

双能谱 CT 迭代重建的一种加速收敛算法

罗婷^{1,2}, 赵云松^{2,3*}

¹中国人民公安大学警务信息工程与网络安全学院, 北京 100038;

²首都师范大学数学科学学院, 北京 100048;

³首都师范大学北京成像技术高精尖创新中心, 北京 100048

摘要 双能谱 CT(DSCT)可以重建被测物的材料分辨图像和能量分辨图像,进而区分物质,在医学、工业领域都有广泛的应用。图像重建算法是影响 DSCT 成像质量的关键技术。广义代数重建算法(E-ART)可以重建得到高质量的双基材料图像,但是该算法收敛速度较慢。针对该问题,提出一种加速收敛算法(AE-ART),其基本思想是通过为基函数添加权重来增大高能和低能投影曲线的夹角或减小高能和低能投影方程组系数矩阵条件数。使用口腔模型对水和骨双基材料分解进行模拟实验,实验结果表明:与 E-ART 算法相比,AE-ART 算法的收敛速度提高了 30% 以上。

关键词 成像系统; 双能谱 CT; 迭代重建; 基材料分解; 广义代数重建算法

中图分类号 TP391.4

文献标志码 A

doi: 10.3788/AOS202040.1411001

An Acceleration Algorithm for Dual-Spectral Computed Tomography Reconstruction

Luo Ting^{1,2}, Zhao Yunsong^{2,3*}

¹School of Police Information Engineering and Cyber Security, People's Public Security University of China, Beijing 100038, China;

²School of Mathematical Sciences, Capital Normal University, Beijing, 100048, China;

³Beijing Advanced Innovation Center for Imaging Technology, Capital Normal University, Beijing, 100048, China

Abstract Dual-spectral computed tomography (DSCT) is used to reconstruct material- and energy-selective images to distinguish scanned object's materials and thus has numerous applications in medical and industrial fields. The image reconstruction method is vital in DSCT imaging, among which extended algebraic reconstruction technique (E-ART) can reconstruct basis material images with high quality. However, slow convergence limits its application. Herein, an accelerated extended algebraic reconstruction algorithm (AE-ART) was proposed. The main idea of the proposed algorithm is to increase the angle between the projection curves of high and low energies or to reduce the conditional number of coefficient matrix of those two projection curves by adding weights to the basis functions. Simulated experiments of dental phantom were conducted and the results indicated that the convergence rate of AE-ART was 30% higher than that of E-ART.

Key words imaging system; dual-spectral computed tomography; iterative reconstruction; basis material decomposition; extended algebraic reconstruction technique

OCIS codes 110.6955; 110.3010; 110.7440

1 引 言

与传统计算机断层成像(CT)相比,双能谱 CT(DSCT)可以重建被测物的电子密度图像、等效原

子序数图像、材料分辨图像、能量分辨图像,进而区分物质、去除伪影等^[1-5]。鉴于 DSCT 成像的这些优势,DSCT 在医学和工业领域都有广泛的应用^[6-11]。

收稿日期: 2020-03-17; **修回日期:** 2020-04-06; **录用日期:** 2020-04-13

基金项目: 中国人民公安大学 2019 年度基本科研业务费新任教师科研启动基金项目(2019JKF424)、国家自然科学基金(61771324)

* **E-mail:** zhao_yunsong@cnu.edu.cn

图像重建算法是影响 DSCT 成像质量的关键技术。针对 DSCT 图像重建问题,2014 年,作者所在课题组提出了 DSCT 广义代数重建算法(E-ART)^[12-13]。该算法将双能谱重建问题建模为非线性投影方程组的求解问题,迭代求解过程中,通过一阶泰勒展开,将非线性方程组近似为线性方程组,然后利用与代数迭代重建算法(ART)类似的加权方法分配残差,更新估计图像。E-ART 算法形式灵活,适用于各种常见的 CT 扫描模式,而且具有很好的抗噪性能。但是由于 E-ART 算法逐射线进行修正,以及 DSCT 具有高能和低能投影数据相关性强的特点,E-ART 算法的收敛速度还需要进一步提高^[14]。

针对该问题,本文首先分析了影响 E-ART 算法收敛速度的原因,然后针对性地提出一种加速 E-ART 算法收敛(AE-ART)的方法,其基本思想是通过为基函数添加权重,来增大高能和低能投影方程曲线的夹角或减小高能和低能投影方程组系数矩阵条件数。理论分析发现,该加速方法属于右预条件系统,因此具有良好的理论基础。本文对水和骨双基材料分解做了模拟实验,实验结果表明:本文 AE-ART 算法的收敛速度比 E-ART 算法提高了 30% 以上;而且要求重建图像的精度越高,加速效果越明显;两类权重相比,使用使得系数矩阵条件数最小的权重的加速效果略好。

2 理论模型及重建算法

2.1 双能谱 CT 成像模型

在忽略散射的情况下,多色 X 射线穿过物体的投影数据可以表示为^[15]

$$p(L) = -\ln \int_S S(E) \exp \left[- \int_L \mu(\mathbf{x}, E) dl \right] dE, \quad L \in \mathcal{L}, \quad (1)$$

式中: L 是一条 X 射线路径; \mathcal{L} 表示所有 X 射线路径的集合; E 为射线中光子的能量; $\mu(\mathbf{x}, E)$ 是被测物体在点 \mathbf{x} 处的线性衰减系数; $S(E)$ 为归一化等效能谱,满足 $\int S(E) dE = 1$, 该能谱与 X 光管的发射能谱、探测器对 X 射线的响应效率以及所用滤波片的材质和厚度等因素相关。

DSCT 图像重建问题可以看作:已知不同能谱 $S_1(E), S_2(E)$ 下的两套投影数据 $p_1(\mathcal{L}_1), p_2(\mathcal{L}_2)$, 求 $\mu(\mathbf{x}, E)$, 其中 $\mathcal{L}_k (k=1, 2)$ 分别是两个能谱下的 X 射线路径集合。

在 DSCT 成像中,通常将 $\mu(\mathbf{x}, E)$ 表示为

$$\mu(\mathbf{x}, E) = \varphi(E)f(\mathbf{x}) + \theta(E)g(\mathbf{x}), \quad (2)$$

