# 基于最小一乘拟合的非均匀应变的数字图像相关测量

王学滨<sup>1,2\*</sup>,董伟<sup>2\*\*</sup>,杨梅<sup>3</sup>,张博闻<sup>2</sup>,余斌<sup>2</sup> <sup>1</sup>辽宁工程技术大学计算力学研究所,辽宁 阜新 123000; <sup>2</sup>辽宁工程技术大学力学与工程学院,辽宁 阜新 123000; <sup>3</sup>辽宁工程技术大学机械工程学院,辽宁 阜新 123000

**摘要** 数字图像相关 (DIC) 方法是一种重要的位移和应变非接触式测量方法。为了对物体的非均匀应变进行准确测量,在 DIC 方法中引入位移最小一乘拟合,鉴于最小一乘拟合解析方法求解困难,采用基于模拟退火的混合粒子群算法进行求解。开展了虚拟剪切带形成的数值实验和相似材料断层滑移实验,并对非均匀变形条件下最小一乘拟合和最小二乘拟合的应变测量结果进行对比。研究发现:对于非均匀应变测量,最小一乘拟合的结果要优于最小二乘拟合;而对于均匀应变测量,两种方法具有相同的精度。 关键词 测量;数字图像相关方法;非均匀应变;最小一乘拟合;最小二乘拟合

**中图分类号** O348.1 **文献标志码** A

# Inhomogeneous Strain Measurement Based on Least Absolute Deviation Fitting for Digital Image Correlation

Wang Xuebin<sup>1,2\*</sup>, Dong Wei<sup>2\*\*</sup>, Yang Mei<sup>3</sup>, Zhang Bowen<sup>2</sup>, Yu Bin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institute of Computational Mechanics, Liaoning Technical University, Fuxin, Liaoning 123000, China;

<sup>2</sup> School of Mechanics & Engineering, Liaoning Technical University, Fuxin, Liaoning 123000, China;

<sup>3</sup> School of Mechanical Engineering, Liaoning Technical University, Fuxin, Liaoning 123000, China

**Abstract** The digital image correlation (DIC) method is an important non-contact displacement and strain measurement method. To accurately measure inhomogeneous strain, least absolute deviation fitting of displacements is introduced into the DIC method. As least absolute deviation fitting cannot be solved by analytical methods, a hybrid particle swarm optimization algorithm based on simulated annealing is used. By conducting numerical experiments on the formation of fictitious shear band and the similar material fault slip experiment, the strain measurement results of least square fitting and least absolute deviation fitting for inhomogeneous strain measurements are compared. Results show that the inhomogeneous strain measurement accuracy for least absolute deviation fitting is better than that for least square fitting, while these two methods exhibit the same accuracy for the homogeneous strain measurement.

Key words measurement; digital image correlation method; inhomogeneous strain; least absolute deviation fitting; least square fitting

**OCIS codes** 120.3940; 100.2000; 120.6150

1引言

数字图像相关(DIC)方法<sup>[1-2]</sup>是一种关于物体 表面变形的测量方法,具有非接触、全场、操作简单、 对设备要求低等特点<sup>[3]</sup>,在力学、机械、土木等领域 得到了广泛的应用<sup>[4-6]</sup>。在采用 DIC 方法对物体的 变形进行测量时,人们更关注于物体的应变测量。 在进行相关搜索过程中,有的 DIC 方法能直接获得 应变,例如传统的牛顿-拉斐逊方法<sup>[7]</sup>,但是由于图 像噪声和搜索算法误差的存在,直接获得的应变只 在一定范围内可靠<sup>[8]</sup>,因此,人们对采用 DIC 方法 获得的离散位移进行处理来获得应变,常用的处理 方法包括有限元平滑<sup>[9]</sup>和最小二乘拟合<sup>[10-12]</sup>。有限 元平滑通过将离散的位移数据组装成刚度矩阵,可

doi: 10.3788/AOS202040.0312001

收稿日期: 2019-08-01;修回日期: 2019-09-09;录用日期: 2019-10-08

**基金项目:**国家自然科学基金(51874162)

<sup>\*</sup> E-mail: wxbbb@263.net; \*\* E-mail: dwlntu016@126.com

一次性获得所有测点的应变,但该方法对划分节点 网格质量要求很高,且编程较为复杂。最小二乘拟 合易于编程实现,广大科研人员易于接受,已经成为 DIC 方法中获取应变的重要方法。

