

超材料中高阶效应影响下飞秒准亮孤子解及其特性

白娟, 杨荣草*, 田晋平

山西大学物理电子工程学院, 山西 太原 030006

摘要 基于描述超材料中超短脉冲传输的高阶非线性薛定谔方程, 采用行波法得到一种精确的飞秒准亮孤子解及其存在条件。研究发现, 在群速度色散、三阶色散、三次-五次非线性、自陡峭和二阶非线性色散效应的精确平衡下, 超材料中可存在该飞秒准孤子; 当三阶色散和二阶非线性色散不存在时, 该准孤子无法存在。基于 Drude 模型, 详细讨论了不同非线性超材料中该飞秒准亮孤子存在的不同折射区域。结果表明, 该飞秒准孤子可存在于自散焦非线性超材料的负折射区和自聚焦非线性超材料的正折射区, 而且在不同区域具有不同的脉冲强度和宽度。这意味着, 通过选择不同非线性超材料和输入电磁波的频率, 使其位于相应的存在区域, 可以实现对孤子特性的调控。

关键词 非线性光学; 飞秒准亮孤子; 自散焦; 自聚焦; 非线性超材料; 负折射

中图分类号 O437

文献标志码 A

doi: 10.3788/AOS202040.0219001

Femtosecond Quasi-Bright Soliton Solution and Its Properties Under Influence of Higher-Order Effects in Metamaterials

Bai Juan, Yang Rongcao*, Tian Jinping

College of Physics and Electronic Engineering, Shanxi University, Taiyuan, Shanxi 030006, China

Abstract Based on the higher-order nonlinear Schrödinger equation describing ultrashort pulse transmission in metamaterials, this study presents an exact femtosecond quasi-bright soliton solution and determines its existence conditions by using the traveling wave method. When the group speed dispersion, third-order dispersion, cubic-quintic nonlinearities, self-steepening, and second-order nonlinear dispersion effects are properly balanced, the femtosecond quasi-soliton can exist in nonlinear metamaterials. Without the third-order dispersion and second-order nonlinear dispersion, the soliton in metamaterials can not occur. Based on the Drude model, the existence index regions of the femtosecond quasi-bright soliton are discussed in different nonlinear metamaterials. The results show that femtosecond quasi-soliton can exist in the negative index region of self-defocusing nonlinear metamaterials, and in the positive index region of self-focusing nonlinear metamaterials. Moreover, the intensities and widths of the solitons differ in different regions of the metamaterials, implying that the properties of the formed solitons can be adjusted by choosing different nonlinear metamaterials and different frequencies of the incident wave, making them in the corresponding existence areas.

Key words nonlinear optics; femtosecond quasi-bright soliton; self-defocusing; self-focusing; nonlinear metamaterials; negative refraction

OCIS codes 190.5530; 190.4370; 060.2230

1 引 言

众所周知, 当光纤中的群速度色散和自相位调制相互平衡时, 光孤子脉冲能够长距离传输而不发生形变, 因此作为光通信系统中良好的信息载体, 孤子脉冲受到了广泛关注^[1]。多年来, 研究学者大量报道了光纤或光晶体中各阶色散和非线性平衡下的

孤子解^[2-3]、多孤子解^[4]及其存在条件, 并从多重角度研究了孤子自频移^[5]、孤子放大^[6]等孤子传输特性。研究表明, 人工超材料的电磁参数(如介电常数、磁导率和折射率)与结构参数密切相关, 人工超材料具有可调控的特性, 为孤子的形成与稳定传输提供了更多机会。

超材料是将由金属-电介质构成的单元进行周期

收稿日期: 2019-08-05; 修回日期: 2019-09-01; 录用日期: 2019-09-19

基金项目: 国家自然科学基金(61775126)、山西省自然科学基金(201801D221164, 201801D121119)

* E-mail: sxdxyrc@sxu.edu.cn

排列的一种人工复合材料,其结构的形状、尺寸和材料性质决定了超材料具有超乎传统材料的电磁特性,例如具有负折射率、逆多普勒频移等^[7-8]。光频超材料和非线性超材料得到成功研制之后^[9-11],超材料中孤子的形成和传输也受到了广泛关注^[12-25]。实验上,Kozyrev等^[13]实现了非线性有源超材料中孤子的稳定产生,English等^[14]观察到了左手电晶格超材料中离散亮(暗)孤子的传输。理论上,基于超材料中描述皮秒脉冲传输的理论模型^[15-17],Li等^[18]推导了描述超材料中飞秒脉冲传输的高阶非线性薛定谔方程,并得到了不同参数条件下精确的灰孤子解。基于该模型,Sharma等^[19]采用行波法得到了精确的周期解和分数变换孤子。考虑到二阶色散、三次和五次非线性效应,Yang等^[20]采用拟解法得到了亮、暗、亮-灰三种准孤子解,并分析了孤子传输的稳定性;进一步考虑了自陡峭效应,Yang等^[21]研究了超材料中的亮-暗组合孤波,Triki等^[22]研究了超材料中三种类型的啁啾怪波和无啁啾怪波,Biswas等^[23]采用扩展实验函数法给出了奇异孤子和奇异周期解,Daoui等^[24]采用行