式中: $\varphi(E)$ 和 $\theta(E)$ 是只与 X 射线能量有关的基函数; $f(\mathbf{x})$ 和 $g(\mathbf{x})$ 是空间位置 \mathbf{x} 的函数,与 X 射线能量无关。选取基函数的典型方法有两种:一是光电效应/康普顿散射双效应函数^[1];二是两个材质的衰减系数^[2]。本文以选取两个材质的衰减系数为例。

在基于双基材料的分解方法中,基函数表示为两种基材料的线性衰减系数,重建的 $f(\mathbf{x})$ 和 $g(\mathbf{x})$ 分别表示两种基材料在被测物体中的密度分布,则 DSCT 图像重建问题转化为:已知 $p_k(L), L \in \mathcal{L}_k, k=1, 2$, 求解 $f(\mathbf{x})$ 和 $g(\mathbf{x})$, 其中

$$p_k(L) = -\ln \int_S S_k(E) \exp \left[- \varphi(E) \int_L f(\mathbf{x}) dl - \theta(E) \int_L g(\mathbf{x}) dl \right] dE, L \in \mathcal{L}_k, k=1, 2. \quad (3)$$

考虑到(3)式的离散形式,密度图像 $f(\mathbf{x})$ 和 $g(\mathbf{x})$ 以向量的形式表达,即

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_J)^T, \mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_J)^T, \quad (4)$$

式中: f_j, g_j 分别是图像 $f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})$ 在第 j 个像素上的采样值; J 是离散图像的像素个数; T 表示向量或矩阵的转置。令 $\mathbf{R}_i = (r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{ij})$ 表达第 i 条射线对应的投影向量,其中 r_{ij} 表示离散图像的第 j 个像素对沿着第 i 条射线的投影的贡献。将第 k 个 X 射线能谱的有效能量范围划分为 M_k 等份,每份的长度记为 δ , 在每个能量区间内对 $S_k(E), \varphi(E)$ 和 $\theta(E)$ 进行采样,用采样值作为原函数在每个小区间内的近似值。于是 $S_k(E), \varphi(E)$ 和 $\theta(E)$ 被离散为三个向量:

$$(S_{k,1}, S_{k,2}, \dots, S_{k,M_k})^T, (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{M_k})^T, (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{M_k})^T, \quad (5)$$

其中 $S_{k,m}, \varphi_m$ 和 θ_m 分别为 $S_k(E), \varphi(E)$ 和 $\theta(E)$ 在第 m 个子区间内的采样值。

根据上述符号定义,双能谱投影的离散形式可表示为

$$p_{k,i} = -\ln \sum_{m=1}^{M_k} S_{k,m} \delta \exp(-\varphi_m \mathbf{R}_i \mathbf{f} - \theta_m \mathbf{R}_i \mathbf{g}), \quad i \in \mathcal{J}_k, k=1, 2, \quad (6)$$

式中: \mathcal{J}_k 是第 k 个能谱的 X 射线路径的指标集。

离散化后,DSCT 双基材料分解图像重建问题就归结为:已知 $p_{k,i}, i \in \mathcal{J}_k, k=1, 2$, 求 \mathbf{f} 和 \mathbf{g} , 这是一个非线性方程组求解问题。

2.2 E-ART 算法

E-ART 算法将双能谱重建问题建模为非线性

投影方程组的迭代求解问题,不妨设已迭代 n 次,得到的迭代解为 $(\mathbf{f}^{(n)}, \mathbf{g}^{(n)})$,在第 $n+1$ 次迭代时,

将非线性投影方程组在迭代点 $(\mathbf{f}^{(n)}, \mathbf{g}^{(n)})$ 处以一阶 Taylor 展开式转化为线性方程组,即

$$p_{k,i} = p_{k,i}^{(n)} + \left(\frac{\Phi_{k,i}^{(n)}}{q_{k,i}^{(n)}} \mathbf{R}_i, \frac{\Theta_{k,i}^{(n)}}{q_{k,i}^{(n)}} \mathbf{R}_i \right) \begin{pmatrix} \mathbf{f} - \mathbf{f}^{(n)} \\ \mathbf{g} - \mathbf{g}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

其中,

$$\begin{cases} p_{k,i}^{(n)} = -\ln \sum_{m=1}^M S_{km} \delta \exp(-\varphi_m \mathbf{R}_i \mathbf{f}^{(n)} - \theta_m \mathbf{R}_i \mathbf{g}^{(n)}) \\ q_{k,i}^{(n)} = \sum_{m=1}^M S_{km} \delta \exp(-\varphi_m \mathbf{R}_i \mathbf{f}^{(n)} - \theta_m \mathbf{R}_i \mathbf{g}^{(n)}) \\ \Phi_{k,i}^{(n)} = \sum_{m=1}^M S_{km} \delta \varphi_m \exp(-\varphi_m \mathbf{R}_i \mathbf{f}^{(n)} - \theta_m \mathbf{R}_i \mathbf{g}^{(n)}) \\ \Theta_{k,i}^{(n)} = \sum_{m=1}^M S_{km} \delta \theta_m \exp(-\varphi_m \mathbf{R}_i \mathbf{f}^{(n)} - \theta_m \mathbf{R}_i \mathbf{g}^{(n)}) \end{cases}, \quad (8)$$

然后利用 ART 求解该线性方程组得到重建图像。

具体来说,E-ART 算法的步骤如下^[10]:

- 1) 为 $\mathbf{f}^{(0)}$ 和 $\mathbf{g}^{(0)}$ 赋初值;
- 2) 假设经过 n 次迭代后,图像的估计值为 $\mathbf{f}^{(n)}$ 和 $\mathbf{g}^{(n)}$ 。对给定的一条 X 射线路径,设其对应的多色投影数据为 $p_{k,i}$,根据 (8) 式计算估计投影 $p_{k,i}^{(n)}$ 和加权系数 $q_{k,i}^{(n)}, \Phi_{k,i}^{(n)}$ 和 $\Theta_{k,i}^{(n)}$;
- 3) 根据 (9) 式计算迭代图像 $\mathbf{f}^{(n+1)}$ 和 $\mathbf{g}^{(n+1)}$,表达式为

$$\begin{cases} \mathbf{f}^{(n+1)} = \mathbf{f}^{(n)} + \frac{\Phi_{k,i}^{(n)}}{(\Phi_{k,i}^{(n)})^2 + (\Theta_{k,i}^{(n)})^2} \frac{\mathbf{R}_i^T q_{k,i}^{(n)} (p_{k,i} - p_{k,i}^{(n)})}{|\mathbf{R}_i|^2} \\ \mathbf{g}^{(n+1)} = \mathbf{g}^{(n)} + \frac{\Theta_{k,i}^{(n)}}{(\Phi_{k,i}^{(n)})^2 + (\Theta_{k,i}^{(n)})^2} \frac{\mathbf{R}_i^T q_{k,i}^{(n)} (p_{k,i} - p_{k,i}^{(n)})}{|\mathbf{R}_i|^2} \end{cases}; \quad (9)$$

