射率分布强度  $V_0=2$  时, PT 对称波导的束缚力增强, 二阶高斯光波中相邻两光束相互排斥, 如图 12(c)所示。当折射率分布强度  $V_0=3$  时, 二阶高斯光波才可以较好地被束缚在 PT 对称波导的中心, 如图 12(d)所示。

综上, 二阶高斯光波被波导束缚所需的折射率强度要大于一阶高斯光波的。这表明光波的阶数越高, PT 对称波导束缚光波所需的折射率也越高。

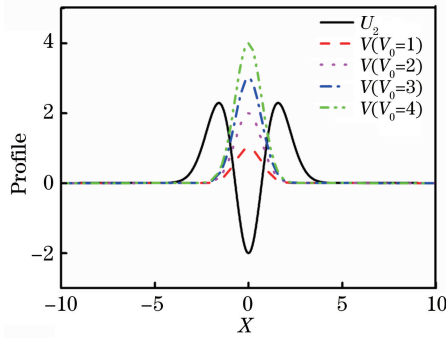


图 11 二阶高斯光波的波形图与折射率分布函数  $V(X)$  曲线对比图,  $\eta=1$

Fig. 11 Waveform of second-order Gaussian optical wave and curves of refractive-index distribution function  $V(X)$  when  $\eta=1$

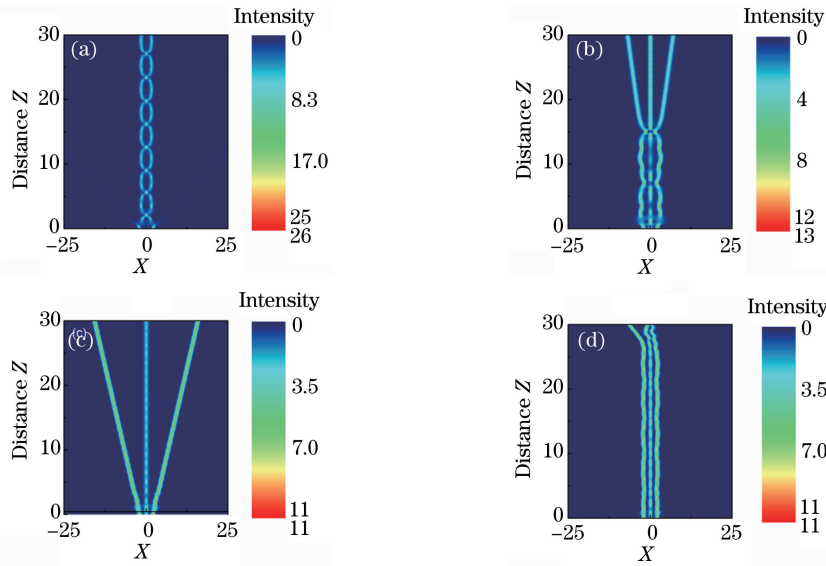


图 12 二阶高斯光波在高斯型 PT 对称克尔非线性波导中的传输演化图,  $W_0=0, \eta=1$ 。

(a)  $V_0=0$ ; (b)  $V_0=1$ ; (c)  $V_0=2$ ; (d)  $V_0=3$

Fig. 12 Propagation evolutions of second-order Gaussian optical waves in Gaussian PT-symmetric Kerr nonlinear waveguide when  $W_0=0$  and  $\eta=1$ . (a)  $V_0=0$ ; (b)  $V_0=1$ ; (c)  $V_0=2$ ; (d)  $V_0=3$

## 4 结 论

基于光波在 PT 对称波导中传输的理论模型, 分别讨论了基模、一阶、二阶高斯光波在 PT 对称克尔非线性波导中的传输控制。结果表明: 基模高斯光波在高斯型 PT 对称波导中传输时, 在光波宽度与波导折射率分布宽度近似相等的情况下, 可以形成稳定传输的波浪形光束; 随着折射率分布强度的增加, 波浪形光束的振荡频率增加, 振荡幅度减小, 光波的强度逐渐增加, 光束的宽度逐渐减小。一阶高斯光波在 PT 对称波导中传输时, 只有当折射率分布函数强度  $V_0$  较大时, 一阶高斯光波的两束光才可以被束缚在一起稳定地传输, 而二阶高斯光波稳定传输则需要更大的折射率分布强度。说明光波

的阶数越高, 束缚光波所需的折射率也随之增加。增益/损耗强度可以控制高斯光波能量的横向流动。

## 参 考 文 献

- [1] Bender C M, Boettcher S. Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having PT symmetry [J]. Physical Review Letters, 1998, 80(24): 5243-5246.
- [2] Bender C M. Making sense of non-Hermitian Hamiltonians [J]. Reports on Progress in Physics, 2007, 70(6): 947-1018.
- [3] El-Ganainy R, Makris K G, Christodoulides D N, et al. Theory of coupled optical PT-symmetric structures [J]. Optics Letters, 2007, 32(17): 2632-2634.
- [4] Rüter C E, Makris K G, El-Ganainy R, et al. Observation of parity - time symmetry in optics [J]. Nature Physics, 2010, 6(3): 192-195.

