基于离散余弦变换的无人机耀斑图像恢复算法

李澜^{1,2,3}, 巩彩兰^{1,2*}, 黄华文⁴, 胡勇^{1,2}, 王歆晖^{1,2,3}, 何志杰^{1,2,3}, 叶张林⁴

¹中国科学院上海技术物理研究所,上海 200083;

²中国科学院红外探测与成像技术重点实验室,上海 200083;

³中国科学院大学,北京 100049;

4上海普适导航科技股份有限公司,上海 201799

摘要 针对当前遥感图像耀斑恢复算法存在的耀斑增益计算误差大,需要近红外波段信息辅助以及自身信息利用 不足等缺陷,提出基于水体指数与色度分离法的耀斑检测算法以及基于离散余弦变换的耀斑图像恢复算法。首先 使用色度分离法提取图像中疑似耀斑的高亮区域,再通过水体指数结合面积阈值和形态学滤波去除散点和孤立区 域,进而实现耀斑区域的精准定位和提取。然后依据图像的保真度和局部平滑度构建优化函数,利用离散余弦变 换对遥感图像耀斑区域内部的像元进行迭代求解,最终得到恢复后的图像。最后开展现场飞行实验,实验结果表 明所提算法能够精确提取和恢复图像水体耀斑区域,并且恢复后的图像在纹理特征和光谱特征两个方面的效果得 以改进。

关键词 遥感;耀斑检测;耀斑去除;离散余弦变换 中图分类号 TP751.2 文献标志码 A

doi: 10.3788/AOS202040.1928001

Unmanned Aerial Vehicle Glint Image Restoration Algorithm Based on Discrete Cosine Transform

Li Lan^{1,2,3}, Gong Cailan^{1,2*}, Huang Huawen⁴, Hu Yong^{1,2}, Wang Xinhui^{1,2,3}, He Zhijie^{1,2,3}, Ye Zhanglin⁴

¹Shanghai Institute of Technical Physics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200083, China;

² Key Laboratory of Infrared System Detection and Imaging Technology, Chinese Academy of Sciences,

Shanghai 200083, China;

³ University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;

 4 Shanghai Ubiquitous Navigation Technology Co., Ltd., Shanghai 201799, China

Abstract Owing to the large errors in the calculation of glint gain in the existing glint recovery algorithms for remote sensing images, the need for near-infrared band information assistance, and the insufficient utilization of remote sensing image information, a glint-detection algorithm based on the water index and chromaticity-separation method and a glint image based on discrete cosine transform are proposed herein. For the proposed recovery algorithm, first, the chromaticity-separation method is used to extract the highlighted areas of the image that are suspected of glint. Then, the scattered points and isolated areas are removed by combining the water index with an area threshold and morphological filtering so as to achieve precise positioning and extraction of the glint area. Then, an optimization function is constructed based on the fidelity and local smoothness of the image, and the discrete cosine transform is used to iteratively solve the pixels inside the glint region of the remote sensing image. Finally, the restored image is obtained. Furthermore, the field flight experiments are conducted. Experimental results show that the proposed algorithm can accurately extract and restore the image water glint area, and the effect of the restored image in terms of texture and spectral characteristics is improved.

Key words remote sensing; glint detection; glint removal; discrete cosine transform OCIS codes 280.4991; 100.2000; 100.3020

收稿日期: 2020-05-06; 修回日期: 2020-06-02; 录用日期: 2020-06-19

基金项目:国家重点研发计划(2017YFC0602103)、上海市水务局科研项目(沪水科 2018-07)、上海市科委项目(18511102400)、 上海市气象科学研究所横向课题

* E-mail: llan@mail.ustc.edu.cn

1 引 言

无人机遥感技术具有空间分辨率高、受大气影 响小和自主性强的优势,广泛应用于气象监测、城市 规划和精准农业等方面^[1-2]。当对河流、湖泊和海洋 等水体目标进行定量监测和反演时,图像中水体的 耀斑现象是难以避免的,耀斑区域的大小和形状与 太阳高度角、传感器姿态以及水体表面状态有关,小 面积耀斑可以通过中值滤波和维纳滤波等方式进行 去除,大面积耀斑的去除和恢复则是当前无人机遥 感图像预处理的难点之一^[3]。