波法分别得到了精确的啁啾亮孤子、双扭结孤子和无啁啾准孤子解,以及两类精确的啁啾灰孤子解,并分析了不存在二阶色散这一特殊情况下的连续波^[25]。然而,关于三阶色散、二阶非线性色散等高阶效应下的超材料中准孤子的研究鲜有报道。

本文基于包含三阶色散、五次非线性、自陡峭、二阶非线性色散的超材料的高阶非线性薛定谔方程^[18],采用行波法解析发现了一种精确的飞秒准亮孤子解。结合超材料的可调节电磁特性,详细讨论了不同非线性机制下该飞秒准孤子解的存在区间,并分析了不同归一化频率下该准亮孤子的传输特性。该研究结果进一步丰富了超材料中孤子的存在及传输理论。

2 理论模型及飞秒准亮孤子解

基于 Scalora 等^[16]对非线性超材料中皮秒脉冲传输方程的推导工作,Li 等^[18]推导了用于描述在非线性超材料中飞秒超短电磁脉冲传输的高阶非线性薛定谔方程,表达式为

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{ik_2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + k_3 \frac{\partial^3 \psi}{\partial t^3} + ip_3 |\psi|^2 \psi - ip_5 |\psi|^4 \psi + s_1 \frac{\partial}{\partial t} (|\psi|^2 \psi) - is_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (|\psi|^2 \psi), \quad (1)$$

式中: $\psi(z, t)$ 为脉冲的慢变复包络; $z = Z/\lambda_p$ 和 $t = cT/\lambda_p$ 为归一化距离和时间,其中 λ_p 为等离子体的波长, Z 为传播方向的坐标, c 为光速, T 为时间坐标; k_2 表示群速度色散; k_3 表示三阶色散(TOD); p_3 和 p_5 分别为三次、五次非线性系数; s_1 为自陡峭参数(SS); s_2 为二阶非线性色散系数。各参数的具体含义参见文献^[18]。理论模型(1)式中的各项线性和非线性系数都与超材料的折射率、介电常数和磁导率直接相关。由于超材料具有依赖于其单元结构的强色散介电常数和磁导率,因此可以通过设计超材料的单元结构调控模

型即(1)式中的各项系数。在忽略三阶色散和二阶非线性效应的情况下,文献^[16, 20-21]研究了超材料中的孤子、准孤子和组合孤波的传输特性。对于脉冲宽度很窄的飞秒脉冲,需要考虑(1)式模型中的三阶色散与二阶非线性色散对飞秒脉冲传输特性的影响。

首先假设(1)式具有复包络形式的行波解,即

$$\psi(z, t) = \rho(\xi) \exp\{i[\chi(\xi) - \kappa z]\}, \quad (2)$$

式中: κ 表示波数; ρ 和 χ 为关于 ξ 的实函数, $\xi = t - uz$, u 为波速。将(2)式代入(1)式,分离实部和虚部,可以得到关于 ρ 和 χ 的两个独立的方程:

$$2u\rho' + 6s_1\rho^2\rho' - 2k_2\rho'\chi' + 12s_2\rho^2\rho'\chi' - 6k_3\rho'\chi'^2 - k_2\rho\chi'' + 2s_2\rho^3\chi'' - 6k_3\rho\chi'\chi'' + 2k_3\rho''' = 0, \quad (3)$$

$$2\kappa\rho + 2p_3\rho^3 - 2p_5\rho^5 - 12s_2\rho\rho'^2 + 2u\rho\chi' + 2s_1\rho^3\chi' - k_2\rho\chi'^2 + 2s_2\rho^3\chi'^2 - 2k_3\rho\chi'^3 + k_2\rho'' - 6s_2\rho^2\rho'' + 6k_3\rho''\chi' + 6k_3\rho'\chi'' + 2k_3\rho\chi''' = 0, \quad (4)$$

