

基于彩色相机的双波长剪切散斑干涉法同步 测量面内外位移导数

吴敏杨¹, 马银行¹, 程昊², 杨福俊^{1*}

¹东南大学江苏省工程力学重点实验室, 江苏 南京 211189;

²北京强度环境研究所可靠性与环境工程技术重点实验室, 北京 100076

摘要 提出了一种基于彩色摄像机的双波长激光剪切散斑干涉测量方法,用于同步测量变形物体的面内和面外位移导数。两束不同波长的激光以相同的入射角,同时对称地照射在被测物体表面。基于改进的迈克耳孙干涉光路并仅用一个相移器,建立了时间相移的双波长激光剪切散斑干涉测量系统。通过一个 3 芯片彩色相机的绿色和蓝色通道记录两个不同波长激光干涉形成的干涉图。运用 Carré 算法从分离的绿色和蓝色剪切散斑干涉条纹图中提取出与面内和面外变形导数分量相关的相位。悬臂铝梁的变形测量结果验证了该测试系统的可行性。

关键词 测量; 双波长剪切散斑干涉; 位移导数测量; 3 芯片彩色相机

中图分类号 O348.1

文献标志码 A

doi: 10.3788/AOS202040.1812002

Color-Camera-Based Dual-Wavelength Shearography for Simultaneously Measuring in-Plane and out-of-Plane Displacement Derivatives

Wu Minyang¹, Ma Yinhang¹, Cheng Hao², Yang Fujun^{1*}

¹Jiangsu Key Laboratory of Engineering Mechanics, Southeast University, Nanjing, Jiangsu 211189, China;

²Science and Technology on Reliability and Environment Engineering Laboratory, Beijing Institute of Structure and Environment Engineering, Beijing 100076, China

Abstract A color-camera-based shearography system using dual-wavelength lasers was developed for simultaneously measuring the in-plane and out-of-plane displacement derivatives of a deformed object. Lasers of dual wavelengths are arranged to symmetrically and simultaneously illuminate on the object with identical angles of incidence. A set of phase-shifter and a modified Michelson interferometer are used to build a temporal-phase-shift dual-wavelength shearography. The interferograms formed by the two wavelength are recorded by one 3-chip color camera with green and blue channels. The phases related to the in-plane and out-of-plane components are extracted from the shearograms by using Carré algorithm. Experiment on a cantilevered aluminum beam deformation was performed to verify the feasibility and the capability of the testing system.

Key words measurement; dual-wavelength shearography; measurement of displacement derivative; 3-chip color camera

OCIS codes 120.6160; 120.3180; 120.6650

1 引 言

变形和应变高效的无损检测(NDT)在产品质量和可靠性检测中扮演着重要角色。光学方法具有响应速度快、非接触和全场测量的优点。其中,数字全息干涉法(DHI)、电子散斑干涉技术(ESPI)和数字剪切散斑干涉技术都是装置简单且有效的微米级

测试方法,被广泛应用于光学粗糙表面结构的小变形和应变的测量、残余应力评估、振动表征和微转动位移测量等^[1-5]。DHI 和 ESPI 都可以用于对测试物体进行多维度的全场变形分析且具有极高的测量灵敏度;但对测量环境要求严格,如隔振、温度控制等,这些实验条件限制了它们的应用。数字剪切散斑干涉法对环境扰动相对不敏感,可直接测量变形

收稿日期: 2020-05-14; 修回日期: 2020-06-01; 录用日期: 2020-06-09

基金项目: 国家自然科学基金(11772092,11472081)、江苏省研究生科研实践创新项目(KYCX19_0059)