众所周知,对于均匀应变测量,最小二乘拟合具 有很高的精度<sup>[10-12]</sup>。然而,在许多情形下,需要对非 均匀应变进行测量,例如材料应变局部化时<sup>[13-14]</sup>。 对于非均匀应变测量,最小二乘拟合可能会存在较 大的误差,这是由于当应变计算窗口位于非均匀变 形区域时,计算窗口内少数测点的应变与其他测点 的差别较大,这相当于计算窗口中出现了"异常值"。 最小二乘拟合对"异常值"的稳健性较差,可造成测 量的应变偏离真实值,这是由于最小二乘拟合使用 了平方函数对位移偏差进行估计,这容易放大"异常 值"的影响<sup>[15]</sup>。为了抑制"异常值"的影响,人们采 用绝对值函数取代平方函数来进行位移偏差估计, 由此提出数据拟合中的一种稳健方法——最小一乘 拟合。虽然最小一乘拟合的提出比最小二乘拟合还 早 40 多年,但是采用绝对值函数来进行偏差计算, 解析求解困难,导致其应用较少<sup>[16]</sup>。

本文对采用 DIC 方法获得的离散位移进行最 小一乘拟合以测量非均匀应变。鉴于位移最小一乘 拟合解析方法求解困难,采用基于模拟退火的粒子 群算法<sup>[17-18]</sup>进行求解。通过开展含应变梯度的水平 剪切带形成的数值实验和相似材料断层滑移实验, 验证了典型非均匀变形(应变局部化)条件下最小一 乘拟合的应变测量结果的准确性。

## 2 DIC 方法原理

DIC方法通过对变形前后图像的相关运算进 行物体应变测量,其原理如图 1 所示。在参考图 像上,选择  $P(x_0, y_0)$ 为中心点,尺寸为(2M+1)pixel×(2M+1)pixel的样本子区,通过相关运算 在目标图像上找到与样本子区最相似的目标子 区,其子区中心点  $P'(x'_0, y'_0)$ 即为变形后  $P(x_0, y_0)$ 的位置。



图 1 DIC 方法原理图

Fig. 1 Schematic of DIC method

样本子区和目标子区的相似性可以用相关系数 表示,一般采用 C<sub>zNCC</sub> 相关系数来表示两个子区的相 关程度<sup>[19]</sup>。设样本子区的灰度为 f,目标子区的灰 度为g,则 $P(x_0, y_0)$ 的灰度为 $f(x_0, y_0), P'(x'_0, y'_0)$ 的灰度为 $g(x'_0, y'_0)$ ,则两个子区的相关系数  $C_{\text{ZNCC}}$ 可以表示为

$$C_{\rm ZNCC} = \frac{\sum_{i_0 = -M}^{M} \sum_{j_0 = -M}^{M} [f(x_0 + i_0, y_0 + j_0) - \bar{f}] [g(x'_0 + i_0, y'_0 + j_0) - \bar{g}]}{\sqrt{\sum_{i_0 = -M}^{M} \sum_{j_0 = -M}^{M} [f(x_0 + i_0, y_0 + j_0) - \bar{f}]^2 \sum_{i_0 = -M}^{M} \sum_{j_0 = -M}^{M} [g(x'_0 + i_0, y'_0 + j_0) - \bar{g}]^2}}, \quad (1)$$