式中: ρ' , ρ'' , ρ''' , χ' , χ'' , χ''' 分别表示 ρ 的一阶、二阶、三阶导数,以及 χ 的一阶、二阶、三阶导数。为了求出 ρ 和 χ 的具体表达式,将(3)式两边同乘以 ρ^3 ,整理得到

$$2u\rho^3\rho' + 6s_1\rho^5\rho' + 2k_3\rho^3\rho''' + 2s_2(\rho^6\chi')' -$$

$$k_2\rho^2(\rho^2\chi')' - 3k_3\rho^2(\rho^2\chi'^2)' = 0, \quad (5)$$

为了简化计算,令

$$-k_2\rho^2(\rho^2\chi')' - 3k_3\rho^2(\rho^2\chi'^2)' = 0, \quad (6)$$

对(6)式积分,并取积分常数为零,可得到 $\chi'(\xi) = -k_2/(3k_3)$,其为一常数,该值与三阶色散和群速度

色散的比值有关。将 $\chi'(\xi)$ 再代回(5)式,可得到二阶非线性微分方程为

$$\rho'' = a\rho + b\rho^3 + c_1, \quad (7)$$

对(7)式积分可得到关于孤子振幅包络的椭圆方程为

$$\rho'^2 = a\rho^2 + \frac{b}{2}\rho^4 + 2c_1\rho + c_2, \quad (8)$$

式中: $a = -u/k_3$, $b = -(3k_3s_1 - 2s_2k_2)/(3k_3^2)$, c_1 和 c_2 为积分常数。将(7)式和(8)式代入(4)式,并令方程中 ρ^j ($j=0,1,2,3,5$) 的各独立项系数为零,当 $c_1=0$ 时可得到参数关系:

$$u = \frac{-k_2k_3^2p_5 - 36k_3^2p_3s_2 + 4k_2^2s_2^2}{324k_3s_2^2}, \quad (9)$$

$$\kappa = \frac{k_2^2k_3^2p_5 + 36k_2k_3^2p_3s_2 + 32s_2^2(k_2^3 + 729c_2k_3^2s_2)}{1944k_3^2s_2^2}, \quad (10)$$

以及约束条件:

$$F_1 = k_3^2p_5 - 6k_3s_1s_2 + 4k_2s_2^2 = 0. \quad (11)$$

(8)式是著名的椭圆方程,它有多种类型的精确解,如周期解、扭结型孤子解、亮和暗的孤立波解等^[26-27]。本文研究发现,当 $c_2=0$ 时,(8)式存在类亮孤子解:

$$\rho = \left\{ \frac{B \operatorname{Sech}[\eta(t - uz)]}{1 + \operatorname{Sech}[\eta(t - uz)]} \right\}^{1/2}, \quad (12)$$

其中,

$$B = \frac{3\eta^2k_3^2}{3k_3s_1 - 2k_2s_2},$$

$$\eta^2 = \frac{k_2k_3^2p_5 + 36k_3^2p_3s_2 - 4k_2^2s_2^2}{81k_3^2s_2^2}, \quad (13)$$

式中: B 为孤子振幅; η 为脉宽。这里要使解的存在有意义,则需满足 F_2 和 F_3 两个约束条件:

$$F_2 = k_2k_3^2p_5 + 36k_3^2p_3s_2 - 4k_2^2s_2^2 > 0, \quad (14)$$

$$F_3 = 3k_3s_1 - 2k_2s_2 > 0. \quad (15)$$

从孤子解的参数关系式(9)、(10)和(13)式可以看到,孤子的速度、波数、振幅和脉宽由理论模型中的群速度色散、三阶色散、三次-五次非线性效应、自陡峭以及二阶非线性色散系数共同决定。而且该孤子解存在的约束条件(11)、(14)和(15)式也与理论模型中所有的色散和非线性系数密切相关,只有当这些色散和非线性效应精确平衡时该孤子解才能存在。孤子解表达式和存在条件表明,当忽略三阶色散 k_3 和二阶非线性色散 s_2 时,(12)式的孤子解无法存在,当 k_3 和 s_2 为零时,这些约束条件也失去了意义。这意味着,本文所得到的孤子解特性与文献^[20,24,28]完全不同。下面将结合超材料的基本特

性,研究该飞秒准亮孤子解在超材料中的存在区间与传输特性。

3 飞秒准孤子解的存在区间及特性

从第2节分析可知,飞秒准孤子[(12)式]的各参数及存在条件完全由理论模型中各线性、非线性系数确定,又由于模型中各项系数直接依赖于介质的介电常数 ϵ 和磁导率,因此与常规材料弱的磁效应(通常磁导率 μ 看作 1)不同,超材料具有强色散的介电常数和磁导率^[16]。采用 Drude 模型来描述

介电常数和磁导率,这里 $\epsilon(\bar{\omega}) = 1 - \frac{1}{\bar{\omega}^2 + i\bar{\omega}\gamma_e}$,

$\mu(\bar{\omega}) = 1 - \frac{\omega_m^2/\omega_p^2}{\bar{\omega}^2 + i\bar{\omega}\gamma_m}$, 其中 $\bar{\omega} = \omega/\omega_p$ 为归一化频率,