* E-mail: yang-fj@seu.edu.cn

的一阶导数。早在 1973 年, Leendertz 等^[6]、Hung 等^[7]的研究工作中就已提出此方法, 并由 Hung 等^[8]进一步发展。与其他干涉方法不同的是, 数字剪切散斑干涉法由两束相同的横向剪切物光光束产生干涉, 可以通过一个位于物体和成像传感器之间的剪切元件来实现。由于不需要额外的参考光束, 剪切散斑干涉方法的装置相对简单。在过去的几十年里, 随着计算机、内存存储和相机传感器的快速发展, 数字剪切散斑干涉方法取得了许多进展, 并被认为是 NDT 中最实用的工具之一, 在工业界中得到广泛应用^[9]。许多光学元件都可作为剪切装置^[7-13], 如平行玻璃板或小角度的玻璃楔就是最简单的剪切单元^[7-8, 10], 而衍射光栅是另一种用于剪切单元的简单光学元件^[11-12]。当一束光通过沃拉斯顿棱镜时, 会产生双折射分成两束折射光, 由于两束折射光的偏振面相互垂直, 需要在沃拉斯顿棱镜和相机之间放置一个偏振器, 这样两束光在成像传感器的平面上才可以发生干涉^[13]。在许多实际应用中, 改进的迈克耳孙干涉仪因具有结构紧凑、剪切量和剪切方向易调整等特点而被用作剪切元件^[6, 9]。对于实际测量或研究材料、结构变形时, 需要同步测量多个方向的位移或其空间导数。目前, 一些已开发的测试技术均能满足上述要求^[1, 14-16]。这些方法或基于多波长或彩色 DHI, 或基于空间复用剪切散斑干涉法。利用傅里叶变换可以从变形前后记录的干涉图中进一步获得测量分量的信息。然而, 在傅里叶变换过程中, 被测物理量或力学量的最大范围受空间载波频率的限制, 且在傅里叶变换过程中由能量泄漏造成的误差是不可避免的。

本文提出仅用一台相机和一个剪切装置, 且在测试前无需任何校准就可以同步得到与面内和离面变形位移导数相关信息的测试方法。该方法利用两个不同波长的激光对物体进行多向照明, 并利用具有红、绿、蓝三个颜色通道的 CCD 彩色相机同步记录散斑剪切干涉图。仅用一个相移器及 Carré 相位计算算法同步实现双波长剪切散斑干涉图的相位解调, 对悬臂铝梁进行的双向弯曲变形导数测试, 结果表明, 本文方法完全可以用于多方向变形的同步测量与分析。

2 测量原理

2.1 剪切散斑干涉测量法

图 1 为两种不同激光照明下双波长剪切散斑干涉方法的实验设置。蓝光和绿光以相同的入射角 θ

对称地同时照在物体表面, 虽然两束光在物体表面相互重叠, 但由于波长和光源均不相同, 所以不会产生干涉。如图 1 所示, 物体反射的光经过一个改进的迈克耳孙干涉仪后投射到一个拥有红、绿、蓝三通道的 3CCD 彩色相机中, 将迈克耳孙干涉仪的镜面 2 从初始位置旋转一个非常小的角度 β , 在 CCD 相机的像面上形成一对被测物体的横向剪切图像。如图 2(a) 所示, 物体表面上两点 $P(x, y, z)$ 和 $Q(x + \delta x, y, z)$, 当图像在沿 x 方向有一个剪切量 δx 时, 这两个点会相互重叠发生散斑干涉, 重叠部分用图 2(b) 中的图标“ \odot ”表示。

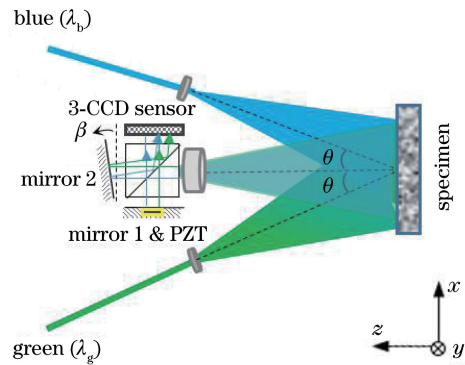


图 1 双波长剪切干涉测量装置原理图

Fig. 1 Schematic of dual-wavelength shearography setup

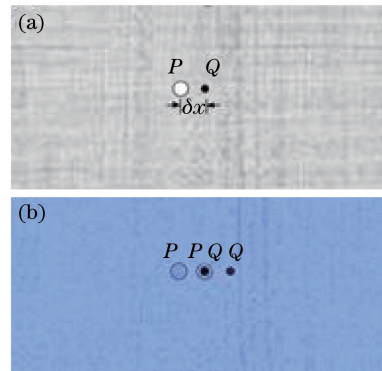


图 2 图像剪切简图。(a)剪切前;(b)剪切后

Fig. 2 Diagrams of image shearing. (a) Before shearing; (b) after shearing

首先对绿光的剪切散斑干涉图进行描述。从点 $P(x, y, z)$ 和点 $Q(x + \delta x, y, z)$ 反射的绿色光波复振幅可分别表示为

$$\begin{cases} u_{g1}(x, y, z) = U_{g1} \exp(i\phi_{g1}) \\ u_{g2}(x + \delta x, y, z) = U_{g2} \exp(i\phi_{g2}) \end{cases}, \quad (1)$$

