

相关色温测量不确定度分析

吴志峰*, 代彩虹, 李玲, 王彦飞, 刘文德, 孙若端

中国计量科学研究院光学与激光计量科学研究所, 北京 100029

摘要 相关色温是表征光源光谱特性的重要参量,而国际上并无相关色温测量不确定度的解析公式。本文分别采用不确定度传播律法和蒙特卡罗两种方法分析相关色温的测量不确定度。对于不确定度传播律方法,从相关色温的基本定义推导给出相关色温灵敏度系数公式,进而评价相关色温测量不确定度。数值计算的相关色温随光谱功率率的变化验证了相关色温灵敏度系数公式的正确性。对于蒙特卡罗方法,采用蒙特卡罗模拟生成一组光谱数据,然后计算相应的相关色温及其分布,从而得到相关色温的测量不确定度。结果表明两种方法得到的相关色温测量不确定度吻合,在不考虑光源光谱的关联时,相关色温不确定度与波长间隔的平方根近似成正比。

关键词 测量; 相关色温; 不确定度传播律; 蒙特卡罗方法; 相关色温灵敏度系数

中图分类号 O432.3

文献标志码 A

doi: 10.3788/AOS202040.0212002

Evaluation of Correlated Color Temperature Uncertainty

Wu Zhifeng*, Dai Caihong, Li Ling, Wang Yanfei, Liu Wende, Sun Ruoduan

Division of Metrology in Optics and Lasers, National Institute of Metrology, Beijing 100029, China

Abstract The correlated color temperature (CCT) is an important parameter to characterize light sources. However, no analytical expression has been provided by international organizations for evaluating the uncertainty of CCT. The uncertainty propagation law and Monte Carlo method are used to analyze the uncertainty of CCT. When using the uncertainty propagation law method, a CCT sensitivity coefficient formula can be derived based on the definition of CCT to evaluate its uncertainty. The variation in CCT due to the change in spectral power evaluated via numerical calculations is used to validate the formula. When using the Monte Carlo method, a group of spectral data can be generalized using numerical simulations. The corresponding CCT and its distribution are calculated to obtain the uncertainty of CCT. The results obtained using the uncertainty propagation law and Monte Carlo method exhibit a good agreement. When the spectral correlation is neglected, the uncertainty of CCT is observed to be proportional to the square root of the wavelength interval.

Key words measurement; correlated color temperature; uncertainty propagation law; Monte Carlo method; sensitivity coefficient of correlated color temperature

OCIS codes 120.5630; 120.3940

1 引 言

相关色温(CCT)是国际计量局(BIPM)公示的各国计量机构校准的重要量值。由于物体的颜色依赖于照明光源的颜色,必须指明照明光源的相关色温才能比较物体的颜色。在光生物安全或其他领域中,部分参数评价必须指定相关色温^[1-2]。国际照明协会(CIE)采用 UCS 均匀色品图的色品坐标计算色温^[3]。不同温度黑体的色品坐标连成一条曲线,当光源的色坐标落在该曲线上时,黑体温度即为其

色温;当光源色品坐标落在曲线外,距离曲线最近点的黑体温度为其相关色温。

对于相关色温,国内外采用多种方法计算以实现更快的收敛和得到更准确的数值^[4-10]。然而,对于相关色温的测量不确定度,CIE 并没有给出计算方法。本文分别采用不确定度传播律和蒙特卡罗两种方法分析相关色温的测量不确定度。

2 不确定度传播律法

假定光源各个波长测量的相对光谱功率并无相

收稿日期: 2019-07-23; 修回日期: 2019-08-15; 录用日期: 2019-09-09

基金项目: 国家重点研发计划(2016YFF0200304)、中国计量科学研究院基本科研业务费(23-AKY1513)

* E-mail: wuzf@nim.ac.cn

关性。依据 JJF1059.1—2012^[11], 采用不确定度传播律方法, 相关色温的测量不确定度可以表示为

$$u^2(T) = \sum_{i=1}^n u_{\lambda_i}^2(T) = \sum_{i=1}^n u(E_i)^2 \left(\frac{\partial T}{\partial E_i} \right)^2, \quad (1)$$

式中: $u(T)$ 为相关色温的不确定度; $u_{\lambda_i}(T)$ 为波长 λ_i 处的相关色温不确定度; $u(E_i)$ 为波长 λ_i 处相对光谱功率的测量不确定度; $\frac{\partial T}{\partial E_i}$ 为波长 λ_i 处的相关色温灵敏度系数; i 为波长编号; n 为波长个数。