避免或去除图像耀斑主要有两种方式,最直接 的方式就是选择合适的观测时间和观测角度,或是 利用平台的侧摆能力来避免水面的镜面反射^[4]。实 际上,无人机遥感平台通常不具备通过侧摆来避免 镜面反射的能力,并目避开耀斑时刻成像还会降低 无人机的工作效率,因此对图像本身进行处理是去 除耀斑的主要方式之一。针对大幅宽图像和低空间 分辨率的卫星遥感图像,结合海面风场模型、太阳高 度角以及传感器姿态可以有效去除图像耀斑[5-6]。 针对中、高分辨率的遥感图像,国内外学者提出了多 种能够有效去除图像耀斑的方法。Hochberg 等^[7] 根据水体反射率在可见光和近红外波段之间的线性 映射关系,实现对图像耀斑区域的恢复。Goodman 等[8]认为耀斑区域中各像素的耀斑增益与波长无 关,因此可以利用红波段和近红波段计算增益量,再 对各波段进行逐像素的校正。张翔等^[9]通过计算大 气透过率进而去除高光谱图像的耀斑。上述方法的

原理大多是基于水体的近红外波段离水辐亮度为零 这一特性而实现的,而对于无人机遥感图像而言, 这一特性并不是一直成立的;无人机遥感图像的 耀斑区域中通常存在过饱和现象,这在一定程度 上会导致估算大面积耀斑的增益出现偏差,继而 影响耀斑图像的恢复效果。而且上述方法多采用 逐像素的方式对图像进行处理,该方法未充分利 用图像自身的信息,也未考虑图像区域之间的连 续性。

本文首先提出一种基于水体指数(NDWI)与色度分离(CBS)法的耀斑检测算法,利用该算法对图像中存在的耀斑区域进行检测和提取,随后利用图像的整体信息以及邻域平滑信息直接对耀斑区域的像素值进行预测,使用离散余弦变换(DCT)并采用迭代计算的方式不断求解像素值,最终得到恢复后的图像。相较于传统的遥感图像耀斑去除算法,所提算法具有稳定性强、恢复效果好、自适应处理和无需其他波段辅助信息等优势。

2 基本原理

2.1 耀斑区域的检测和提取

恢复遥感图像中的耀斑区域前需要对其进行检测和提取,为此提出一种基于 NDWI 和 CBS¹⁰的 遥感图像耀斑检测算法。该算法的基本思路:首先 通过 CBS 来提取图像中疑似耀斑的高亮区域,随后 使用归一化 NDWI 阈值来划分陆地和水域,最后再 通过面积阈值法和形态学滤波来实现耀斑区域的精 确提取。具体的方法流程如图 1 所示。



耀斑提取步骤如下。 1) 计算 NDWI。NDWI 的计算公式为

$$N_{\rm NDWI} = (R_{\rm g} - R_{\rm nir}) / (R_{\rm g} + R_{\rm nir})$$
,

式中:**R**_g和**R**_{nir}表示绿光波段和近红外波段的反射 率图像。根据 NDWI 是否大于零,将图像初步分割 为水体和陆地,再计算各连通区域的面积,设置面积

(1)

阈值占最大连通区域的 30%,将面积小于阈值的连 通区域设置为背景,最后根据形态学滤波对边界部 分进行处理以得到精细化的水体区域二值图像 **T**。

2)采用 CBS 法来提取图像中疑似耀斑的高亮 区域。选择 R,G和 B 三个波段的反射率图像,计算 各波段的无镜面反射图像 S_{SF} 和修正的无镜面反射 图像 M_{MSF},具体的计算公式可表示为

$$S_{\text{SF},i}(p,q) = I_i(p,q) - \min[I_{\text{R}}(p,q), I_{\text{G}}(p,q), I_{\text{B}}(p,q)], \quad (2)$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{MSF},i} = \boldsymbol{S}_{\mathrm{SFI},i} - \bar{\boldsymbol{I}}_{\min}, \qquad (3)$$