式中: ϕ_{g1} 和 ϕ_{g2} 为随机相位; U_{g1} 和 U_{g2} 为光波的振幅; 下标“g”代表绿光。CCD 记录的光强可以描述为

$$I_g(x, y) = |u_{g1} + u_{g2}|^2 = U_{g1}^2 + U_{g2}^2 + 2U_{g1}U_{g2} \cos(\phi_{g1} - \phi_{g2}). \quad (2)$$

当物体发生变形时,点 $P(x, y, z)$ 和点 $Q(x + \delta x, y, z)$ 的位移向量可以表示为

$$\begin{cases} \mathbf{D}_1 = (u, v, w) \\ \mathbf{D}_2 = (u + \delta u, v + \delta v, w + \delta w) \end{cases} \quad (3)$$

此时,两点分别变为 $P'(x + u, y + v, z + w)$ 和 $Q'(x + \delta x + u + \delta u, y + v + \delta v, z + w + \delta w)$, 从点 P' 和点 Q' 反射的光波复振幅可分别描述为

$$\begin{cases} u'_{g1}(x, y, z) = U'_{g1} \exp[i(\phi_{g1} + \varphi_{g1})] \\ u'_{g2}(x + \delta x, y, z) = U'_{g2} \exp[i(\phi_{g2} + \varphi_{g2})] \end{cases}, \quad (4)$$

式中: φ_{g1} 和 φ_{g2} 为两点产生位移后光程差引起的相位变化,由于位移非常小,点 P' 和点 Q' 在剪切图像上依然重叠。因此,相对应 CCD 记录的光强变为

$$I'_g(x, y) = |u'_{g1} + u'_{g2}|^2 = U'^2_{g1} + U'^2_{g2} + 2U'_{g1}U'_{g2} \cos(\phi_{g1} - \phi_{g2} + \Delta\varphi_g), \quad (5)$$

式中: $\Delta\varphi_g = \varphi_{g1} - \varphi_{g2}$ 表示两点相对位移引起的相对相位变化。假设相邻两个点的光波振幅是相等的,将物体变形前后的剪切散斑干涉图相减,可得

$$\begin{cases} \Delta I_g(x, y) = |I_g(x, y) - I'_g(x, y)|^2 = 4U_g^2 \left| \sin \frac{\Delta\varphi_g}{2} \sin \left(\phi_{g1} - \phi_{g2} + \frac{\Delta\varphi_g}{2} \right) \right| \\ \Delta I_b(x, y) = |I_b(x, y) - I'_b(x, y)|^2 = 4U_b^2 \left| \sin \frac{\Delta\varphi_b}{2} \sin \left(\phi_{b1} - \phi_{b2} + \frac{\Delta\varphi_b}{2} \right) \right| \end{cases}, \quad (6)$$

式中: $\Delta I_g(x, y)$ 表示绿色激光照明下的剪切散斑干涉强度分布; $\Delta I_b(x, y)$ 表示蓝色激光照明下的剪切散斑干涉强度分布。

2.2 多位移导数测量原理

图 3(a) 和 (b) 分别为变形前后绿色激光和蓝色激光投射在物体表面 $P(x, y, z)$ 点上及漫反射回来

的光路示意图(尽管图 1 所示光路中,两束入射激光不是准直平行光,但激光自扩束镜到被测物的距离比被测区域范围大很多,因此在物面附近的入射光仍可视作平行光束)。假设点 P 变形后到点 P' 沿 x, y, z 方向的位移分别是 u, v, w (未按比例绘制),其中 y 方向的位移 v 在图 3 中未画出。

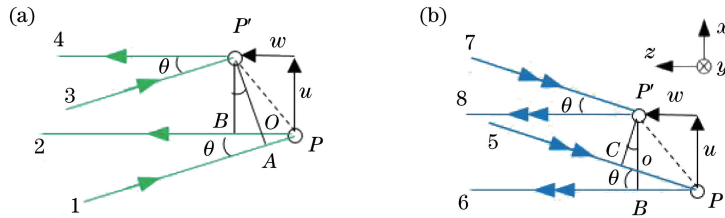


图 3 光路和位移图。(a)绿色激光;(b)蓝色激光

Fig. 3 Diagram of optical path and displacement. (a) Green laser; (b) blue laser

由于变形,在 $y=0$ 的测试平面上点 P 和点 P' 之间使用绿色和蓝色激光照明的光程差分别表示为 $D_g = PA + PB$ 和 $D_b = PC + PB$ 。将物理光程差