相关色温的测量不确定度通常采用不确定度传播律法进行计算^[12-14], 但相关色温灵敏度系数较难得到, 需要采用复杂的数值计算。

根据相关色温定义, 相关色温计算过程如下:

$$\begin{cases} X = \int_{380}^{780} E(\lambda) \bar{x}(\lambda) d\lambda \approx \sum E_i \bar{x}(\lambda_i) \Delta\lambda \\ Y = \int_{380}^{780} E(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda \approx \sum E_i \bar{y}(\lambda_i) \Delta\lambda, \quad (2) \\ Z = \int_{380}^{780} E(\lambda) \bar{z}(\lambda) d\lambda \approx \sum E_i \bar{z}(\lambda_i) \Delta\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 4X / (X + 15Y + 3Z) \\ v = 6Y / (X + 15Y + 3Z), \quad (3) \end{cases}$$

式中: $\bar{x}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$ 和 $\bar{z}(\lambda)$ 为 CIE 1931 标准色度观察者的色匹配函数; $E(\lambda)$ 为光源的相对光谱功率分布; 当采用求和近似替代积分时, E_i , $\bar{x}(\lambda_i)$, $\bar{y}(\lambda_i)$ 和 $\bar{z}(\lambda_i)$ 分别为 $E(\lambda)$, $\bar{x}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$ 和 $\bar{z}(\lambda)$ 在波长 λ_i 处的数值; X, Y 和 Z 为三刺激值; u 和 v 为光源的色品坐标; $\Delta\lambda$ 为波长间隔, 当波长间隔为 5 nm 时, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 分别对应 380, 385, \dots , 780 nm, 其中 $n=81$ 。根据 CIE 的定义, 光源的相关色温 T 满足光源色坐标 (u, v) 和黑体色坐标 $(u_B(T), v_B(T))$ 间距离最小, 即

$$F_{\min}(T) = \sqrt{[u - u_B(T)]^2 + [v - v_B(T)]^2}. \quad (4)$$

2.1 相关色温灵敏度系数

图 1 给出了光源相关色温的色坐标。其中 (u, v) 是光源的色坐标, (u_B, v_B) 是黑体的色坐标, L_1 是过这两个色坐标的直线。当光源在波长 λ_i 处光谱功率 E_i 改变 δE_i 时, 光源色坐标变为 $(u + \delta u, v + \delta v)$, 黑体的色坐标变为 $(u_B + \delta u_B, v_B + \delta v_B)$, L'_1 是过新的两个色坐标的直线。 L_2 和 L'_2 分别和 L_1 和 L'_1 垂直。随着光源光谱功率的变化, 光源色坐标变化量 $\delta u = \frac{\partial u}{\partial E_i} \delta E_i$ 和 $\delta v = \frac{\partial v}{\partial E_i} \delta E_i$, 黑体色坐标变化量 $\delta u_B = \frac{\partial u_B}{\partial T} \delta E_i$ 和 $\delta v_B = \frac{\partial v_B}{\partial T} \delta E_i$ 。

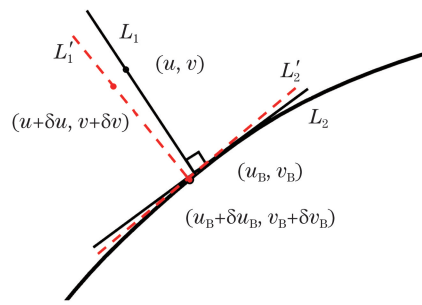


图 1 相关色温色坐标

Fig. 1 Coordinate of CCT

根据相关色温定义, 当光源与黑体色坐标距离最小时, 定义黑体色坐标对应的色温为光源的相关色温。最小距离下光源色坐标和黑体色坐标的连线与黑体色坐标点的切线垂直。 L_2 和 L'_2 分别是黑体色坐标曲线 (u_B, v_B) 和 $(u_B + \delta u_B, v_B + \delta v_B)$ 处的切线。图 1 中 L_1 和 L'_1 的斜率分别表示为

$$k_{L_1} = \frac{v - v_B}{u - u_B}, \quad (5)$$

$$k_{L'_1} = \frac{(v + \frac{\partial v}{\partial E_i} \delta E_i) - (v_B + \frac{\partial v_B}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial E_i} \delta E_i)}{(u + \frac{\partial u}{\partial E_i} \delta E_i) - (u_B + \frac{\partial u_B}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial E_i} \delta E_i)}. \quad (6)$$