式中: $I_i(p,q)$ 表示第i(i = R,G,B)波段反射率图 像在(p,q)处的反射率; \overline{I}_{min} 表示各反射率图像最 小值的平均反射率图像; $S_{SF,i}(p,q)$ 表示第i波段 无镜面反射图像在(p,q)处的反射率。获得 $M_{MSF,i}$ 后,再计算 $I_i = M_{MSF,i}$ 的差值图像 D_i ,最后根据阈 值法来确定高亮区域图像H,具体判断方式为

$$D_{i}(p,q) = I_{i}(p,q) - M_{\text{MSF},i}(p,q), \quad (4)$$

$$H(p,q) = \begin{cases} 1, & D_i(p,q) \ge T \\ 0, & D_i(p,q) < T \end{cases}$$
(5)

$$T = \sum \min[I_i(p,q)]/3_{\circ}$$
(6)

3) 将得到的 **T** 和 **H** 取交集,即可得到耀斑区 域的二值图像 **G**。

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{T} \cap \boldsymbol{H}, \qquad (7)$$

式中:∩表示交集符号。

2.2 耀斑区域的恢复

恢复耀斑图像不仅需要良好的保真度,同时恢 复后的图像在正常区域、耀斑区域以及两个区域之 间的边缘部分都有较好的连续性和平滑度,保真度 可通过原始图像与恢复图像在正常区域上的差值来 描述,平滑度可用图像差分算子来描述,为此定义一 个可以描述这一关系的目标函数,表达式为

 $F(\hat{Y}) = \|W^{1/2} \circ (Y - \hat{Y})\|^2 + s \|\nabla^2 \hat{Y}\|^2$, (8) 式中:Y和Ŷ表示原始待处理含有耀斑的遥感图像 和恢复后的输出图像; $\|\cdot\|$ 表示取L2范数; s 表示 粗糙度的权重因子; ∇^2 表示Laplace 算子,用来描述 图像的平滑程度; \circ 表示图像对应元素的相乘符号; $F(\hat{Y})$ 表示损失函数; W表示与Y大小一致的非耀 斑区域的二值掩模图像,可通过耀斑区域二值图像 取反运算而得到,表达式为

$$W = -G_{\circ} \tag{9}$$

从结构上可知 $F(\hat{Y})$ 是一个凸函数,因此该损 失函数有且仅有一个全局最优解,即

$$\hat{\mathbf{Y}} = \operatorname{argmin} \left[F(\hat{\mathbf{Y}}) \right]_{\circ}$$
(10)

直接对损失函数进行求导以求解Ŷ,其难度较大且十分耗时。已有研究表明:带有L2惩罚项的最小二乘回归求解可通过DCT来实现^[11-12],因此(10)式可等价为

 $\hat{\mathbf{Y}} = I_{DCT2} \{ \boldsymbol{\Gamma} \circ D_{DCT2} [\mathbf{W} \circ (\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}) + \hat{\mathbf{Y}}] \}, \quad (11)$ 式中: D_{DCT2} 和 I_{DCT2} 表示二维的 DCT 和逆 DCT (IDCT); $\boldsymbol{\Gamma}$ 表示秩为 2 的对角张量, 具体形式为

$$\Gamma_{x_1,x_2} = \left\{ 1 + s \left\{ \sum_{j=1}^{2} \left\{ 2 - \cos \left[(x_j - 1) \pi / n_j \right] \right\} \right\}^2 \right\}^{-1},$$
(12)

式中: x_j 表示在第j个维度方向上的第x个元素; n_j 表示 Y 沿着第j个维度方向上的大小。求解 (12)式通常赋予 \hat{Y} 的初值,再通过迭代计算的方式 来求解,具体的迭代公式为

$$\hat{\boldsymbol{Y}}_{k+1} = \boldsymbol{I}_{\text{DCT2}} \left\{ \boldsymbol{\Gamma} \circ \boldsymbol{D}_{\text{DCT2}} \left[\boldsymbol{W} \circ (\boldsymbol{Y} - \hat{\boldsymbol{Y}}_{k}) + \hat{\boldsymbol{Y}}_{k} \right] \right\},$$
(13)

式中:k 表示迭代次数。对于确定的耀斑图像而言, W 和 Γ 也是确定的,唯一影响算法效果的参数是 s。 如果 s 取值过低,则恢复后的图像连续性不足,反之 则会丢失一些高频细节的信息。实验采用归一化差 异系数来确定最佳的 s,具体计算公式为

$$s = \left\| \boldsymbol{W}^{1/2} \circ (\hat{\boldsymbol{Y}}_{k} - \boldsymbol{Y}) \right\| / \left\| \boldsymbol{W}^{1/2} \circ \boldsymbol{Y} \right\|_{\circ}$$
(14)