ω 为归一化前的频率, ω_p 和 ω_m 分别表示电和磁的等离子体频率, γ_e 和 γ_m 表示相应的电、磁损耗。在超材料中,可以采用一些方法减少或补偿损耗,如引入具有光学增益的材料^[29-30],因此在下面的分析中忽略损耗。根据 ω 和 ω_p 的相对关系,超材料的介电常数和磁导率可能为负,也可能为正,因此超材料的折射率可以表示为 $n = \pm\sqrt{\epsilon(\bar{\omega})\mu(\bar{\omega})}$ 。具体来讲,对于不同的 ω_m/ω_p ,超材料中折射率可分为三个区间^[17]: 1) 当 $\bar{\omega} < \min(1, \omega_m/\omega_p)$ 时, $\epsilon(\bar{\omega}) < 0, \mu(\bar{\omega}) < 0$, 折射率 $n = -\sqrt{\epsilon(\bar{\omega})\mu(\bar{\omega})}$, 对应超材料的负折射介质区; 2) 当 $\bar{\omega} > \max(1, \omega_m/\omega_p)$ 时, 相应的折射率 $n = +\sqrt{\epsilon(\bar{\omega})\mu(\bar{\omega})}$, 对应超材料的正折射区; 3) 当频率 $\bar{\omega}$ 介于 ω_m/ω_p 与 1 之间, ϵ 与 μ 符号相反,此时折射率为虚数,电磁波在这一区间无法传输,将这一频带称为禁带。通过改变超材料介质的结构和材料性质可以改变介质的电磁参数 ϵ, μ 和 n , 从而进一步影响各阶色散和非线性系数的取值^[17-18]。图 1 给出了当 ω_m/ω_p 取 0.9, 1.0 和 1.1 时,在自散焦和自聚焦非线性超材料中 k_2, k_3, p_3, p_5, s_1 和 s_2 随归一化频率的变化曲线。根据 Drude 模型, ω_m/ω_p 取 0.9, 1.1 时,带隙依次为 $\bar{\omega} = 0.9 \sim 1.0$ 和 $\bar{\omega} = 1.0 \sim 1.1$ 。当 ω_m/ω_p 取 1.0 时不存在禁带区间。图 1(a)~(f)和图 1(g)~(l)分别对应自散焦($\chi^{(3)} < 0$)和自聚焦($\chi^{(3)} > 0$)非线性介质中各参数的变化趋势。观察图 1(a)~(f)和图 1(g)~(l)可得,不同的 ω_m/ω_p 值对应的 k_2, k_3, p_3, p_5, s_1 和 s_2 变化趋势不同;对于不同的非线性,参数 k_2, k_3 和 p_5 变化趋势相同,而参数 p_3, s_1 和 s_2 的变化趋势相反。这一特征可以通过这些参数来解释, k_2 和 k_3 是与表征非线性介质类型的三阶极化率 $\chi^{(3)}$ 无关的

量, p_5 则与 $\chi^{(3)}$ 的平方成比例, 而 p_3, s_1 和 s_2 随参数 $\chi^{(3)}$ 的变化而变化。各参数在不同非线性介质中