黑体色坐标 (u_B, v_B) 处切线 L_2 的斜率可以表示为

$$k_{L_2} = \frac{\frac{\partial v_B}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial E_i} \delta E_i}{\frac{\partial u_B}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial E_i} \delta E_i} = \frac{\frac{\partial v_B}{\partial T}}{\frac{\partial u_B}{\partial T}}. \quad (7)$$

当 δE_i 的改变量足够小时, L'_2 的斜率可以近似采用 L_2 的斜率, 即 $k_{L'_2} \approx k_{L_2}$ 。由于 $k_{L_1} k_{L_2} = -1$, $k_{L'_1} k_{L'_2} = -1$ 。联立(6)式和(7)式得到

$$\begin{aligned} (u - u_B) \frac{\partial u_B}{\partial T} + \left[\frac{\partial u}{\partial E_i} \frac{\partial u_B}{\partial T} - \left(\frac{\partial u_B}{\partial T} \right)^2 \frac{\partial T}{\partial E_i} \right] \delta E_i + \\ (v - v_B) \frac{\partial v_B}{\partial T} + \left[\frac{\partial v}{\partial E_i} \frac{\partial v_B}{\partial T} - \left(\frac{\partial v_B}{\partial T} \right)^2 \frac{\partial T}{\partial E_i} \right] \delta E_i = 0, \quad (8) \end{aligned}$$

联立(5)式和(7)式得到 $(u - u_B) \frac{\partial u_B}{\partial T} + (v - v_B) \frac{\partial v_B}{\partial T} = 0$, 代入(8)式可得

$$\frac{\partial T}{\partial E_i} = \frac{1}{\left(\frac{\partial u_B}{\partial T} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_B}{\partial T} \right)^2} \left(\frac{\partial u_B}{\partial T} \frac{\partial u}{\partial E_i} + \frac{\partial v_B}{\partial T} \frac{\partial v}{\partial E_i} \right). \quad (9)$$

为了验证该公式, 采用一只相关色温 3000 K 溴钨灯的光谱数据进行分析, 假定光源在 380 ~

780 nm处光谱功率分布的相对测量不确定度都相等,即 $u_{rel}(E_i)=0.8\%$ (包含因子 $k=1$),波长间隔为5 nm。图2给出了采用数值模拟(0.01 K的精度)和(9)式两种方法得到的相关色温变化曲线。图2中横坐标是波长,左纵坐标是相关色温的变化量,右纵坐标是光源的相对光谱功率分布。数值模拟方面,依次改变3000 K溴钨灯每个波长下的光谱功率数值 E_i ,变化量 ΔE_i ,其中 $\frac{\Delta E_i}{E_i}=0.8\%$;然后计算相关色温变化量为 ΔT 。采用(9)式可得, $\Delta T = \frac{\partial T}{\partial E_i} \Delta E_i$ 。

从图2中可以看到,两种方法得到的数值几乎重合,证明了(9)式的正确性。图2中,当波长小于575 nm时, $\frac{\partial T}{\partial E_i} > 0$,即随着该波长的光谱功率增大相关色温变大;当波长大于580 nm时, $\frac{\partial T}{\partial E_i} < 0$,即随着该波长的光谱功率增大相关色温变小。其中,535 nm和615 nm相关色温变化最为灵敏,分别对应着色温灵敏度曲线的波峰和波谷。当535 nm和615 nm的光谱功率各自增大0.8%时,相关色温分别增大1.07 K和减小1.34 K,波峰波谷的比值小于1。

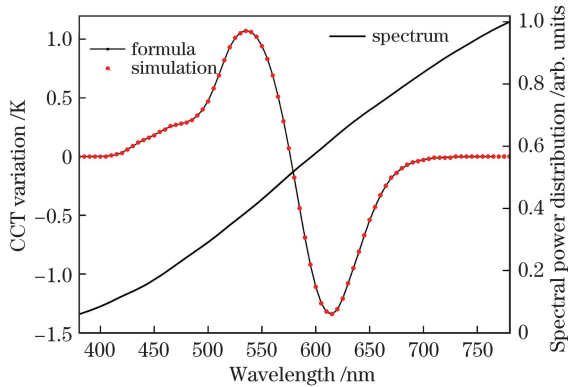


图2 3000 K 溴钨灯相关色温变化

Fig. 2 CCT variation of 3000 K bromine tungsten lamp

相关色温的灵敏度与光源的相关色温有关,随着光源相关色温的升高,灵敏度曲线会发生明显变化。假定每个波长点光谱功率的相对变化为2.0%,图3给出了采用数值模拟和(9)式两种方法得到的10000 K和30000 K光源的相关色温变化。其中横坐标代表波长,右侧纵坐标和左侧纵坐标分别对应10000 K和30000 K的结果。由于相关色温的变化量较大,数值模拟采用1 K的精度以减小计算量。从10000 K的结果可以看到,(9)式的计算结果明显