采用归一化差异系数可以自适应地调整粗糙度 系数的取值,在迭代初期选择较大的 *s* 值,随着迭代 次数的增加,*s* 值逐渐减小。恢复遥感图像中的耀斑 区域,主要步骤和流程如图 2 所示,其中 *N* 为最大迭 代次数,*Y*。为初始图像,*Y*_k 为第 *k* 次迭代后的图像。

3 实验与结果分析

2019年5月在上海市青浦区莲渔村开展无人 机多光谱遥感飞行实验,飞行时间为10:30至14:30, 采用多光谱遥感传感器,仪器参数如表1所示。

表 1 遥感传感器的参数

Table 1 Talameters of Temote sensing sensor	Table 1	Parameters	of	remote	sensing	sensor
---------------------------------------------	---------	------------	----	--------	---------	--------

Parameter type	Specific value		
Number of channels	5		
Band setting /nm	490,550,615,680,740		
Spatial resolution /m	0.17		
Spectral resolution /nm	20		
Flying height /m	400		

获取原始图像数据后,还需要进行几何校正、图 像拼接和辐射定标等一系列预处理操作,同时研究 对象主要集中在水体区域中。对图像进行预处理后 再进行裁剪,将大块陆地或其他一些无关区域进行





Fig. 2 Flow chart of recovery of glint

(a)



剔除,便于后续处理。完成上述处理后,选择蓝色通 道的波长为490 nm、绿色通道的波长为550 nm、红 色通道的波长为680 nm 以及近红外通道的波长为 740 nm 对耀斑区域进行检测和提取,耀斑区域的检 测结果如图3所示。图3(a)为裁剪后的彩色合成 图像,图3(b)为水体区域二值图像,图3(c)为耀斑 区域二值图像。

从图 3 可以看到,基于 NDWI 与 CBS 的耀斑检 测算法能够有效对水体耀斑区域进行检测和提取。 完成耀斑的检测和提取后,使用 G 计算 W,继而对 图像耀斑区域的信息进行恢复。耀斑区域恢复的基 本思路是从图像整体的保真度和局部平滑度两个方 向出发,利用 DCT 并采用逐步迭代的方式对耀斑 区域的信息进行恢复,在尽可能接近真实值的同时 保持较好的平滑度。整个恢复过程都是自适应的, 唯一需要预先设置的参数是最大迭代次数 N,关于 如何确定最佳的 N,实验提出一种基于相对变化率 的判定指标来确定最佳的 N,其中相对变化率指标 c 的表达式为

$$c = \frac{\operatorname{mean}(|\boldsymbol{X}_{k} - \boldsymbol{X}_{k-1}|)}{\operatorname{mean}(\boldsymbol{X}_{k})}, \quad (15)$$

式中: X_k 为第k 次迭代结果; $|X_k - X_{k-1}|$ 为第k 次 迭 代结果相对于第k - 1次迭代的变化量。由(15)式





可知, c 为第 k 次迭代结果的相对改变量, 当 c 值越 小且相对变化较小时,则判定达到最佳的迭代次数。 图 4 为 c 随着 k 的变化曲线。

从图 4 可以看到,随着 k 值的增加,c 值不断下降,在 k 值增加初期,c 值的下降速率较快,随着 k 值的增加,c 值的下降速率逐渐减缓,当迭代次数达到 50 时,c 值已趋于 0 且变化很小,此时判定 N = 50 为最佳的迭代次数。不同 k 值的恢复结果,如图 5 所示。

从图 5 可以看到,随着 k 值的增加,图像耀斑区 域的恢复效果愈加显著。当 k 值较小时(k≪5),耀



Fig. 4 Relationship between c and k

斑区域与正常区域有明显的分界现象,耀斑区域内



图 5 不同 k 值的恢复结果。(a)原始图像;(b) k=5; (c) k=20; (d) k=50Fig. 5 Recovery results for different k values.