 $\vec{x} \oplus : \bar{f} = \sum_{i_0 = -M}^{M} \sum_{j_0 = -M}^{M} f(x_0 + i_0, y_0 + j_0) / (2M + 1)^2 ; \bar{g} = \sum_{i_0 = -M}^{M} \sum_{j_0 = -M}^{M} g(x'_0 + i_0, y'_0 + j_0) / (2M + 1)^2 .$ 

在求解 C<sub>ZNCC</sub>的极值时,还需要给定样本子区的 形函数,常用的有一阶形函数和二阶形函数<sup>[3]</sup>。由 于样本子区变形后并不总是在整像素位置,因此需 要对目标图像进行灰度插值,常用的灰度插值函数 是三次样条函数。

一般采用牛顿-拉菲逊算法<sup>[7]</sup>或反向组合高斯 牛顿法<sup>[20]</sup>对 C<sub>ZNCC</sub>进行优化,虽然在优化过程中也 可以直接获得应变,但仅当应变大于 0.01 时结果才 可靠<sup>[8]</sup>。因此,考虑对采用 DIC 方法获得的位移场 进行平滑或拟合以获得应变场。 3 最小一乘拟合应变测量方法

### 3.1 基于位移拟合的位移计算公式

采用 DIC 方法直接获得的位移是离散的,通常 需要对其进行处理来获得应变。在利用位移拟合获 得应变时,一般计算窗口内的测点数目为(2*m*+1)× (2*m*+1)。

在进行拟合时,常用一次多项式函数,表示为

$$\begin{cases} u = a_0 + a_1 x + a_2 y \\ v = b_0 + b_1 x + b_2 y \end{cases},$$
 (2)

式中:u、v分别为点(x,y)的水平位移和垂直位移;  $a_0$ 、 $a_1$ 、 $a_2$ 、 $b_0$ 、 $b_1$ 、 $b_2$ 为系数。计算窗口内水平线应 变( $\varepsilon_x$ )、垂直线应变( $\varepsilon_y$ )以及剪应变( $\gamma_{xy}$ )可用多项 式的系数表示,分别为

$$\begin{cases} \varepsilon_{x} = \frac{\partial u}{\partial x} = a_{1} \\ \varepsilon_{y} = \frac{\partial v}{\partial y} = b_{2} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_{2} + b_{1} \end{cases}$$
(3)

### 3.2 最小二乘拟合的局限性

最小二乘拟合的主要思想是使计算窗口内测点 的位移拟合值与测量值偏差的平方和 *E*<sub>u</sub> 达到最 小。*E*<sub>u</sub> 可以表示为

$$E_{u} = \sum_{i=-m}^{m} \sum_{j=-m}^{m} (a_{0} + a_{1} \times x_{ij} + a_{2} \times y_{ij} - u_{ij})^{2},$$

式中: $(x_{ij}, y_{ij})$ 为计算窗口内测点的坐标; $u_{ij}$ 为测 点的位移测量值。

对于均匀变形条件下的应变测量,最小二乘拟 合具有很高的精度。然而,对于非均匀变形条件下 的应变测量,例如,应变局部化带内的应变测量,最 小二乘拟合可能引起较大的误差。当计算窗口位于 非均匀变形区域时,计算窗口内部分测点的应变与 其他测点的应变相差较大,相当于计算窗口中出现 了"异常值"。最小二乘拟合采用平方函数衡量偏 差,会加大数据中异常值破坏性的影响。

为抑制计算窗口中"异常值"对应变测量的影响,采用绝对值函数取代平方函数,由此出现了最小一乘拟合。

### 3.3 最小一乘拟合求解

在对测点位移进行最小一乘拟合时,要求计算 窗口内位移拟合值和测量值 *u*<sub>ij</sub>误差的绝对值之和 *E*<sub>1</sub>最小。*E*<sub>1</sub>可以表示为

$$E_{1} = \sum_{i=-m}^{m} \sum_{j=-m}^{m} |a_{0} + a_{1} \times x_{ij} + a_{2} \times y_{ij} - u_{ij}|.$$
<sup>(5)</sup>