更优,曲线的连续性更好。图3中,10000 K光源的相关色温灵敏度峰值波长为445 nm,波谷为590 nm;30000 K对应的相关色温灵敏度峰值波长为440 nm,波谷为560 nm。与图2相比,随着相关色温变大,波峰和波谷对应的波长位置发生了明显的蓝移。然而,当相关色温从10000 K升至30000 K时,波峰对应波长位置变化不明显,波谷对应波长位置明显蓝移。与图2比较,随着相关色温从3000 K变化至10000 K,波峰和波谷的比值从小于1增大到明显大于1,相关色温的变化受短波的影响更为明显。

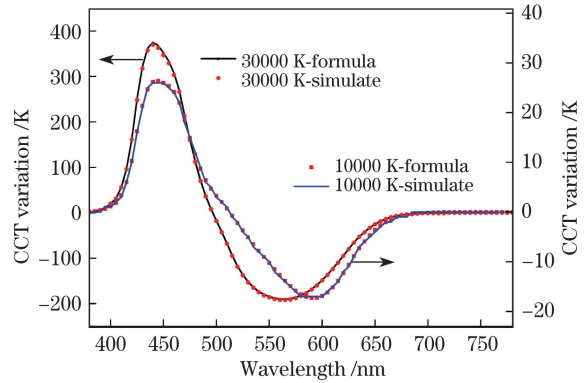


图3 10000 K和30000 K光源相关色温变化

Fig. 3 CCT variations of 10000 K and 30000 K light sources

2.2 不同波长间隔下的相关色温不确定度

当采样间隔为20 nm时,光源每个波长光谱功率变化对相关色温的贡献和5 nm间隔的明显不同。对于20 nm的间隔,500 nm处功率的变化会影响490~510 nm波长范围的光谱功率,而间隔为5 nm时,并不影响500 nm以外波长的光谱功率。

假定每个波长点光谱功率的相对变化为0.8%,图4给出了20 nm,10 nm和5 nm不同波长间隔的相关色温变化。图4中数据采用图2中的数值模拟方法计算。根据计算结果可知,图4中相对色温的变化比例与波长间隔近似成正比,描述为

$$\left(\frac{\partial T}{\partial E}\right)_{\Delta\lambda=20\text{ nm}} \approx 2\left(\frac{\partial T}{\partial E}\right)_{\Delta\lambda=10\text{ nm}} \approx 4\left(\frac{\partial T}{\partial E}\right)_{\Delta\lambda=5\text{ nm}} \quad (10)$$

当波长间隔从20 nm变化到10 nm和5 nm时,(1)式中的分量个数 n 则从21变为41和81。联立(1)式和(10)式,相关色温不确定度近似满足

$$u(T)_{\Delta\lambda=20\text{ nm}} \approx \sqrt{2}u(T)_{\Delta\lambda=10\text{ nm}} \approx 2u(T)_{\Delta\lambda=5\text{ nm}} \quad (11)$$

对于图2中3000 K的溴钨灯,间隔为5 nm时相关色温的测量不确定度 $U=10.6\text{ K}(k=2)$ 。根据

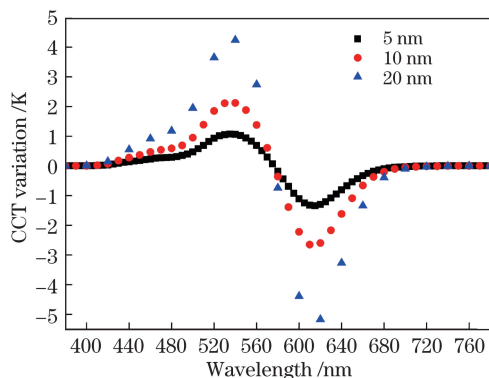


图 4 3000 K 溴钨灯不同波长间隔的相关色温变化
Fig. 4 CCT variation of 3000 K tungsten lamp at different wavelength intervals