- 4) 判断收敛准则是否满足,若满足则终止迭代,不然则转向步骤 2)。

E-ART 算法可以处理射线几何路径不一致的双能谱数据,得到较高质量的双基材料重建图像及组合单能图像,但该算法的收敛速度较慢。

2.3 E-ART 收敛慢的原因

分析 E-ART 算法,引入 X 射线穿过被测物两个基材料的线积分图像 \mathbf{F}, \mathbf{G} ,即

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{f}, \mathbf{G} = \mathbf{R}\mathbf{g}. \quad (10)$$

设第 i 条射线穿过基材料的线积分图像为 F_i, G_i ,其中 $F_i = \mathbf{R}_i \mathbf{f}, G_i = \mathbf{R}_i \mathbf{g}$,则 (9) 式可以分解为

$$\begin{cases} F_i^{(n+1)} = F_i^{(n)} + \frac{\Phi_{k,i}^{(n)}}{(\Phi_{k,i}^{(n)})^2 + (\Theta_{k,i}^{(n)})^2} q_{k,i}^{(n)} \Delta p_{k,i}^{(n)} \\ G_i^{(n+1)} = G_i^{(n)} + \frac{\Theta_{k,i}^{(n)}}{(\Phi_{k,i}^{(n)})^2 + (\Theta_{k,i}^{(n)})^2} q_{k,i}^{(n)} \Delta p_{k,i}^{(n)} \end{cases}, \quad (11)$$

$$\begin{cases} \mathbf{f}^{(n+1)} = \mathbf{f}^{(n)} + \frac{\mathbf{R}_i^T \Delta F_i^{(n+1)}}{|\mathbf{R}_i|^2} \\ \mathbf{g}^{(n+1)} = \mathbf{g}^{(n)} + \frac{\mathbf{R}_i^T \Delta G_i^{(n+1)}}{|\mathbf{R}_i|^2} \end{cases}, \quad (12)$$

其中,

$$\begin{cases} \Delta p_{k,i}^{(n)} = p_{k,i} - p_{k,i}^{(n)} \\ \Delta F_i^{(n+1)} = F_i^{(n+1)} - F_i^{(n)} \\ \Delta G_i^{(n+1)} = G_i^{(n+1)} - G_i^{(n)} \\ p_{k,i}^{(n)} = -\ln \sum_{m=1}^M S_{km} \delta \exp(-\varphi_m F_i^{(n)} - \theta_m G_i^{(n)}) \\ q_{k,i}^{(n)} = \sum_{m=1}^M S_{km} \delta \exp(-\varphi_m F_i^{(n)} - \theta_m G_i^{(n)}) \\ \Phi_{k,i}^{(n)} = \sum_{m=1}^M S_{km} \delta \varphi_m \exp(-\varphi_m F_i^{(n)} - \theta_m G_i^{(n)}) \\ \Theta_{k,i}^{(n)} = \sum_{m=1}^M S_{km} \delta \theta_m \exp(-\varphi_m F_i^{(n)} - \theta_m G_i^{(n)}) \end{cases}, \quad (13)$$

即 E-ART 算法中求解线性化的高、低能方程组部分 [(9) 式] 可分为两步: 1) 根据高、低能残差投影数据 $\Delta p_{k,i}^{(n)}$ 更新基材料的线积分数据 $F_i^{(n+1)}, G_i^{(n+1)}$ [(11) 式]; 2) 根据更新的基材料线积分数据 $F_i^{(n+1)}, G_i^{(n+1)}$ 更新估计图像 $f^{(n+1)}, g^{(n+1)}$ [(12) 式]。其中第二步与传统 ART 算法的迭代格式相同 [16-18]。我们知道, ART 算法对 CT 成像问题的收敛速度是比较快的, 因此, 我们猜测 E-ART 收敛慢的原因在于第一步。下面, 仅对第一步作进一步分析。

在射线几何路径一致的情况下, 高、低能投影方程可表达为

$$p_k(F_i, G_i) = -\ln \int S_k(E) \exp[-\varphi(E)F_i - \theta(E)G_i] dE, k = 1, 2. \quad (14)$$

图 1 给出了不同能谱下的投影曲线, 其中: 图 1(a) 中的能谱是根据软件 Spectrum GUI 仿真 GE Maxiray 125 球管的 X 射线能谱; 图 1(b) 是水厚度 $F_i = 4$ 、骨厚度 $G_i = 1$ 处不同能谱下投影方程的等值线; 图 1(c) 是不同能谱下投影数据随水厚度的关系; 图 1(d) 是不同能谱下投影数据随骨厚度的关系。由图中可以观察到, 能谱平均能量差别越大,