由于(5)式中绝对值的存在,采用解析法难以求其 极值。(5)式的极值问题本质上是一个多元函数的最 优化问题,可采用粒子群算法进行求解。粒子群算法 是一种随机算法,若参数选择不合适,很容易陷人局部 最优。粒子群算法通过更新粒子位置使 E<sub>1</sub>获得全局 最优解,若全局最优粒子获得的是局部最优解,则粒子 群算法会限入局部最优,不易跳出。可以利用模拟退 火算法产生新的全局最优粒子来替代粒子群算法产生 的全局最优粒子,这样即可有效地跳出粒子群算法的 局部最优,从而获得全局最优解。具体步骤<sup>[17]</sup>如下。

 初始化各粒子的速度 V(k,d)和位置 A(k, d),其中 k 表示粒子序数,k=1,2,...,N<sub>0</sub>,N<sub>0</sub>表示粒 子的个数,取 N<sub>0</sub>=30,d 表示粒子的维度,d=1~3。

2) 计算各粒子的适应度  $e_k$ ,确定粒子适应度最 小的粒子,  $e_g = \min(e_k)$ ,该粒子为全局最优粒子  $p_g$ ,并初始化局部最优粒子 P(k,d),其中 P(k,d)=A(k,d)。

$$e_{k} = \sum_{i=-m}^{m} \sum_{j=-m}^{m} |A(k,1) + A(k,2) \times x_{ij} + A(k,3) \times y_{ij} - u_{ij}|_{\circ}$$
(6)

3) 令初始温度  $T = e_g$ ,计算当前温度下各粒子的适应值  $F_k$ ,并找出  $p_g$ 的替代值  $p_L$ 。

$$F_{k} = \exp[-(e_{k} - e_{g})/T] / \sum_{k=1}^{N_{0}} \exp[-(e_{k} - e_{g})/T]_{\circ}$$
(7)

4) 更新各粒子的位置和速度,计算各粒子的适 应度,更新 P(k,d)和  $p_{g}$ ,并进行退温操作  $T_{:} =$ λT,λ 为退温系数,这里取 λ=0.85。

$$V(k,d) := wV(k,d) + c_1 r_1 [P(k,d) - A(k,d)] + c_2 r_2 [p_1 - A(k,d)], \qquad (8)$$

$$A(k,d) := A(k,d) + V(k,d), \qquad (9)$$

式中: $c_1$ 、 $c_2$ 为学习因子,一般取 $c_1 = c_2 = 2$ ; $r_1$ 、 $r_2$ 为范围为[0,1]的均匀随机数;w为惯性权重,一般 取w = 0.5;:=为赋值符号。

5) 若迭代次数 N 超过 200,则停止搜索并输出 结果,否则返回到 3)继续搜索。

# 4 基于最小一乘拟合的非均匀应变 测量

#### 4.1 虚拟剪切带应变测量

根据 Zhou 等<sup>[21]</sup>方法制作模拟散斑图,散斑图

尺寸为 300 pixel×150 pixel,散斑数目为 2000,如 图 2(a)所示。以图 2(a)为参考图像,根据梯度塑性 理论<sup>[22]</sup>,制作了水平含应变梯度的虚拟剪切带散斑 图,如图 2(b)所示。剪切带内剪应变可以表示为

$$\gamma(y) = \bar{\gamma}_{p} \left( 1 + \cos \frac{c - 150}{l} \right), \qquad (10)$$

式中:c 为剪切带的法向坐标, $c \in [150 - w_b/2, 150 + w_b/2], w_b$  为剪切带宽度, $w_b = 30$  pixel;l 为 内部长度, $l = w_b/2\pi; \bar{\gamma}_p$  为剪切带内平均塑性剪应 变, $\bar{\gamma}_p = 0.1$ 。