(11)式, 间隔为 10 nm 和 20 nm 时, $U \approx 15.0 \text{ K} (k=2)$ 和 $U \approx 21 \text{ K} (k=2)$ 。

理论上, 波长间隔越小, 相关色温测量不确定度越低。然而, CIE 15:2004 Colorimetry 给出的标准色度观察者色匹配函数的波长间隔为 5 nm。对于更小的波长间隔, 需要对色匹配函数进行插值。插值的结果携带有不同波长下的关联信息, 需要考虑不同波长的相关性对相关色温不确定度的贡献。另一方面, 中国计量科学研究院保存有我国的色温度基准, 色温灯的相对光谱功率分布最终溯源至色温度基准。色温度基准向色温灯量传时采样的波长间隔越小, 测量的时间越长。考虑到时间成本, 色温度基准量传时波长间隔极少达到 5 nm 以下。因此, 为了得到最低的相关色温不确定度, 通常采用 5 nm 间隔的光谱数据进行评价。

3 蒙特卡罗法

依据 JJF1059.2—2012^[15], 采用蒙特卡罗方法计算相关色温不确定度。仍然选用 3000 K 溴钨灯光谱, 波长间隔取 5 nm。采用蒙特卡罗法模拟生成一组光谱数据, 每个波长光谱功率的均方差为 0.8%, 然后计算相关色温。重复操作 10000 次, 计算相关色温的分布曲线。

图 5 给出了蒙特卡罗模拟计算的相关色温分布。横坐标为相关色温, 间隔 1 K, 纵坐标为该相关色温出现的次数。横坐标选取整数温度数值 $\pm 0.5 \text{ K}$ 范围标记该温度, 如 2995.5~3000.5 K 记为 3000 K 的对应数据。采用蒙特卡罗模拟计算的 $U=10.3 \text{ K} (k=2)$, 与不确定度传播律方法计算得到的 10.6 K 接近。

当波长间隔为 20 nm, 仍然采用蒙特卡罗法模

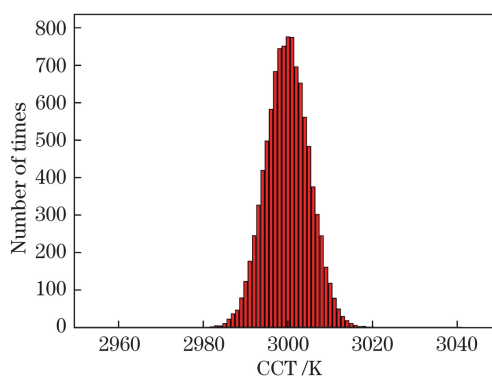


图 5 蒙特卡罗法模拟计算的相关色温分布(波长间隔 5 nm)
Fig. 5 CCT distribution using Monte-Carlo simulation (wavelength interval is 5 nm)

拟生成 10000 组光谱数据, 计算相关色温。图 6 给出了间隔为 20 nm 计算得到的相关色温分布, 计算结果 $U=20.4 \text{ K} (k=2)$, 近似为 5 nm 波长的 2 倍。蒙特卡罗法模拟得到的结论和不确定度与传播律方法的相同。

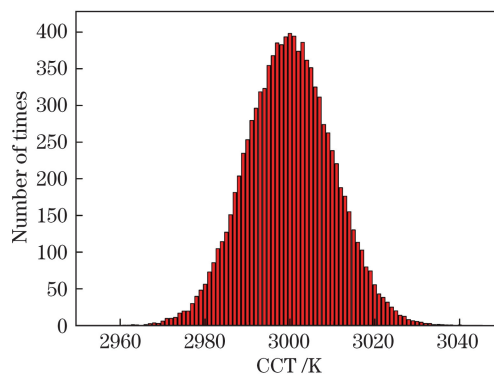


图 6 蒙特卡罗法模拟计算的相关色温分布
(波长间隔 20 nm)

Fig. 6 CCT distribution using Monte-Carlo simulation (wavelength interval is 20 nm)