与波数相乘^[17],很容易得到光波相位变化与位移的关系式,表示为

$$\begin{cases} \varphi_{g1} = \frac{2\pi}{\lambda_g} D_g = \frac{2\pi}{\lambda_g} [w(1 + \cos \theta) - u \sin \theta] \\ \varphi_{b1} = \frac{2\pi}{\lambda_b} D_b = \frac{2\pi}{\lambda_b} [w(1 + \cos \theta) + u \sin \theta] \end{cases}, \quad (7)$$

式中: λ_g 和 λ_b 分别是绿色和蓝色激光的波长。同样,对于点 $Q(x + \delta x, y, z)$ 可以得到:

$$\begin{cases} \varphi_{g2} = \frac{2\pi}{\lambda_g} [(\omega + \delta\omega)(1 + \cos \theta) - (u + \delta u) \sin \theta] \\ \varphi_{b2} = \frac{2\pi}{\lambda_b} [(\omega + \delta\omega)(1 + \cos \theta) + (u + \delta u) \sin \theta] \end{cases}. \quad (8)$$

因此,可以得到 P 和 Q 两点之间因为相对位移而引起的相对相位变化:

$$\begin{cases} \Delta\varphi_g = \frac{2\pi}{\lambda_g} \left[\frac{\partial w}{\partial x} (1 + \cos \theta) - \frac{\partial u}{\partial x} \sin \theta \right] \delta x \\ \Delta\varphi_b = \frac{2\pi}{\lambda_b} \left[\frac{\partial w}{\partial x} (1 + \cos \theta) + \frac{\partial u}{\partial x} \sin \theta \right] \delta x \end{cases} \quad (9)$$

通过将 $\Delta\varphi_g$ 与 $\Delta\varphi_b$ 分别相加和相减可以得到纯离面和面内的位移导数,即

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\lambda_g \Delta\varphi_g + \lambda_b \Delta\varphi_b}{4\pi(1 + \cos \theta) \delta x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\lambda_b \Delta\varphi_b - \lambda_g \Delta\varphi_g}{4\pi \sin \theta \delta x} \end{cases} \quad (10)$$

式中的相对相位变化可以通过相移技术从(2)式和(5)式提取出来。此外,将绿色和蓝色激光绕 z 轴旋转 90° 并调整剪切的方向,(10)式中的 u 、 δx 分别用 v 、 δy 来代替,就可测量 y 方向的面内位移导数。

2.3 相位计算原理

CCD 相机记录的(2)式和(5)式表示的光强可以简化为

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos \varphi(x, y) \quad (11)$$

利用移相技术^[18]可以从条纹图解调出未知的相位 $\varphi(x, y)$ 。如图 1 所示,通过安装在平面镜 1 上的压电陶瓷驱动平面镜 1 使两种颜色的光束同时产生相移。不过,两束光之间的相移量是不同的。由于 Carré 方法^[19]具有计算时无需知道具体相移量值的优点,因此,本文采用该方法来计算物体变形前后两种不同颜色激光形成的剪切散斑干涉图像中每个像素的相位。四步等步长相移剪切散斑干涉图的强度可表示为

$$\begin{cases} I_{bi}(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [\varphi_b(x, y) + i\alpha_b] \\ I_{gi}(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [\varphi_g(x, y) + i\alpha_g] \end{cases}, i = 0, 1, 2, 3, \quad (12)$$

式中: α_b 和 α_g 分别是对应于蓝光和绿光的相移量。由(12)式可以求出:

$$\begin{cases} \varphi_b = \arctan \frac{\sqrt{[3(I_{b1} - I_{b2}) - (I_{b0} - I_{b3})] [(I_{b0} - I_{b3}) + (I_{b1} - I_{b2})]}}{(I_{b1} + I_{b2}) - (I_{b0} + I_{b3})} \\ \varphi_g = \arctan \frac{\sqrt{[3(I_{g1} - I_{g2}) - (I_{g0} - I_{g3})] [(I_{g0} - I_{g3}) + (I_{g1} - I_{g2})]}}{(I_{g1} + I_{g2}) - (I_{g0} + I_{g3})} \end{cases} \quad (13)$$