投影曲线的夹角越大; 多色投影曲线近似为直线, 也就是投影数据关于线积分数据是近似线性的; 而且不同能谱下投影曲线的夹角很小。

(11) 式的基本步骤是逐次向高、低能投影曲线的近似直线上作正交投影, 由于两曲线夹角较小, 故需要多次迭代才能得到较精确的分解结果, 从而导致整个 E-ART 算法的收敛速度比较慢。因此, 本节考虑通过增大高、低能投影曲线的夹角来提高线积分数据的求解速度。由图 1 可知: 增大多色投影曲线夹角的一个方法是增加能谱间的区分度, 因此在扫描时能谱应该精心设计。扫描能谱确定后, 增大夹角的另一个方法是修改基函数 $\varphi(E), \theta(E)$ 。一般来说, 我们可以随意修改基函数, 只要他们是基材料衰减系数的线性组合即可, 但为保证基函数有清晰的物理意义, 本文选择给基函数 $\theta(E)$ 整体加一个常数权重 α 的方法来获得新的基函数 $\theta^*(E)$ (相当于改变基材料的密度)。添加权重后, 高、低能投影方程式 (14) 式可以表达为

$$p_k(F_i, G_i^*) = -\ln \int S_k(E) \exp[-\varphi(E)F_i - \theta^*(E)G_i^*] dE, k = 1, 2, \quad (15)$$

$$\theta^*(E) = \alpha\theta(E), G_i^* = G_i/\alpha. \quad (16)$$

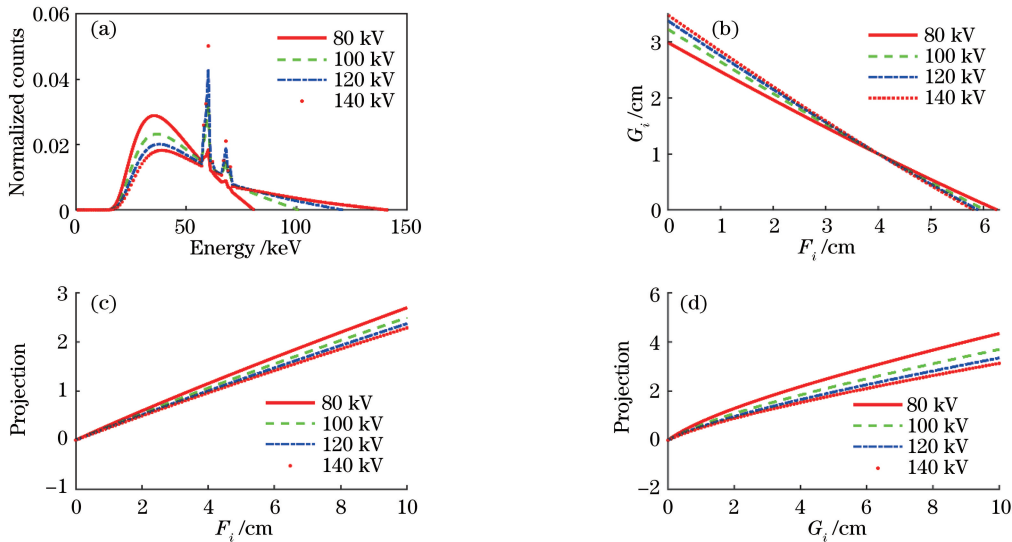


图 1 不同能谱及其对应的投影曲线。(a) 能谱; (b) $F_i = 4, G_i = 1$ 处不同能谱下投影方程的等值线; (c) 不同能谱下投影数据随水厚度 F_i 的关系; (d) 不同能谱下投影数据随骨厚度 G_i 的关系

Fig. 1 Different spectra and corresponding projections. (a) Spectra; (b) contour lines of projection equations with $F_i = 4, G_i = 1$; (c) projections versus F_i ; (d) projections versus G_i

下面探究权重的选择。添加该权重的目的是要增大高能和低能投影曲线的夹角, 因此本节选择可使高能和低能投影曲线的夹角最大的权重。而高能和低能投影曲线的夹角最大, 也就是曲线的夹角余弦最小。观察图 1 可知, 多色投影曲线近似为直线,

亦即选择使得高能和低能投影近似直线的夹角余弦最小的权重。

根据 E-ART 算法, 假设已有第 n 次线积分数据迭代解 $(F_i^{(n)}, G_i^{(n)})$, 高、低能投影曲线在该迭代点处以一阶 Taylor 展开, 即

$$\begin{pmatrix} p_1(F_i, G_i) \\ p_2(F_i, G_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(F_i^{(n)}, G_i^{(n)}) \\ p_2(F_i^{(n)}, G_i^{(n)}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial F_i^{(n)}} & \alpha^{(n)} \frac{\partial p_1}{\partial G_i^{(n)}} \\ \frac{\partial p_2}{\partial F_i^{(n)}} & \alpha^{(n)} \frac{\partial p_2}{\partial G_i^{(n)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_i - F_i^{(n)} \\ \frac{G_i - G_i^{(n)}}{\alpha^{(n)}} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

其中, $\frac{\partial p_k}{\partial F_i^{(n)}} = \frac{\partial p_k}{\partial F_i} \Big|_{(F_i^{(n)}, G_i^{(n)})}$, $\frac{\partial p_k}{\partial G_i^{(n)}} = \frac{\partial p_k}{\partial G_i} \Big|_{(F_i^{(n)}, G_i^{(n)})}$, $k=1, 2$ 。使上述方程组中两个直线的夹角余弦最小的权重为

$$\alpha^{(n)} = \operatorname{argmin}_\alpha (\cos \gamma) = \operatorname{argmin}_\alpha \frac{\left(\frac{\partial p_1}{\partial F_i^{(n)}}, \alpha \frac{\partial p_1}{\partial G_i^{(n)}} \right) \cdot \left(\frac{\partial p_2}{\partial F_i^{(n)}}, \alpha \frac{\partial p_2}{\partial G_i^{(n)}} \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial p_1}{\partial F_i^{(n)}} \right)^2 + \left(\alpha \frac{\partial p_1}{\partial G_i^{(n)}} \right)^2} \sqrt{\left(\frac{\partial p_2}{\partial F_i^{(n)}} \right)^2 + \left(\alpha \frac{\partial p_2}{\partial G_i^{(n)}} \right)^2}} = \sqrt{\frac{\frac{\partial p_1}{\partial F_i^{(n)}} \frac{\partial p_2}{\partial F_i^{(n)}}}{\frac{\partial p_1}{\partial G_i^{(n)}} \frac{\partial p_2}{\partial G_i^{(n)}}}}, \quad (18)$$

其中 γ 为两直线夹角。

下面以水厚度 $F_i=4$ 、骨厚度 $G_i=1$ 为例,考察权重 $\alpha^{(n)}$ 对高、低能投影曲线夹角的影响。图 2 给出了不同权重下高、低能投影方程的等值线,其中:实线表示原高、低能投影方程 [(14) 式],两实线夹角约为 5.07° ;虚线表示添加权重后的高、低能投影方程 [(15) 式],两虚线夹角约为 6.19° 。由图 2 可以观察到,添加权重后,高、低能投影曲线的夹角增大,说明该权重对增加高、低能投影曲线夹角有效。