图 2 模拟散斑图。(a)参考图像;(b)含应变梯度的 剪切带图像

Fig. 2 Simulated speckle images. (a) Reference image;(b) shear band image with strain gradient

通常测点间隔会对应变测量有影响,采用二阶 DIC方法分别计算测点间隔为4 pixel、2 pixel及 1 pixel时剪切带形成后的位移,并分别采用最小二 乘拟合和最小一乘拟合计算应变,计算窗口均有5× 5 个测点。为了对比最小二乘拟合和最小一乘拟合 的时间消耗,表1给出了不同测点间隔下两种方法 的时间消耗。

由表1可见,在相同测点间隔下,最小一乘拟合 消耗的时间约为最小二乘拟合的52~55倍,这是由 于最小一乘拟合采用数值方法求解,而最小二乘拟 合采用解析方法。当测点间隔减小时,最小二乘拟 合和最小一乘拟合消耗的时间均增加。

表1 两种方法的时间消耗对比

Table 1 Comparison of time consumption of two methods

Measuring point	Least absolute	Least square
interval / pixel	deviation fitting $/\mathrm{s}$	fitting /s
4	6.74	0.13
2	27.52	0.50
1	112.18	2.06

为了验证基于模拟退火的粒子群算法的有效性,以位于 *x*=118 pixel、*y*=270 pixel 处的测点为中心,选择计算窗口,并进行最小一乘拟合,并以此为例说明最小一乘拟合的有效性。



图 3  $E_1$ 及拟合系数随 N 的演变规律 Fig. 3 Evolutions of  $E_1$  and fitting coefficient with N

图 3 为迭代过程中  $E_1$  和拟合参数随 N 的演化 规律。由图 3 可见,在迭代过程中, $E_1$  经历了局部 最优向全局最优转换的过程。当  $N = 14 \sim 50$  时,  $E_1, a_0, a_1$  和  $a_2$  均保持恒定且  $E_1 > 0$ ,这表明  $E_1$  已 陷入局部最优。当 N > 91 时, $E_1 = 0$ ,这表明  $E_1$  已 处于全局最优,这表明基于模拟退火的粒子群算法 十分有效。

通过计算得到的相同测点间隔和相同 y 坐标下的  $\gamma_{xy}$  平均值及其误差分别如图 4、5 所示。为了 便于显示,只呈现计算区域  $y = 100 \sim 200$  pixel 范围 内  $\gamma_{xy}$  的平均值,图 4(a) ~(c)中每个数据点分别由 相同 y 坐标下 23、46 和 91 个计算窗口的  $\gamma_{xy}$  平均 值得到。

由图 4、5 可见:在剪切带外,两种方法的  $\gamma_{xy}$ 平均值误差基本一致,且随着测点间隔的减少,两种方法的  $\gamma_{xy}$ 平均值误差增加,在测点间隔为 4 pixel 时,两种方法的  $\gamma_{xy}$ 平均值误差接近于零,而在测点间隔为 1 pixel 时,误差达到了 0.002,这表明测点间隔对剪应变测量确有影响;在剪切带内,最小一乘拟合的  $\gamma_{xy}$ 平均值比最小二乘拟合更接近于理论值,随着测点间隔减小,两种方法的  $\gamma_{xy}$ 平均值误差越来越接近。值得注意的是,剪切带内两种方法的  $\gamma_{xy}$ 平均值误差都较大,这是由于剪切带内 DIC 方法的位移具有较大的系统误差,拟合只能消除随机误差而不能消除系统误差。

以上结果表明,对于均匀应变的测量,两种方法 几乎具有相同的精度,而对于非均匀应变测量,最小 一乘拟合的效果要优于最小二乘拟合,例如,在测点 间隔为4 pixel时, A 点(y=154 pixel)最小一乘拟