3 实 验

为了验证所提出的测试方法,对图 4(a)所示的悬臂铝梁双向弯曲引起的变形进行了测量。试件由厚度为 20 mm 的铝块经电火花切割加工而成的尺寸为 80 mm×15 mm×12 mm 的悬臂梁,为了确保梁的固定端为刚性约束,铝块切割时切割出的悬臂梁固定端仍与铝块为一整体,如图 4(b)所示。测量前,为了提

高反射率,在试件表面喷涂哑光白漆。图 4(b)中,采用两个螺旋微分顶杆对试件进行双向弯曲加载。两个光源是功率均为 80 mW 的二极管泵浦固体激光器,波长分别为 473 nm 和 532 nm。图 4(a)中测量区域大小为 34 mm×15 mm,照明的角度为 25.8° ,剪切量 $\delta x = 2$ mm。测量时,用分辨率为 1280 pixel×1024 pixel 的 3CCD 相机(AT140GE, JAI, 日本)记录物体变形前后的双波长剪切散斑干涉图。

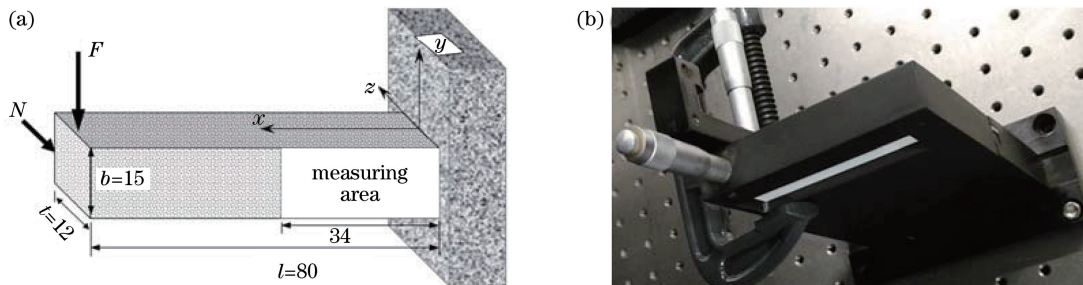


图 4 悬臂梁。(a)几何装置示意图;(b)加载装置

Fig. 4 Cantilever beam. (a) Schematic of geometric arrangement; (b) loading setup

将记录的剪切散斑干涉图按颜色通道分离出红、绿和蓝三色分量,如图 5 所示。可以看出,在红

色、绿色、蓝色三通道中并没有颜色的串扰。将 Carré 技术分别应用于分离出的绿色和蓝色通道的

图像,得到如图 6 所示的包裹相位图。需要注意的是,该结果是利用文献[20]中提出的相位滤波方法去除相位噪声后的结果。将两个相位图解包裹之后,利用(10)式就可得到与纯面内和纯离面位移的导数有关的相位图。