的变化趋势的不同, 为超材料中孤子的存在提供了更多的空间。

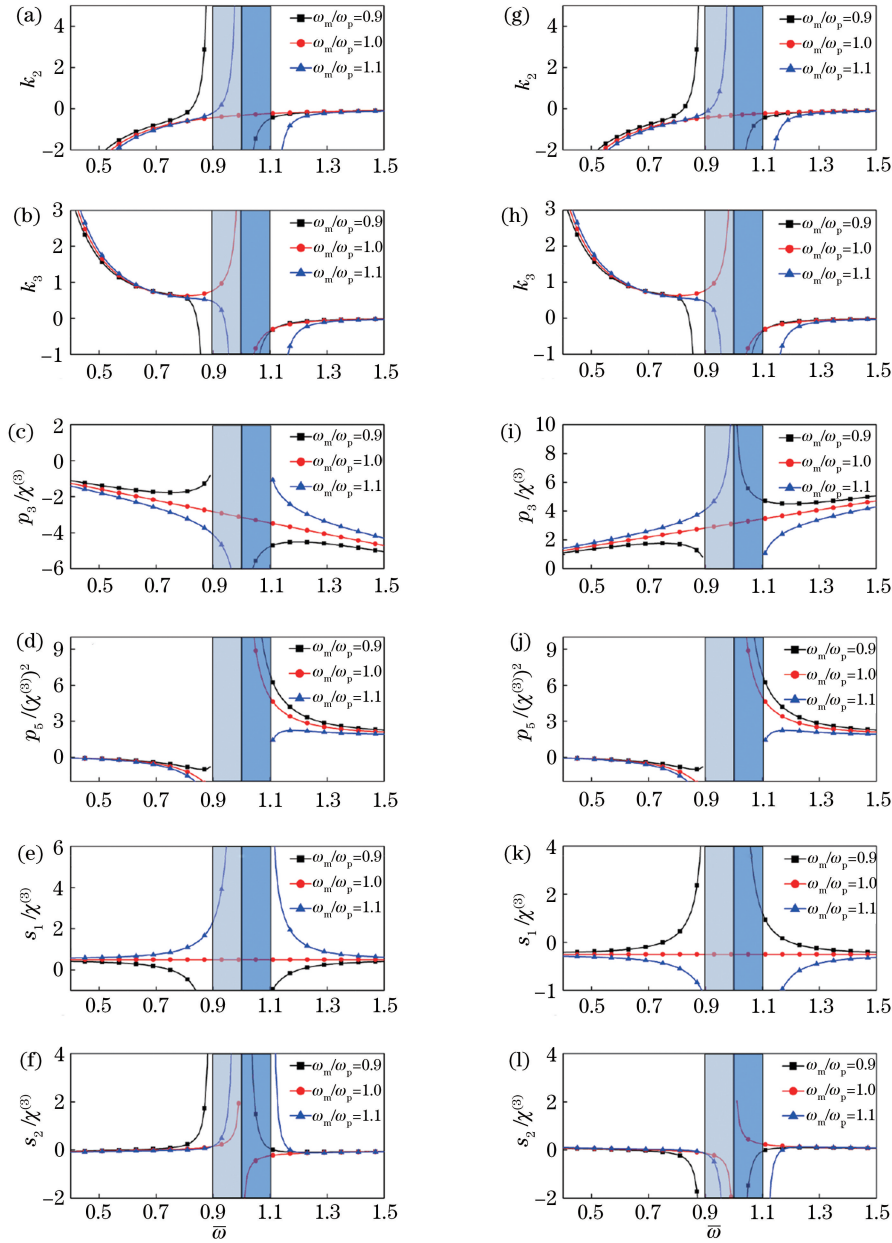


图 1 当 $\omega_m/\omega_p=0.9, 1.0, 1.1$ 时, (a)~(f) 自散焦和 (g)~(l) 自聚焦非线性超材料中模型各参数随归一化频率的变化曲线

Fig. 1 Curves of model parameters versus normalized frequency in (a)-(f) self-defocusing and (g)-(l) self-focusing nonlinear metamaterials when $\omega_m/\omega_p=0.9, 1.0, 1.1$

基于上述模型参数随归一化频率的变化曲线, 图 2 给出了 F_1, F_2 和 F_3 随归一化频率 $\bar{\omega}$ 的变化曲线。从图 2(a)、(d) 的 F_1 曲线可以看出, 当 ω_m/ω_p 为 0.9, 1.0 和 1.1 时, 自散焦超材料中使条件 F_1 成立的归一化频率值依次为 0.329, 0.375 和 0.426; 而在自聚焦超材料中对应的归一化频率分别为 1.262、1.158 和 1.195 (见图中圆点标注), 需要指出的是, 准孤子存在的归一化频率随 ω_m/ω_p 的变化而变化。结合前面的折射率区间分析, 可以推知该准孤子解

(12) 式可能存在于自散焦非线性超材料的负折射区和自聚焦非线性超材料的正折射区域。同时, 观察图 2(b), (c), (e), (f), 可以看到在上述各归一化频率值下, 孤子存在的另外两个条件 $F_2 > 0$ 和 $F_3 > 0$ 均满足, 这表明该亮准孤子存在于自散焦非线性超材料的负折射区, 而在自聚焦非线性超材料中, 该准孤子存在于正折射区。