- [5] Guo A, Salamo G J, Duchesne D, et al. Observation of PT-symmetry breaking in complex optical potentials[J]. *Physical Review Letters*, 2009, 103(9): 093902.
- [6] Wang Y Y, Xia J, Fang Y T. Unique non-reciprocal mode with a parity-time symmetric structure under magneto-optic effects[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2018, 45(12): 1213001.  
王誉雅, 夏景, 方云团. 磁光效应下 PT 对称结构独特的非互易传输模式[J]. *中国激光*, 2018, 45(12): 1213001.
- [7] Lin Z, Ramezani H, Eichelkraut T, et al. Unidirectional invisibility induced by PT-symmetric periodic structures [J]. *Physical Review Letters*, 2011, 106(21): 213901.
- [8] Longhi S. Invisibility in PT-symmetric complex crystals[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2011, 44(48): 485302.
- [9] Longhi S. PT-symmetric laser absorber[J]. *Physical Review A*, 2010, 82(3): 031801.
- [10] Chong Y D, Ge L, Cao H, et al. Coherent perfect absorbers: time-reversed lasers [J]. *Physical Review Letters*, 2010, 105(5): 053901.
- [11] Sun Y, Tan W, Li H Q, et al. Experimental demonstration of a coherent perfect absorber with PT phase transition[J]. *Physical Review Letters*, 2014, 112(14): 143903.
- [12] Nazari F, Nazari M, Moravvej-Farshi M K. A  $2 \times 2$  spatial optical switch based on PT-symmetry [J]. *Optics Letters*, 2011, 36(22): 4368-4370.
- [13] Feng L, Xu Y L, Fegadolli W S, et al. Experimental demonstration of a unidirectional reflectionless parity-time metamaterial at optical frequencies [J]. *Nature Materials*, 2013, 12(2): 108-113.
- [14] Chang L, Jiang X S, Hua S Y, et al. Parity-time symmetry and variable optical isolation in active-passive-coupled microresonators [J]. *Nature Photonics*, 2014, 8(7): 524-529.
- [15] Musslimani Z H, Makris K G, El-Ganainy R, et al. Optical solitons in PT periodic potentials [J]. *Physical Review Letters*, 2008, 100(3): 030402.
- [16] Zhang C H, Xu S L. Multipole solitons in two dimensions PT-symmetric optical potentials[J]. *Acta Optica Sinica*, 2016, 36(2): 0219001.  
章臣浩, 徐四六. 二维 PT 对称晶格势中的多极光孤子[J]. *光学学报*, 2016, 36(2): 0219001.
- [17] Li Y L, Qin Y L, Mao S Y, et al. Propagation characteristics of optical solitons in parity-time symmetric potentials with longitudinal barriers [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2017, 54(8): 081901.  
李屹磊, 覃亚丽, 毛盛益, 等. 宇称-时间对称纵向势垒中光孤子的传播特性[J]. *激光与光电子学进展*, 2017, 54(8): 081901.
- [18] Makris K G, El-Ganainy R, Christodoulides D N, et al. PT-symmetric optical lattices [J]. *Physical Review A*, 2010, 81(6): 063807.
- [19] Nixon S, Ge L J, Yang J K. Stability analysis for solitons in PT-symmetric optical lattices[J]. *Physical Review A*, 2012, 85(2): 023822.
- [20] Abdullaev F K, Kartashov Y V, Konotop V V, et al. Solitons in PT-symmetric nonlinear lattices[J]. *Physical Review A*, 2011, 83(4): 041805.
- [21] Miri M A, Aceves A B, Kottos T, et al. Bragg solitons in nonlinear PT-symmetric periodic potentials [J]. *Physical Review A*, 2012, 86(3): 033801.
- [22] He Y J, Zhu X, Mihalache D, et al. Lattice solitons in PT-symmetric mixed linear-nonlinear optical lattices [J]. *Physical Review A*, 2012, 85(1): 013831.
- [23] Shi Z, Jiang X, Zhu X, et al. Bright spatial solitons in defocusing Kerr media with PT-symmetric potentials[J]. *Physical Review A*, 2011, 84(5): 053855.
- [24] Khare A, Al-Marzoug S M, Bahlouli H. Solitons in PT-symmetric potential with competing nonlinearity [J]. *Physics Letters A*, 2012, 376(45): 2880-2886.
- [25] Midya B, Roychoudhury R. Nonlinear localized modes in PT-symmetric optical media with competing gain and loss[J]. *Annals of Physics*, 2014, 341: 12-20.
- [26] Al Khawaja U, Al-Marzoug S M, Bahlouli H, et al. Unidirectional soliton flows in PT-symmetric potentials[J]. *Physical Review A*, 2013, 88(2): 023830.
- [27] Xu Y J, Dai C Q. Nonlinear tunnelling of spatial solitons in PT-symmetric potential [J]. *Optics Communications*, 2014, 318: 112-119.
- [28] Hu S M, Ma X K, Lu D Q, et al. Solitons supported by complex PT-symmetric Gaussian potentials [J]. *Physical Review A*, 2011, 84(4): 043818.
- [29] Dang T T, Wang J F, An Y D, et al. Transmission and control of bright solitons in parity-time symmetric waveguide[J]. *Acta Physica Sinica*, 2015, 64(6): 064211.  
党婷婷, 王娟芬, 安亚东, 等. 亮孤子在宇称时间对称波导中的传输和控制[J]. *物理学报*, 2015, 64(6): 064211.
- [30] Chen Y X, Dai C Q, Wang X G. Two-dimensional nonautonomous solitons in parity-time symmetric optical media [J]. *Optics Communications*, 2014, 324: 10-17.
- [31] Ahmed Z. Real and complex discrete eigenvalues in an exactly solvable one-dimensional complex PT-invariant potential[J]. *Physics Letters A*, 2001, 282(6): 343-348.