(a) Original image; (b) *k*=5; (c) *k*=20; (d) *k*=50 部有较明显的分块现象,同时图像整体色调发生改 变。迭代计算初期,输出图像的初始值为零,输出图 像的像素值并未逼近原始图像的像素值,因而出现 色调改变的情况。随着 *k* 值的增加(*k*=20),图像 色调逐渐与原始图像保持一致,耀斑区域和正常区 域基本无明显的分界现象,但在耀斑区域内部仍有 轻微的分块现象。当*k* 值达到 50 次时,分界现象基 本消失,耀斑区域内部无分块现象,整体色调与细节

保持一致,在视觉方面已经具有较好的修复效果。 为了准确评价所提算法,将从图像的纹理特征与光 谱特征两个方面对图像的恢复效果进行定量评价, 并与其他两种经典的耀斑去除算法进行比较。

3.1 纹理特征评价

实验采用图像的局部结构相似度(LSSIM),用 来评价图像耀斑区域恢复后对于纹理特征的恢复能 力,具体方式是随机选择图像水体耀斑区域恢复后 某一大小的图像块,与正常水体区域内同样尺寸的 图像块,计算两个图像块之间的结构相似程度,结构 相似程度可以利用结构相似度(SSIM)来描述,具体 的计算公式为

$$I_{\text{SSIM}}(L_1, L_2) = \frac{(2\mu_1\mu_2 + c_1)(2\sigma_{12} + c_2)}{(\mu_1^2 + \mu_2^2 + c_1)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + c_2)},$$
(16)

式中: L_1 和 L_2 为水体耀斑区域和水体非耀斑区的 图像块; μ_1 , σ_1 和 μ_2 , σ_2 分别为两个图像块的平均 值和标准差; σ_{12} 为两个图像块的协方差; c_1 和 c_2 为 常数,防止分母为零,其中 $c_1 = (k_1M)^2$, $c_2 = (k_2M)^2$, $k_1=0.01$, $k_2=0.03$,M为像素值。 计算 SSIM 的唯一前提是要确定图像块的尺 寸。综合考虑准确度和计算速度并结合实际测试, 最终选择尺寸为 15 pixel×15 pixel 的图像块来计 算图像的 LSSIM。为了验证所提算法的恢复效果, 在同样的实验条件下使用 Hochberg 法和 Goodman 法进行对比验证,重复实验 50 次后取平均值作为最 终结果,各波段图像的具体结果如表 2 所示。

表 2 不同算法恢复后的 SSIM

Table 2 SSIM after recovery with different algorithms								
Band /nm	490	550	615	685	740			
Hochberg	0.3328	0.3512	0.3756	0.3845	0.1912			
Goodman	0.4258	0.4987	0.5654	0.5121	0.4554			
DCT	0.6546	0.6883	0.6813	0.6884	0.7112			

从表 2 可以看到,相比于经典的 Hochberg 法和 Goodman 法,使用 DCT 法恢复图像后的 SSIM 较高,这表明所提算法能够较好地恢复图像的纹理特征。

3.2 光谱特征评价

评价算法的恢复效果,不仅要关注图像的纹理 特征,还要关注遥感图像的光谱特征。实验过程中, 由于未能实时地获取耀斑区域的真实光谱信息,无 法利用恢复后的光谱信息与真实进行比对,并考虑 到水体作为单一连续的物体,在一定范围内水体的 反射率具有相似性和连续性,因此可以认为耀斑区 域的真实反射率与正常区域的水体反射率相似或接 近,所以利用恢复后的耀斑区域的反射率均值与正 常区域进行对比来评价恢复算法对光谱特征的恢复 情况。图 6 为三种恢复算法得到的耀斑区域的平均 反射率与正常区域的对比曲线。



从图 6 可以看到,使用所提算法恢复后的图像 耀斑区域,其光谱反射率与正常区域最为接近,其他 两种经典方法在一定程度上都存在较大偏差。从整 体上来看,三种方法在绿波段的结果十分接近,其他 波段的恢复效果差异较大,这与各算法的主要思想 有关;从细节上来看,Hochberg法在蓝、绿波段的反 射率较低,对耀斑增益的估计值偏大,存在过度校正 的问题,Goodman法则在可见近红外波段的反射率 较高,对耀斑增益的估计值偏小,存在欠校正的问 题,基于 DCT 的图像耀斑恢复算法不估算耀斑增 益,而是利用整体的保真度和局部粗糙度直接对 耀斑区域的反射率进行预测,因此与正常水域的 反射率最为接近。相比两种经典方法,基于 DCT 的耀斑区域恢复算法能够较好地恢复耀斑区的光谱 特征。