图 3 给出了自散焦和自聚焦超材料中准孤子在不同归一化频率下的分布。对比图 3(a)~(c) 和图

3(d)~(f)发现,不同的 ω_m/ω_p 值会对孤子强度和脉宽产生影响。在自散焦非线性材料中, ω_m/ω_p 值

越小,孤子强度越大,脉宽略有变宽,如图 3(a)~(c)所示;相反,在自聚焦非线性超材料中,对于不同

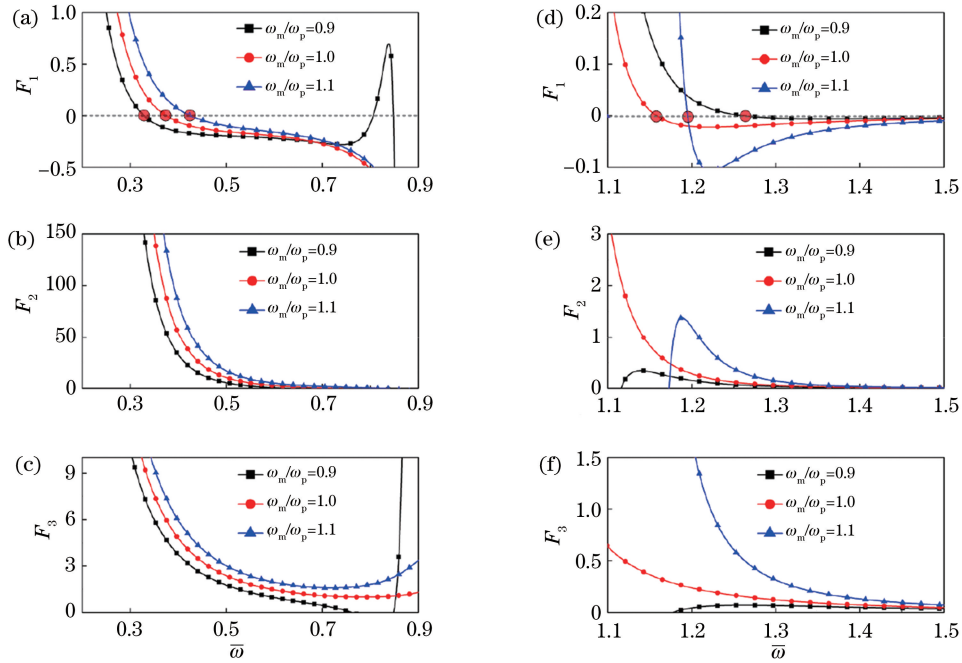


图 2 当 $\omega_m/\omega_p=0.9,1.0,1.1$ 时,(a)~(c)自散焦和(d)~(f)自聚焦非线性超材料中约束条件随归一化频率的变化曲线
Fig. 2 Curves of restrict condition versus normalized frequency in (a)-(c) self-defocusing and (d)-(f) self-focusing nonlinear metamaterials when $\omega_m/\omega_p=0.9,1.0,1.1$

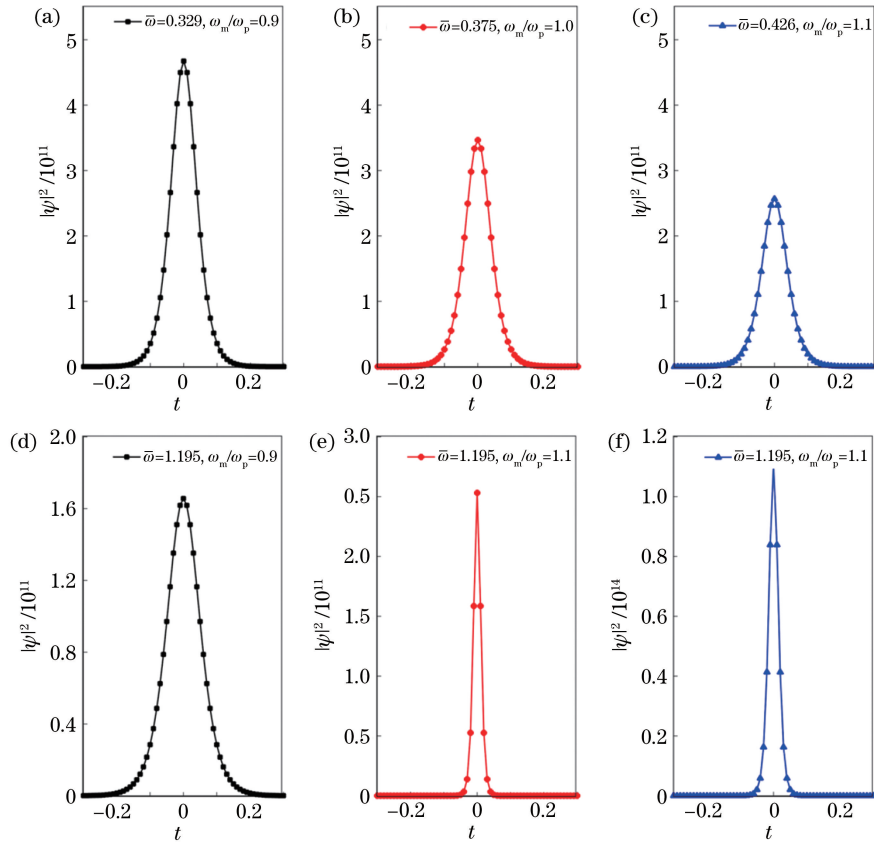


图 3 (a)~(c)自散焦和(d)~(f)自聚焦非线性超材料中准孤子的分布图

Fig. 3 Distributions of quasi-soliton in (a)-(c) self-defocusing and (d)-(f) self-focusing nonlinear metamaterials

的 ω_m/ω_p , 孤子的幅度和脉宽的变化比较明显, 如图 3(d)~(f) 所示。这表明在不同的非线性超材料的不同折射率区域, 该飞秒准孤子具有不同的特性。

以 $\omega_m/\omega_p=0.9$ 为例, 图 4(a)、(b) 分别给出了自散焦和自聚焦超材料中飞秒准孤子传输 $10\lambda_p$ 的演化图, 其中孤子的强度用表达式中的振幅 B 作了