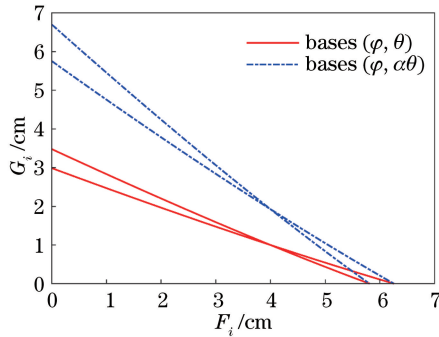


图 2 不同权重下高、低能投影方程的等值线
Fig. 2 Contour lines of projection equations with diferent weights

观察 (17) 式,将权重 $\alpha^{(n)}$ 对方程组的操作看作是矩阵变换,则该式可以改写为

$$\begin{pmatrix} p_1(F_i, G_i) \\ p_2(F_i, G_i) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1(F_i^{(n)}, G_i^{(n)}) \\ p_2(F_i^{(n)}, G_i^{(n)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial F_i^{(n)}} & \frac{\partial p_1}{\partial G_i^{(n)}} \\ \frac{\partial p_2}{\partial F_i^{(n)}} & \frac{\partial p_2}{\partial G_i^{(n)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha^{(n)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_i - F_i^{(n)} \\ G_i - G_i^{(n)} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

从形式上看,这属于一种右预条件^[19]系统——调整线性方程组的系数矩阵,通过降低系数矩阵的条件数,来提高迭代法的收敛速度。此时,使得系数矩阵条件数最小的 α 可表达为

$$\alpha^{(n)} = \operatorname{argmin}_\alpha \operatorname{cond} \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial F_i^{(n)}} & \frac{\partial p_1}{\partial G_i^{(n)}} \\ \frac{\partial p_2}{\partial F_i^{(n)}} & \frac{\partial p_2}{\partial G_i^{(n)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \right] = \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial p_1}{\partial F_i^{(n)}} \right)^2 + \left(\frac{\partial p_2}{\partial F_i^{(n)}} \right)^2}{\left(\frac{\partial p_1}{\partial G_i^{(n)}} \right)^2 + \left(\frac{\partial p_2}{\partial G_i^{(n)}} \right)^2}}. \quad (20)$$

本文记使得高、低能投影曲线夹角最大的权重为 α_{angle} ,记使得高、低能投影方程组系数矩阵条件数最小的权重为 α_{cond} 。为考察两种权重在 E-ART 算法求解线积分数据中的作用,图 3 给出 200 次迭代解 $(F_i^{(n)}, G_i^{(n)})$ 的轨迹图及相对误差收敛曲线。图 3(a)中的实线是由图 1(a)中 80 kV 和 140 kV 下能谱计算的多色投影曲线,空心圆圈表示两条曲线的交点(即真解 $F_i=4, G_i=1$),点划线是取 $\alpha=1$ 即无权重时解的迭代轨迹,虚线是取使 $\alpha^{(n)} = \alpha_{\text{angle}}$ 时解的迭代轨迹,点线是取 $\alpha^{(n)} = \alpha_{\text{cond}}$ 时解的迭代轨迹。图 3(b)是对应迭代解与真解之间的相对误差随迭代次数的变化曲线。由图中可以观察到,经过 1 次迭代后,使用权重比不使用权重算法的迭代解更靠近真解;经过 200 次迭代后,使用权重算法的迭代解就可逼近真解,而不使用权重算法的迭代解还离真解较远,这说明使用该权重对加速求解线积分数据有效。而且对比使用本文提出的 α_{angle} 与 α_{cond} 的求解速度可知,两者速度相当。

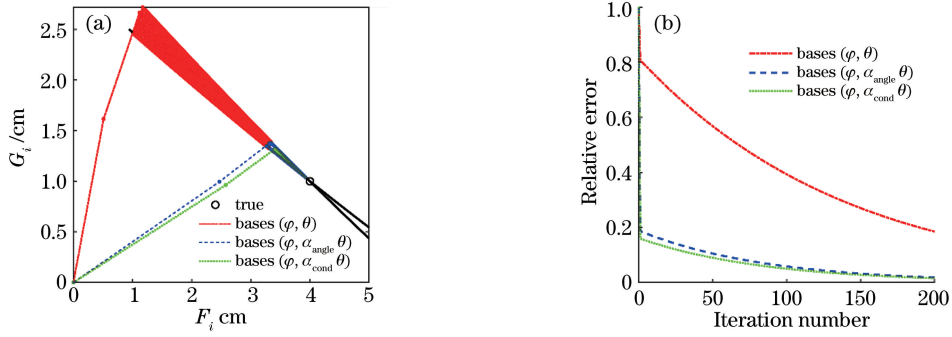


图 3 迭代解的轨迹图及误差收敛曲线。(a)200 次迭代解的轨迹图;(b)迭代解误差随迭代次数的变化曲线

Fig. 3 Trajectory of iterative solutions and the curves of the relative errors with different bases.

(a) Trajectory curves of 200 iteration solutions; (b) curves of the relative errors with respect to the number of iterations

2.4 加速 EART(A-EART)算法

由分析可知,使用上述权重 \$\alpha\$,可以加速 E-ART 算法中基材料线积分数据的迭代收敛,结合该加速策略,本文提出加速 E-ART(A-EART)算法。首先给出射线几何路径一致时,该加速策略在 E-ART 算法中使用的效果;然后指出在射线几何路径不一致时,该加速策略也可以使用;最后综合提出 A-EART 算法步骤。

当高、低能的射线几何路径一致时,第 \$i\$ 条射线上的高、低能数据在迭代点 \$(\mathbf{f}^{(n)}, \mathbf{g}^{(n)})\$ 处按一阶 Taylor 展开:

$$\begin{pmatrix} p_{1,i} \\ p_{2,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,i}^{(n)} \\ p_{2,i}^{(n)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\Phi_{1,i}^{(n)}}{q_{1,i}^{(n)}} & \alpha_i^{(n)} \frac{\Theta_{1,i}^{(n)}}{q_{1,i}^{(n)}} \\ \frac{\Phi_{2,i}^{(n)}}{q_{2,i}^{(n)}} & \alpha_i^{(n)} \frac{\Theta_{2,i}^{(n)}}{q_{2,i}^{(n)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_i(\mathbf{f} - \mathbf{f}^{(n)}) \\ \mathbf{R}_i(\mathbf{g} - \mathbf{g}^{(n)}) \end{pmatrix} \frac{1}{\alpha_i^{(n)}} \quad (21)$$