4 结 论

本文采用不确定度传播律和蒙特卡罗两种方法计算了相关色温的测量不确定度, 数据表明两种方法是一致的。不确定度传播律方法必须计算偏导数——色温灵敏度, 蒙特卡罗法则不需要。国内外主要采用不确定度传播律进行计算, 并不计算相关色温灵敏度, 通过复杂的数学推导进行相关色温不确定度计算。对于偏导数难以计算或者无法计算的情形, 蒙特卡罗法模拟更为适用。本文并未考察各个波长间的相关性对测量不确定度的影响。在色温标准灯的实际标定过程中, 上一级标准灯和标定使用的光谱仪都会为相关光谱功率测量引入相关性。

如何处理相关性并得到合适的相关系数对于准确评价测量不确定度至关重要。

参 考 文 献

- [1] Yang C P, Fang W Q, Liu M B, et al. Blue light hazard and non-visual biological effect of LED backlight displayer at different color temperatures [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2017, 54(10): 101701.
杨超普, 方文卿, 刘明宝, 等. 不同色温 LED 背光屏的蓝光危害和非视觉生物效应 [J]. *激光与光电子学进展*, 2017, 54(10): 101701.
- [2] Yan B X, Wang Y W, Qi Y, et al. Study of color proportion and color temperature in laser display [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2018, 45(4): 0401004.
颜博霞, 王延伟, 亓岩, 等. 激光显示光源颜色配比和色温研究 [J]. *中国激光*, 2018, 45(4): 0401004.
- [3] Commission International de l'Eclairage (CIE). *Colorimetry: CIE Publication 15: 2004* [S]. 3rd ed. Vienna: CIE Central Bureau, 2004.
- [4] Robertson A R. Computation of correlated color temperature and distribution temperature [J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1968, 58(11): 1528-1535.
- [5] Hernández-Andrés J, Lee R L, Romero J. Calculating correlated color temperatures across the entire gamut of daylight and skylight chromaticities [J]. *Applied Optics*, 1999, 38(27): 5703-5709.
- [6] Fontecha J, Campos J, Corróns A, et al. An analytical method for estimating correlated colour temperature uncertainty [J]. *Metrologia*, 2002, 39(6): 531-536.
- [7] Dai C H, Yu J L, Yin C Y. Experiment analysis of correlated color temperature and distribution temperature of the source [J]. *Optical Technique*, 2003, 29(3): 344-346.
代彩红, 于家琳, 殷纯永. 光源相关色温与分布温度的实验分析 [J]. *光学技术*, 2003, 29(3): 344-346.
- [8] Li C J, Cui G H, Melgosa M, et al. Accurate method for computing correlated color temperature [J]. *Optics Express*, 2016, 24(13): 14066-14078.
- [9] Li C J, Luo M R, Melgosa M, et al. Testing the accuracy of methods for the computation of CIE tristimulus values using weighting tables [J]. *Color Research & Application*, 2016, 41(2): 125-142.
- [10] Lin Y, Ye L W, Liu W J, et al. Optimization algorithm of correlated color temperature for LED light sources by dichotomy [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, 29(10): 2791-2794.
林岳, 叶烈武, 刘文杰, 等. 二分法优化计算 LED 光源相关色温 [J]. *光学学报*, 2009, 29(10): 2791-2794.
- [11] National metrology technical committee for legal metrology management. Evaluation and expression of uncertainty in measurement: JJF1059.1—2012 [S]. Beijing: China Quality and Standards Publishing & Media Co., Ltd., 2013.
全国法制计量管理计量技术委员会. 测量不确定度评定与表示: JJF1059.1—2012 [S]. 北京: 中国质量标准出版传媒有限公司, 2013.
- [12] Dai C H, Yu J L, Yu J, et al. Uncertainty analysis of the colour temperature and the correlated colour temperature [J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, 25(4): 547-552.
代彩红, 于家琳, 于靖, 等. 颜色温度和相关色温的不确定度评定方法 [J]. *光学学报*, 2005, 25(4): 547-552.
- [13] Gardner L. Correlated colour temperature-uncertainty and estimation [J]. *Metrologia*, 2000, 37(5): 381-384.
- [14] Gardner J L. Uncertainties in source distribution temperature and correlated colour temperature [J]. *Metrologia*, 2006, 43(5): 403-408.
- [15] National metrology technical committee for legal metrology management. Monte Carlo method for evaluation of measurement uncertainty: JJF1059.2—2012 [S]. Beijing: China Quality and Standards Publishing & Media Co., Ltd., 2013.
全国法制计量管理计量技术委员会. 用蒙特卡洛法评定测量不确定度: JJF1059.2—2012 [S]. 北京: 中国质量标准出版传媒有限公司, 2013.