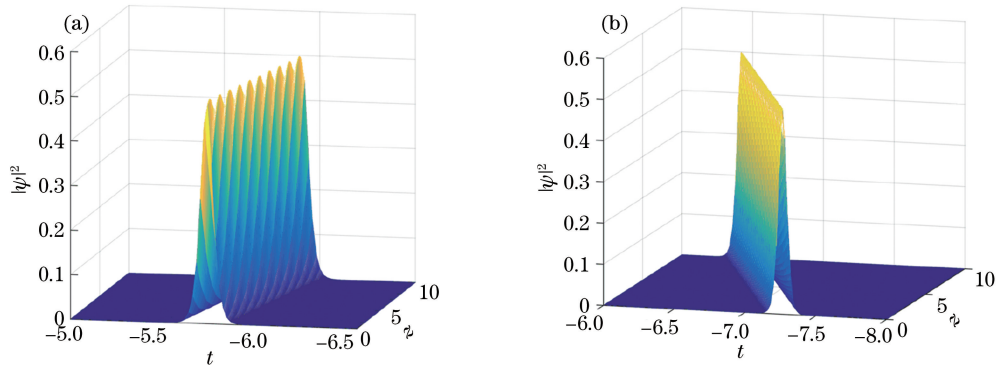


图 4 当 $\omega_m/\omega_p=0.9$ 时准孤子传输 10 个 λ_p 的演化图。(a) 自散焦非线性超材料; (b) 自聚焦非线性超材料

Fig. 4 Evolutions of quasi-soliton after propagating $10\lambda_p$ when $\omega_m/\omega_p=0.9$. (a) Self-defocusing nonlinear metamaterials; (b) self-focusing nonlinear metamaterials

4 结 论

本文采用行波法研究了描述非线性超材料中飞秒脉冲传输的高阶非线性薛定谔方程, 发现在二阶色散、三阶色散、三次-五次非线性、自陡峭效应和二阶非线性色散效应平衡下非线性超材料中可以存在一种精确的飞秒准孤子解。结合理论模型的各阶色散和非线性系数在超材料中的可调控特性, 详细分析了该飞秒孤子的存在条件、存在区域以及传输特性。研究发现, 该飞秒准孤子可以存在于自散焦非线性超材料的负折射区和自聚焦非线性超材料的正折射区; 而且该准孤子的脉冲强度和脉宽等在不同区域的不同频率处具有显著不同的特征。该研究结果表明, 通过选择不同非线性超材料和输入电磁波的频率, 使其位于相应的存在区域, 从而可以调控孤子的特性。本研究结果为非线性超材料中飞秒孤子的传输提供了理论参考。

参 考 文 献

- [1] Hasegawa A, Tappert F. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion [J]. Applied Physics Letters, 1973, 23(3): 142-144.
- [2] Agrawal G P. Nonlinear fiber optics & application of nonlinear fiber optics[M]. Jia D F, Yu Z H, Tan B,

归一化, 对应的归一化频率 $\bar{\omega}$ 分别为 0.329 和 1.262, 其中图 4(a) 中, $k_2 = -8.0637$, $k_3 = 6.9317$, $p_3 = -9.1608 \times 10^{-11}$, $p_5 = -2.7741 \times 10^{-22}$, $s_1 = 4.2902 \times 10^{-11}$, $s_2 = -8.9038 \times 10^{-12}$; 图 4(b) 中, $k_2 = -0.1698$, $k_3 = -0.0636$, $p_3 = 4.556 \times 10^{-10}$, $p_5 = 3.0610 \times 10^{-20}$, $s_1 = -1.9973 \times 10^{-11}$, $s_2 = -1.6536 \times 10^{-12}$ 。

et al., Transl. Beijing: Electronic Industry Press, 2002: 94-104.

Agrawal G P. 非线性光纤光学原理及应用[M]. 贾东方, 余震虹, 谈斌, 等, 译. 北京: 电子工业出版社, 2002: 94-104.

- [3] Kruglov V I, Peacock A C, Harvey J D. Exact solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with distributed coefficients [J]. Physical Review E, 2005, 71(5): 056619.
- [4] Yang J W, Gao Y T, Feng Y J, et al. Solitons and dromion-like structures in an inhomogeneous optical fiber[J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 87(2): 851-862.
- [5] Kong D F, Jia D F, Feng D J, et al. Soliton self-frequency shift in optical fibers [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2018, 55(10): 101902. 孔德飞, 贾东方, 冯德军, 等. 光纤中的孤子自频移效应[J]. 激光与光电子学进展, 2018, 55(10): 101902.
- [6] Wang L, Yang R C, Jia H P, et al. Periodically lumped amplification and recovery of soliton in dispersion-decreasing optic fiber link[J]. Acta Optica Sinica, 2017, 37(6): 0619001. 王丽, 杨荣草, 贾鹤萍, 等. 色散渐减光纤链中孤子的周期集总放大和恢复[J]. 光学学报, 2017, 37(6): 0619001.
- [7] Veselago V G. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ [J]. Soviet Physics Uspekhi, 1968, 10(4): 509-514.