若使用使得高、低能投影曲线夹角最大的权重 \$\alpha_{\text{angle}}\$,则根据 (18) 式,有

$$\alpha_i^{(n)} = \sqrt{\frac{\frac{\Phi_{1,i}^{(n)}}{q_{1,i}^{(n)}} \frac{\Phi_{2,i}^{(n)}}{q_{2,i}^{(n)}}}{\frac{\Theta_{1,i}^{(n)}}{q_{1,i}^{(n)}} \frac{\Theta_{2,i}^{(n)}}{q_{2,i}^{(n)}}}}, \quad (22)$$

若使用使得高、低能投影方程组系数矩阵最小的权重 \$\alpha_{\text{cond}}\$,则根据 (20) 式,有

$$\alpha_i^{(n)} = \sqrt{\frac{\left(\frac{\Phi_{1,i}^{(n)}}{q_{1,i}^{(n)}}\right)^2 + \left(\frac{\Phi_{2,i}^{(n)}}{q_{2,i}^{(n)}}\right)^2}{\left(\frac{\Theta_{1,i}^{(n)}}{q_{1,i}^{(n)}}\right)^2 + \left(\frac{\Theta_{2,i}^{(n)}}{q_{2,i}^{(n)}}\right)^2}} \quad (23)$$

当高、低能射线几何路径不一致时,不妨设第 \$i\$ 条射线上仅存在低能数据 \$p_{1,i}\$,则 (21) 式中不存在 \$p_{2,i}\$。但是结合高能能谱、基材料衰减系数、当前迭

代解及射线的信息,根据 (8) 式可以计算出高能投影方程的系数 \$\frac{\Phi_{2,i}^{(n)}}{q_{2,i}^{(n)}}\$ 和 \$\frac{\Theta_{2,i}^{(n)}}{q_{2,i}^{(n)}}\$,从而可以根据 (22) 式或 (23) 式计算出权重 \$\alpha_i^{(n)}\$。根据相应权重,基于 E-ART 求解 (21) 式中的方程,更新迭代图像。则根据第 \$k\$ 个能谱数据中第 \$i\$ 条射线修正图像的迭代格式为

$$\begin{cases} \mathbf{f}^{(n+1)} = \mathbf{f}^{(n)} + \frac{\Phi_{k,i}^{(n)}}{(\Phi_{k,i}^{(n)})^2 + (\alpha_i^{(n)} \Theta_{k,i}^{(n)})^2} \frac{\mathbf{R}_i^T q_{k,i}^{(n)} (p_{k,i} - p_{k,i}^{(n)})}{|\mathbf{R}_i|^2} \\ \mathbf{g}^{(n+1)} = \mathbf{g}^{(n)} + \frac{(\alpha_i^{(n)})^2 \Theta_{k,i}^{(n)}}{(\Phi_{k,i}^{(n)})^2 + (\alpha_i^{(n)} \Theta_{k,i}^{(n)})^2} \frac{\mathbf{R}_i^T q_{k,i}^{(n)} (p_{k,i} - p_{k,i}^{(n)})}{|\mathbf{R}_i|^2} \end{cases} \quad (24)$$

本节中,我们称由该迭代格式修改后的算法为加速 E-ART(AE-ART)算法。

AE-ART 算法的步骤如下:

- 1) 为重建图像赋初始值 \$\mathbf{f}^{(0)}\$ 和 \$\mathbf{g}^{(0)}\$;
- 2) 假设经过 \$n\$ 步迭代后的重建图像为 \$\mathbf{f}^{(n)}\$ 和 \$\mathbf{g}^{(n)}\$,对给定的一条 X 射线路径,设其对应的多色投影为 \$p_{k,i}\$,根据 (8) 式、(22) 式或 (23) 式计算估计投影 \$p_{k,i}\$、加权系数 \$q_{k,i}^{(n)}\$, \$\Phi_{k,i}^{(n)}\$, \$\Theta_{k,i}^{(n)}\$ 和权重 \$\alpha_i^{(n)}\$;
- 3) 根据 (24) 式计算迭代图像 \$\mathbf{f}^{(n+1)}\$ 和 \$\mathbf{g}^{(n+1)}\$;
- 4) 判断收敛准则是否满足,若满足则终止迭代,否则转向步骤 2)。

3 实 验

利用含水、骨的口腔模型验证本文算法加速双基材料重建的有效性。

3.1 实验条件

仿真实验使用开源软件 Spectrum GUI 生成 X 射线能谱。实验中仿真了 GE Maxiray 125 球管在 80 kV 和 140 kV 下的能谱,其中 140 kV 时

加载了 1 mm 铜滤波器,并对能谱作归一化处理。基材料的线性衰减系数从美国国家标准技术研究院(NIST)网站获得^[20],并根据能谱的离

散取值对其作相应的插值。图 4 给出了实验模型及能谱曲线图,其中口腔模型中的水模型的直径为 84 mm。

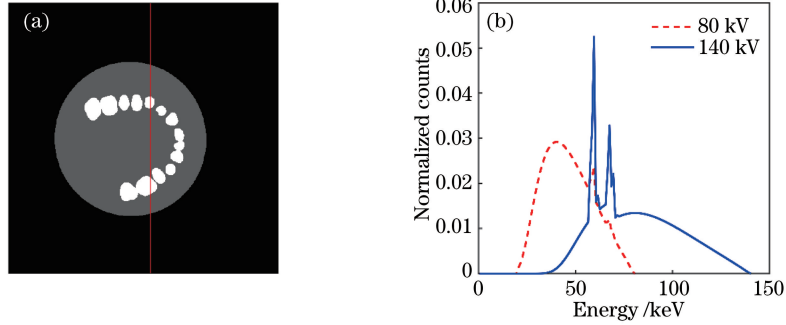


图 4 实验模型和 X 射线能谱。(a)口腔模型;(b)能谱

Fig. 4 Simulated phantom and X-ray spectra used in experiments. (a) Dental phantom; (b) spectra