图 4 γ<sub>xy</sub>平均值分布。(a)测点间隔 4 pixel;(b)测点间隔 2 pixel;(c)测点间隔 1 pixel

Fig. 4 Distributions of average  $\gamma_{xy}$ . (a) Measuring point interval is 4 pixel; (b) measuring point interval is 2 pixel; (c) measuring point interval is 1 pixel



图 5 γ<sub>xy</sub>平均值误差。(a)测点间隔 4 pixel;(b)测点间隔 2 pixel;(c)测点间隔 1 pixel Fig. 5 Errors of average γ<sub>xy</sub>. (a) Measuring point interval is 4 pixel; (b) measuring point interval is 2 pixel; (c) measuring point interval is 1 pixel

合的 γ<sub>xy</sub> 平均值误差为-0.018,最小二乘拟合为 -0.031,最小一乘拟合的 γ<sub>xy</sub> 平均值误差只有最小 二乘拟合的 58.1%。

综上所述,对于非均匀应变的测量,最小一乘拟 合的精度要高于或等于最小二乘拟合,尤其当数据 点较少(测点间隔较大)时,最小一乘拟合的优势更 加突出。

#### 4.2 相似材料模型断层滑移过程中的应变测量

采用上述两种方法测量相似材料模型断层滑移 过程中的应变。断层是采矿工程中经常遇到的一种 地质构造,对工作面的安全回采常会产生不可忽视 的影响。为了研究煤层开采对断层行为的影响,本 课题组根据义马千秋矿某工作面地质条件制作了相 似材料模型,并进行模拟煤层开采实验。在开采过 程中,采用 CCD 相机连续拍摄开采过程中的图像, 图像尺寸为1368 pixel×888 pixel。在实验完成后, 采用一阶 DIC 方法对拍摄的图像进行相关运算,获 得煤层开采过程中断层附近的位移场,测点间隔取 15 pixel,子区尺寸取 41 pixel×41 pixel。图 6 为煤 层刚开采时的相似材料模型,并标明了断层的位置 以及观测区域。

由于应变有 3 个分量,为了便于分析,采用最大 剪应变  $\gamma_{max}(\gamma_{max} = \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2})$ 作为观测量。 在 开 采 长 度  $\Delta x = 140$ 、300 和 400 pixel 时,两种



拟合方法的 γ<sub>max</sub>分别如图 7、8 所示,其中计算窗口 有 5×5 个测点。

由图 7、8 可以发现,开采过程中观测区域内出 现了一条应变集中带,带内  $\gamma_{max}$ 随着开采时间或长 度的增加而增加, $\gamma_{max}$ 的最大值由 0.025 增加到0.7 左右,应变集中现象越来越明显。由图 7、8 对比可 知,在断层附近,最小一乘拟合的应变集中带宽度小 于最小二乘拟合;在断层之外,两种方法的  $\gamma_{max}$ 差别 较小。 $\gamma_{max}$ 的云图只能反映观测区域内应变的变化 趋势,很难精确地展示两种方法的结果差异。为此, 布置了一条过断层的测线,其位置如图 6 所示。在  $\Delta x = 140,300$ 和 400 pixel 时,测线上两种方法的  $\gamma_{max}$ 如图 9 所示。



图 7 不同  $\Delta x$  时最小二乘拟合的  $\gamma_{max}$ 。 (a)  $\Delta x = 140$ ; (b)  $\Delta x = 300$ ; (c)  $\Delta x = 400$ Fig. 7  $\gamma_{max}$  of least square fitting for different  $\Delta x$ . (a)  $\Delta x = 140$ ; (b)  $\Delta x = 300$ ; (c)  $\Delta x = 400$ 



图 8 不同  $\Delta x$  时最小一乘拟合的  $\gamma_{\text{max}}$ 。(a)  $\Delta x = 140$ ;(b)  $\Delta x = 300$ ;(c)  $\Delta x = 400$ 