- [8] Lee S H, Park C M, Seo Y M, et al. Reversed Doppler effect in double negative metamaterials [J]. *Physical Review B*, 2010, 81(24): 241102.
- [9] Shalaev V M. Optical negative-index metamaterials [J]. *Nature Photonics*, 2007, 1(1): 41-48.
- [10] Yang R C, Shadrivov I V. Double-nonlinear metamaterials [J]. *Applied Physics Letters*, 2010, 97(23): 231114.
- [11] Fan K B, Hwang H Y, Liu M K, et al. Nonlinear terahertz metamaterials via field-enhanced carrier dynamics in GaAs [J]. *Physical Review Letters*, 2013, 110(21): 217404.
- [12] Gao F, Yang R C, Jia H P, et al. Exact solution of spatial chirped dark soliton in metamaterials and its propagation characteristics [J]. *Acta Optica Sinica*, 2019, 39(2): 0219001.
高斐, 杨荣草, 贾鹤萍, 等. 超材料中精确的空间啁啾暗孤子解及其传输特性 [J]. *光学学报*, 2019, 39(2): 0219001.
- [13] Kozyrev A B, Shadrivov I V, Kivshar Y S. Soliton generation in active nonlinear metamaterials [J]. *Applied Physics Letters*, 2014, 104(8): 084105.
- [14] English L Q, Wheeler S G, Shen Y, et al. Backward-wave propagation and discrete solitons in a left-handed electrical lattice [J]. *Physics Letters A*, 2011, 375(9): 1242-1248.
- [15] Lazarides N, Tsironis G P. Publisher's note: coupled nonlinear Schrödinger field equations for electromagnetic wave propagation in nonlinear left-handed materials [Phys. Rev. E 71, 036614 (2005)] [J]. *Physical Review E*, 2005, 71(4): 049903.
- [16] Scalora M, Syrchin M S, Akozbek N, et al. Generalized nonlinear Schrödinger equation for dispersive susceptibility and permeability: application to negative index materials [J]. *Physical Review Letters*, 2005, 95(1): 013902.
- [17] Wen S C, Xiang Y J, Dai X Y, et al. Theoretical models for ultrashort electromagnetic pulse propagation in nonlinear metamaterials [J]. *Physical Review A*, 2007, 75(3): 033815.
- [18] Li P G, Yang R C, Xu Z Y. Gray solitary-wave solutions in nonlinear negative-index materials [J]. *Physical Review E*, 2010, 82(4): 046603.
- [19] Sharma V K, Goyal A, Raju T S, et al. Periodic and solitary wave solutions for ultrashort pulses in negative-index materials [J]. *Journal of Modern Optics*, 2013, 60(10): 836-840.
- [20] Yang R C, Min X M, Tian J P, et al. New types of exact quasi-soliton solutions in metamaterials [J]. *Physica Scripta*, 2016, 91(2): 025201.
- [21] Yang R C, Zhang Y. Exact combined solitary wave solutions in nonlinear metamaterials [J]. *Journal of the Optical Society of America B*, 2011, 28(1): 123-127.
- [22] Triki H, Zhou Q, Moshokoa S P, et al. Novel singular solitons in optical metamaterials for self-steepening effect [J]. *Optik*, 2018, 154: 545-550.
- [23] Biswas A, Ekici M, Sonmezoglu A, et al. Chirped solitons in optical metamaterials with parabolic law nonlinearity by extended trial function method [J]. *Optik*, 2018, 160: 92-99.
- [24] Daoui A K, Triki H, Biswas A, et al. Chirped bright and double-kinked quasi-solitons in optical metamaterials with self-steepening nonlinearity [J]. *Journal of Modern Optics*, 2019, 66(2): 192-199.
- [25] Daoui A K, Azzouzi F, Triki H, et al. Propagation of chirped gray optical dips in nonlinear metamaterials [J]. *Optics Communications*, 2019, 430: 461-466.
- [26] Li X Z, Wang M L. A sub-ODE method for finding exact solutions of a generalized KdV-mKdV equation with high-order nonlinear terms [J]. *Physics Letters A*, 2007, 361(1/2): 115-118.
- [27] Serge D Y, Justin M, Betchewe G, et al. Optical chirped soliton in metamaterials [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 90(1): 13-18.
- [28] Dong J, Jin Y J, Chen C, et al. The transmission properties of exact bright-like and dark-like solitons in metamaterials [J]. *Acta Sinica Quantum Optica*, 2013, 19(2): 162-170.
董佳, 靳羽茜, 陈诚, 等. 超常介质中精确的亮暗类孤子的传输特性 [J]. *量子光学学报*, 2013, 19(2): 162-170.
- [29] Ferrando A. Nonlinear plasmonic amplification via dissipative soliton-plasmon resonances [J]. *Physical Review A*, 2017, 95(1): 013816.
- [30] Zhang Q, Tan C H, Huang G X. Lossless Airy surface polaritons in a metamaterial via active Raman gain [J]. *Scientific Reports*, 2016, 6: 21143.