数据扫描的参数如下:X 射线源到旋转中心的距离为 437 mm,X 射线源到探测器中心的距离为 700 mm。线探测器由 1920 个探测单元组成,每一个探测单元的大小为 0.127 mm。在上述参数下,扫描域的半径为 150 mm。载物台旋转一周共获取 720 个投影数据。

为了对算法的有效性进行定量的分析,本文计算了重建图像的归一化平均绝对距离(NMAD),其公式为

$$D_{NMA} = \frac{\sum_{q=1}^Q |Y_q - Y_q^*|}{\sum_{q=1}^Q Y_q^*}, \quad (25)$$

其中: Y_q 为估计值; Y_q^* 为真实值; $q=1,2,\dots,Q$ 。

3.2 仿真实验

本节实验测试了使用线性衰减系数作基函数时,E-ART 算法和 AE-ART 算法对水、骨双基材料分解的结果。其中基于 AE-ART 算法,实验测试了使得高、低能投影曲线夹角最大的权重 α_{angle} 和使得高、低能投影方程组系数矩阵条件数最小的权重 α_{cond} 的两种加权策略。

图 5 给出了使用 E-ART 算法和 AE-ART 算法迭代 6 次的结果。其中:第 1 列是水基材料图像在灰度窗 $[0,1]$ 时的结果,第 2 列是骨基材料图像在灰度窗 $[0,1]$ 时的结果,第 3 列是根据双基材料图像组合的 60 keV 单能图像在灰度窗 $[0,0.6]$ 时的结果,

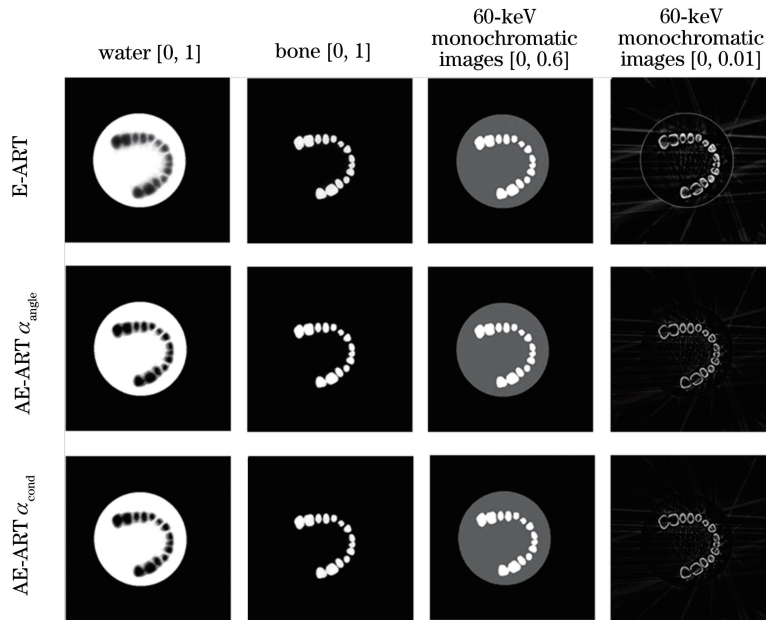


图 5 E-ART 算法和 AE-ART 算法迭代 6 次结果图

Fig. 5 Reconstructed images after 6 iterations with the E-ART method and the proposed AE-ART method

第 4 列是组合单能图像与标准图像的差在灰度窗 $[0, 0.01]$ 时的结果;第 1 行是 E-ART 算法迭代 6 次的结果,第 2 行是使用权重 α_{angle} 的 AE-ART 算法迭代 6 次的结果,第 3 行是使用权重 α_{cond} 的 AE-ART 算法迭代 6 次的结果。观察结果图像,特别是水基材料图像和组合单能图像的差图像,可以明显看出,AE-ART 算法比 E-ART 算法收敛得要快。

图 6 给出了使用 E-ART 算法和 AE-ART 算法

迭代 15 次的结果,其中结果图像的排列方式与图 5 一致。观察结果图像,特别是水基材料图像和组合单能图像的差图像,AE-ART 算法的结果比 E-ART 算法的结果更接近模型,也就是 AE-ART 算法比 E-ART 算法收敛得更快。

图 7 给出了图 5 和图 6 中结果图像在第 270 列(如图 4 中竖线所示)的剖面图。其中图 6(a)~(c)是图 5 的结果,图 6(d)~(f)是图 6 的结果;剖面图

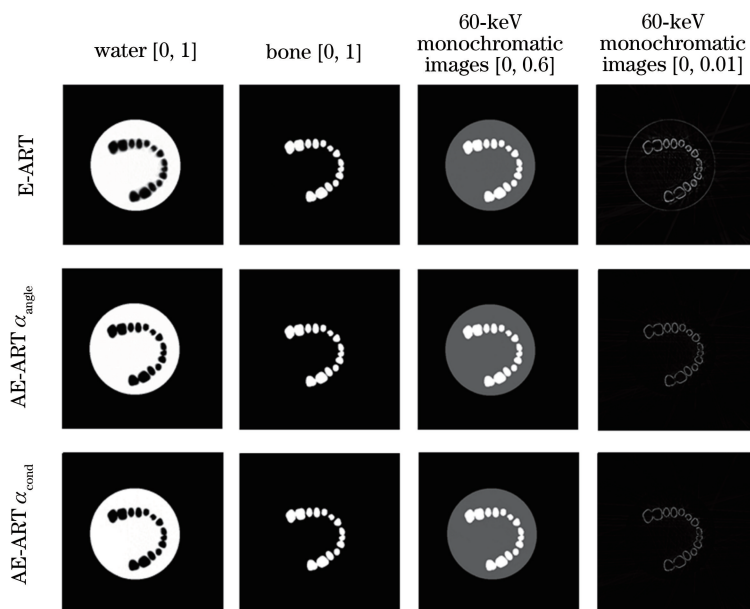


图 6 E-ART 算法和 AE-ART 算法迭代 15 次结果图

Fig. 6 Reconstructed images after 15 iterations with the E-ART method and the proposed AE-ART method