Fig. 8  $\gamma_{\text{max}}$  of least absolute deviation fitting for different  $\Delta x$ . (a)  $\Delta x = 140$ ; (b)  $\Delta x = 300$ ; (c)  $\Delta x = 400$ 



图 9 不同  $\Delta x$  时测线上的  $\gamma_{max}$  分布。(a)  $\Delta x = 140$ ;(b)  $\Delta x = 300$ ;(c)  $\Delta x = 400$ Fig. 9 Distributions of  $\gamma_{max}$  in monitoring line for different  $\Delta x$ . (a)  $\Delta x = 140$ ; (b)  $\Delta x = 300$ ; (c)  $\Delta x = 400$ 

由图 9 可见,在断层之外,两种方法的  $\gamma_{max}$ 差别 较小,而在断层附近区域,两种方法的结果差别明 显,例如,当开采长度  $\Delta x = 140,300$  和 400 pixel 时,断层内测点 B(x=970 pixel)处最小二乘拟合的  $\gamma_{\text{max}}$ 分别为 0.007、0.017 和 0.204,而最小一乘拟合 的  $\gamma_{\text{max}}$ 分别为 0.002、0.005 和 0.002,前者分别是后 者的 3.5 倍、3.4 倍和 102 倍。由图 9 可知,在应变 集中带边界附近,最小一乘拟合的 γ<sub>max</sub>小于最小二 乘拟合,这与图 4(a)中的结论相类似,而且最小一 乘拟合的结果更接近理论解。因此,有理由推测最 小一乘拟合的应变测量结果要优于最小二乘拟合。

### 5 结 论

为了对非均匀应变进行准确测量,在 DIC 方法 中采用最小一乘拟合获取应变。鉴于最小一乘拟合 解析法求解困难,采用基于模拟退火的粒子群算法 进行求解。开展了虚拟剪切带形成数值实验和相似 材料模型断层滑移实验,对比了 DIC 方法最小一乘 拟合和最小二乘拟合结果的差异。在虚拟剪切带形 成数值实验中发现,对于均匀应变测量,两种方法几 乎具有相同的精度,而对于非均匀应变测量,最小一 乘拟合的结果通常优于最小二乘拟合。在相似材料 模型断层滑移实验中可以发现与虚拟剪切带形成数 值实验中相类似的结果。由此可见,对于非均匀应 变的测量,最小一乘拟合具有更强的适用性。

### 参考文献

- [1] Peters W H, Ranson W F. Digital imaging techniques in experimental stress analysis[J]. Optical Engineering, 1982, 21(3): 213427.
- [2] Yamaguchi I. A laser-speckle strain gauge [J]. Journal of Physics E: Scientific Instruments, 1981, 14(11): 1270-1273.
- [3] Sutton M A, Orteu J J, Schreier H. Image correlation for shape, motion and deformation measurements: basic concepts, theory and applications [M]. Boston, MA: Springer, 2009: 81-116.
- [4] Su Y, Zhang Q C, Wu X P. Progress in digital image correlation method [J]. Scientia Sinica (Physica, Mechanica & Astronomica), 2018, 48(9): 094604.
  苏勇,张青川,伍小平.数字图像相关技术的一些进展[J].中国科学:物理学力学天文学, 2018, 48 (9): 094604.
- [5] Sutton M A, Hild F. Recent advances and perspectives in digital image correlation [J]. Experimental Mechanics, 2015, 55(1): 1-8.
- [6] Sutton M A, Matta F, Rizos D, et al. Recent progress in digital image correlation: background and developments since the 2013 W M Murray lecture [J]. Experimental Mechanics, 2017, 57(1): 1-30.
- [7] Bruck H A, McNeill S R, Sutton M A, et al. Digital image correlation using Newton-Raphson method of partial differential correction [J]. Experimental

Mechanics, 1989, 29(3): 261-267.