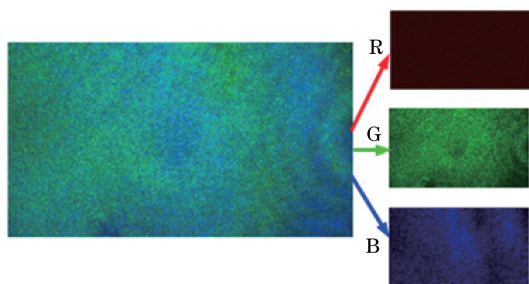


图 5 彩色散斑图案及其 RGB 组成部分

Fig. 5 Color speckle pattern and its RGB components

图 7(a)为测量区域的实测面内应变场,图 7(b)为有限元法计算结果。对比发现,两者应变场的分布形态和整体轮廓吻合较好;图 7(c)为实验得到的

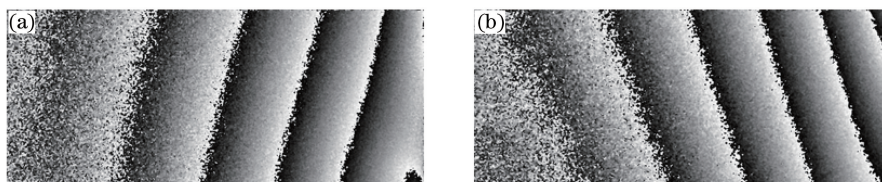


图 6 包裹相位图。(a)绿色通道;(b)蓝色通道

Fig. 6 Wrapped phase maps. (a) Green channel; (b) blue channel

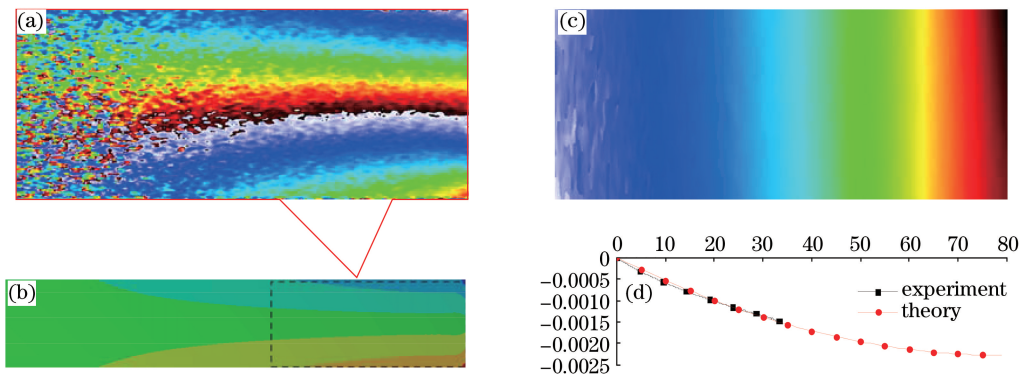


图 7 实验和理论对比图。(a)实测面内位移导数;(b)有限元模拟计算面内应变;
(c)实测离面位移导数;(d) dw/dx 的实验与理论解的比较

Fig. 7 Experimental and theoretical comparison chart. (a) Derivative of measured in-plane displacement; (b) finite element simulation to calculate in-plane strain; (c) derivative of measured out-of-plane displacement; (d) dw/dx comparison of experimental and theoretical solutions

4 结 论

提出了一种用于同步测量面内和面外变形位移导数的双波长剪切散斑干涉测量方法。该方法的主要优点是仅用一个剪切装置和一个相机进行多维变

测量区域的挠度导数二维云图。当图 3(a)所示的悬臂梁自由端受集中荷载 N 作用时,其任意截面上以 x 为变量的挠度分布为^[21]

$$\omega = \frac{Nx^2}{6EI}(x - 3l). \quad (14)$$

由(14)式可得其斜率为

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{Nx}{2EI}(x - 2l), \quad (15)$$

式中: l 为梁的长度; E 为试件材料的杨氏模量($E = 69$ GPa); I 为梁截面关于 y 轴的惯性矩($I = bt^3/12$, b 是宽度, t 是厚度)。在实验中,铝梁的自由端挠度为 0.12 mm,根据(14)式可以推出施加的荷载 $N = 106$ N。将 $E = 69$ GPa, $l = 80$ mm, $b = 15$ mm, $t = 12$ mm 和 $N = 106$ N 代入(15)式可以解出整个量弯曲挠度的斜率分布,如图 7(d)中红色圆点-划线所示。图 7(d)中黑色方块-划线对应于测试区域的实验测量结果;可见测量区域的实验结果与理论值吻合得很好。

形测量。与数字全息干涉法相比,该方法由于具有共路剪切特性,且对隔振和温度控制的限制较小,具有较好的实际应用价值。此外,该方法能在不需要标定的情况下给出位移导数,与文献[13]的分屏同时记录两个剪切图测量方法相比,不需要进行图像

匹配标定,不存在分屏导致图像分辨率下降的问题,因此本文方法测量更精确,但相移的不完全线性和散斑对测量精度依然存在不可避免的影响。对悬臂铝梁的双向弯曲变形的导数进行测量,结果表明,实测结果与理论预测结果吻合较好,验证了该方法的准确性与可靠性。