4 结 论

水体耀斑作为低空无人机遥感图像上一种十分 常见的现象,严重制约了图像的后续研究和应用。 目前,有关水体耀斑检测和去除算法大多利用水体 反射率近红外波段离水辐亮度为零这一特性来实现 的,而低空无人机遥感图像通常不满足这一条件。 针对这一问题,首先将 NDWI 与 CBS 结合,实现耀 斑区域的精准定位和提取;随后从图像整体的保真 度以及局部平滑度两个方面定义优化函数,使用 DCT 对耀斑区域的像素值进行迭代计算,最终得到 恢复后的遥感图像;最后从图像的纹理特征和光谱 特征两个方面对恢复结果进行定量评价。实验结果 表明,在对图像纹理特征和光谱特征的恢复方面,相 较于两种经典方法,基于 DCT 的耀斑恢复算法能 够取得更好的效果。

参考文献

- [1] Pei X B, Wu H L, Ma P, et al. Analysis of the spectrum and vegetation index of rice under different nitrogen levels based on unmanned aerial vehicle remote sensing[J]. Chinese Optics, 2018, 11(5): 832-840. 裴信彪, 吴和龙, 马萍, 等. 基于无人机遥感的不同 施氮水稻光谱与植被指数分析[J]. 中国光学, 2018, 11(5): 832-840.
- [2] Dai P Q, Ding L X, Liu L J, et al. Tree species identification based on FCN using the visible images obtained from an unmanned aerial vehicle[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2020, 57(10): 101001.
 戴鹏钦,丁丽霞,刘丽娟,等.基于FCN的无人机可见光影像树种分类[J]. 激光与光电子学进展, 2020,

57(10): 101001.

- Wang S K, Yu C Y, Sun Y J, et al. Specular reflection removal of ocean surface remote sensing images from UAVs [J]. Multimedia Tools and Applications, 2018, 77(9): 11363-11379.
- [4] Cao B C, Zhu S L, Qiu Z G, et al. Sun glint correction of multispectral satellite imagery in South China sea[J]. Journal of Zhengzhou Institute of Surveying and Mapping, 2017, 34(2): 187-192.
 曹彬才,朱述龙,邱振戈,等. 南海区域卫星多光谱 影像太阳耀斑消除方法[J]. 测绘科学技术学报, 2017, 34(2): 187-192.
- [5] Wang M, Bailey S W. Correction of sun glint contamination on the SeaWiFS ocean and atmosphere products[J]. Applied Optics, 2001, 40(27): 4790-4798.
- [6] Wang M H, Isaacman A, Franz B A, et al. Oceancolor optical property data derived from the Japanese ocean color and temperature scanner and the French polarization and directionality of the Earth's reflectances: a comparison study[J]. Applied Optics, 2002, 41(6): 974-990.
- [7] Hochberg E J, Andrefouet S, Tyler M R. Sea surface correction of high spatial resolution Ikonos images to improve bottom mapping in near-shore environments[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2003, 41(7): 1724-1729.
- [8] Goodman J A, Lee Z, Ustin S L. Influence of atmospheric and sea-surface corrections on retrieval of bottom depth and reflectance using a semi-analytical model: a case study in Kaneohe Bay, Hawaii [J]. Applied Optics, 2008, 47(28): F1-F11.
- [9] Zhang X, Zhang J Q, Jin W, et al. Method for removing sun glint from hyperspectral image [J]. Acta Optica Sinica, 2008, 28(4): 664-668.
 张翔,张建奇,靳薇,等.一种新的高光谱图像中太 阳耀斑去除方法[J].光学学报, 2008, 28(4): 664-668.
- [10] Shen H L, Zhang H G, Shao S J, et al. Chromaticitybased separation of reflection components in a single image[J]. Pattern Recognition, 2008, 41(8): 2461-2469.
- Garcia D. Robust smoothing of gridded data in one and higher dimensions with missing values[J]. Computational Statistics & Data Analysis, 2010, 54(4): 1167-1178.
- [12] Strang G. The discrete cosine transform [J]. SIAM Review, 1999, 41(1): 135-147.