- [8] Chu T C, Ranson W F, Sutton M A. Applications of digital-image-correlation techniques to experimental mechanics [J]. Experimental Mechanics, 1985, 25 (3): 232-244.
- [9] Besnard G, Hild F, Roux S. "Finite-element" displacement fields analysis from digital images: application to Portevin-Le Châtelier bands [J]. Experimental Mechanics, 2006, 46(6): 789-803.
- [10] Pan B, Asundi A, Xie H M, et al. Digital image correlation using iterative least squares and pointwise least squares for displacement field and strain field measurements[J]. Optics and Lasers in Engineering, 2009, 47(7/8): 865-874.
- [11] Pan B, Xie H M. Full-field strain measurement based on least-square fitting of local displacement for digital image correlation method [J]. Acta Optica Sinica, 2007, 27(11): 1980-1986.
  潘兵,谢惠民.数字图像相关中基于位移场局部最小 二乘拟合的全场应变测量[J].光学学报,2007,27 (11): 1980-1986.
- [12] Wang Y, Shen H, Xia H S, et al. An dynamic strain subset selection algorithm in digital image correlation method [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2018, 55(9): 091001.
  王莹,沈峘,夏瀚笙,等.数字图像相关法中一种动态应变子区选择算法[J].激光与光电子学进展, 2018, 55(9): 091001.
- [13] Xu X H, Su Y, Cai Y L, et al. Influence of shape functions and template size in digital image correlation method for highly inhomogeneous deformations[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2015, 47(5): 848-862.
  徐小海,苏勇,蔡玉龙,等.数字图像相关法测量局 域变形场中形函数和模板尺寸的影响[J].力学学报, 2015, 47(5): 848-862.
- [14] Wang X B, Du Y Z, Pan Y S. A comparison of DIC methods considering the first-and second-order displacement gradients in shear band measurements
  [J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(7): 282-287. 王学滨, 杜亚志, 潘一山.考虑一阶和二阶位移梯度的数字图像相关方法在剪切带测量中的比较[J]. 工程力学, 2013, 30(7): 282-287.
- [15] Chen X R. Historical backgrounds and present state of the least squares method [J]. Journal of the Graduate School Academia Sinica, 1998, 15(1): 4-11.

陈希孺.最小二乘法的历史回顾与现状[J].中国科 学院研究生院学报,1998,15(1):4-11.

[16] Gu L M. Application of least absolute deviation method to settlement of rock and soil foundations[J]. Rock and Soil Mechanics, 2016, 37(8): 2366-2372. 顾乐民. 最小一乘法在岩土地基沉降中的应用[J]. 岩土力学, 2016, 37(8): 2366-2372.

- [17] Wen Z. Proficient in MATLAB intelligent algorithm
  [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2014.
  温正.精通 MATLAB智能算法[M].北京:清华大学出版社, 2014.
- [18] Ge P X, Ye P, Li G H. Application of digital image correlation method based on genetic algorithm in micro-displacement measurement [J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38(6): 0612006.
  葛朋祥,叶沛,李桂华.基于遗传算法的数字图像相 关法在微位移测量中的应用[J].光学学报, 2018, 38(6): 0612006.
- [19] Pan B. Recent progress in digital image correlation[J]. Experimental Mechanics, 2011, 51(7): 1223-

1235.

- [20] Baker S, Matthews I. Lucas-Kanade 20 years on: a unifying framework [J]. International Journal of Computer Vision, 2004, 56(3): 221-255.
- [21] Zhou P, Goodson K E. Subpixel displacement and deformation gradient measurement using digital image/speckle correlation [J]. Optical Engineering, 2001, 40(8): 1613-1620.
- [22] Wang X B, Pan Y S, Ma J. Analysis of strain and strain rate in shear band and its instability based on energy criterion [J]. Engineering Mechanics, 2003, 20(2): 111-115.
  王学滨,潘一山,马瑾.剪切带内部应变(率)分析及

基于能量准则的失稳判据[J].工程力学,2003,20 (2):111-115.