参 考 文 献

- [1] Rajshekhar G, Gorthi S S, Rastogi P. Simultaneous measurement of in-plane and out-of-plane displacement derivatives using dual-wavelength digital holographic interferometry [J]. *Applied Optics*, 2011, 50(34): H16-H21.
- [2] Li X Y, Huang Z H, Zhu M, et al. Measurement of transient deformation using high-speed temporal speckle pattern interferometry [J]. *Acta Optica Sinica*, 2015, 35(6): 0612002.
李翔宇, 黄战华, 朱猛, 等. 瞬态形变的高速时域散斑干涉测量[J]. *光学学报*, 2015, 35(6): 0612002.
- [3] Dai X, Yun H, Shao X, et al. Thermal residual stress evaluation based on phase-shift lateral shearing interferometry[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2018, 105: 182-187.
- [4] Ma Y H, Jiang H Y, Dai M L, et al. Cantilevered plate vibration analysis based on electronic speckle pattern interferometry and digital shearing speckle pattern interferometry[J]. *Acta Optica Sinica*, 2019, 39(4): 0403001.
马银行, 蒋汉阳, 戴美玲, 等. 基于电子散斑干涉与数字剪切散斑干涉法的悬臂薄板振动分析[J]. *光学学报*, 2019, 39(4): 0403001.
- [5] Wu M Y, Lu G C, Ma Y H, et al. Double speckle pattern interferometric measurements for micro-angular displacement and the center of rotation[J]. *Optics Letters*, 2020, 45(1): 188-191.
- [6] Leendertz J A, Butters J N. An image-shearing speckle-pattern interferometer for measuring bending moments [J]. *Journal of Physics E: Scientific Instruments*, 1973, 6(11): 1107-1110.
- [7] Hung Y Y, Taylor C E. Speckle-shearing interferometric camera: a tool for measurement of derivatives of surface-displacement [J]. *Proceedings of SPIE*, 1974, 41: 169-176.
- [8] Hung Y Y, Liang C Y. Image-shearing camera for direct measurement of surface strains [J]. *Applied Optics*, 1979, 18(7): 1046-1051.
- [9] Yang L X, Xie X. Digital shearography: new developments and applications [M]. Bellingham: Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers Press, 2016.
- [10] Mihaylova E, Whelan M, Toal V. Simple phase-shifting lateral shearing interferometer [J]. *Optics Letters*, 2004, 29(11): 1264-1266.
- [11] Mihaylova E, Naydenova I, Martin S, et al. Simple electronic speckle pattern shearing interferometer with a holographic grating as a shearing element[J]. *Proceedings of SPIE*, 2005, 5962: 596226.
- [12] Mello M, Hong S, Rosakis A J. Extension of the coherent gradient sensor (CGS) to the combined measurement of in-plane and out-of-plane displacement field gradients [J]. *Experimental Mechanics*, 2008, 49(2): 277-289.
- [13] Dong J, Wang S J, Lu M, et al. Real-time dual-sensitive shearography for simultaneous in-plane and out-of-plane strain measurements [J]. *Optics Express*, 2019, 27(3): 3276-3283.
- [14] Pedrini G, Zou Y L, Tiziani H J. Simultaneous quantitative evaluation of in-plane and out-of-plane deformations by use of a multidirectional spatial carrier[J]. *Applied Optics*, 1997, 36(4): 786-792.
- [15] Saucedo-A T, de la Torre-Ibarra M H, Santoyo F M, et al. Digital holographic interferometer using simultaneously three lasers and a single monochrome sensor for 3D displacement measurements[J]. *Optics Express*, 2010, 18(19): 19867-19875.
- [16] Morimoto Y, Matui T, Fujigaki M. Three-dimensional displacement analysis by windowed phase-shifting digital holographic interferometry[J]. *Experimental Analysis of Nano and Engineering Materials and Structures*, 2007: 49-56.
- [17] Cloud G. Back to basics. Optical methods in experimental mechanics. Part 10: complex amplitude [J]. *Experimental Techniques*, 2004, 28(1): 15-17.
- [18] Gasvik K J. *Optical metrology*[M]. England: John Wiley & Sons Incorporated, 2003.
- [19] Carre P. Installation et utilisation du comparateur photoélectrique et interférentiel du Bureau International des Poids et Mesures [J]. *Metrologia*, 1966, 2(1): 13-23.
- [20] Aebischer H A, Waldner S. A simple and effective method for filtering speckle-interferometric phase fringe patterns [J]. *Optics Communications*, 1999, 162(4/5/6): 205-210.
- [21] Hibbeler R C. *Mechanics of materials: chapter 12* [M]. Singapore: Prentice Hall, 2011.