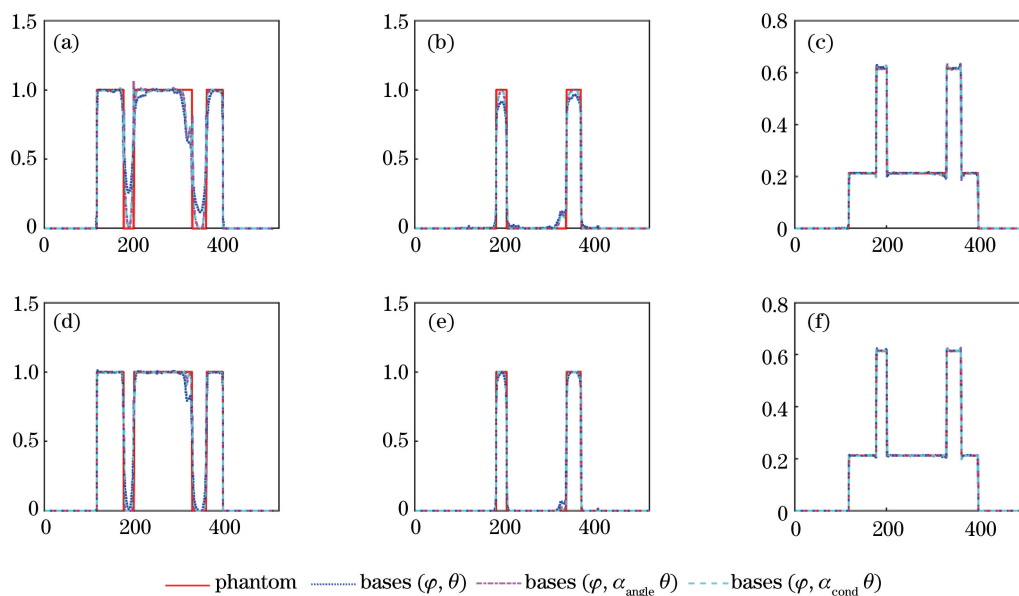


图 7 E-ART 算法和 AE-ART 算法迭代第 6 次和第 15 次结果图像的剖面图。(a)(b)(c)6 次迭代后水基材料、骨基材料和组合单能图像;(d)(e)(f)15 次迭代后水基材料、骨基材料和组合单能图像

Fig. 7 Profiles of the reconstructed images in Fig.5 and Fig. 6 at the corresponding vertical line shown in Fig.4(a). (a), (b) and (c) Results from 6 iterations shown in Fig.5; (d), (e) and (f) results from 15 iterations shown in Fig.6

中,实线是模型图像的剖线图,点线是 E-ART 算法迭代结果的剖线图,点划线是使用权重 α_{angle} 的 AE-ART 算法迭代结果的剖线图,虚线是使用权重 α_{cond} 的 AE-ART 算法迭代结果的剖线图。从剖线图中可以看出,AE-ART 算法不仅在水基材料图像和组合单能图像中的表现比 E-ART 算法好,而且在骨基材料图像中,AE-ART 算法的结果在算法运行 6 次和 15 次时,都比 E-ART 算法的结果更接近模型,也就是说,AE-ART 算法比 E-ART 算法收敛得更快。

图 8 给出了使用 E-ART 算法和 AE-ART 算法时,基材料图像和组合单能图像(60 keV)的 NMAD 误差随迭代次数的变化曲线。其中,点划线是使用 E-ART 算法时的 NMAD 曲线,实线是使用权重

α_{angle} 的 AE-ART 算法时的 NMAD 曲线,虚线是使用权重 α_{cond} 的 AE-ART 算法时的 NMAD 曲线。由误差曲线图可得:AE-ART 算法在双基材料分解和组合单能图像上的收敛速度都比 E-ART 算法快。

表 1 给出了 E-ART 算法和 AE-ART 算法在结果图像达到一定精度时需要的迭代次数。表中可以看出当结果图像达到一定精度时,与 E-ART 算法相比,AE-ART 算法需要的迭代次数减少了 30% 以上,即 AE-ART 算法比 E-ART 算法收敛得快。而且,要求的精度越高,两种算法所需的迭代次数差越大,也就是 AE-ART 算法加速收敛的效果越明显。

综上所述,AE-ART 算法比 E-ART 算法收敛快。

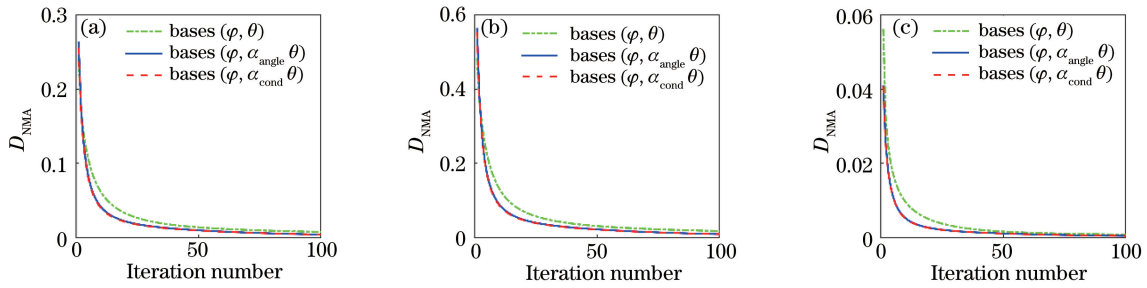


图 8 E-ART 算法和 AE-ART 算法重构图像的 NMAD 误差随迭代次数的变化曲线。(a)水基材料图像;(b)骨基材料图像;(c)组合单能图像

Fig. 8 NMAD of the reconstructed images with the E-ART method and the proposed AE-ART method. (a) Results of water images; (b) results of bone images; (c) results of monochromatic images

表 1 重构图像达到一定精度时需要的算法迭代次数

Table 1 Number of algorithm iterations required when the image reaches a certain accuracy

Image	Precision	Number of iterations		
		E-ART	AE-ART (α_{angle})	AE-ART (α_{cond})
Water basis	0.03	22	15	14
	0.01	73	49	48
Bone basis	0.03	52	36	35
	0.01	>100	94	94
60-keV monochromatic image	0.03	3	2	2
	0.01	10	6	6
	0.001	80	54	54

4 结 论

针对 E-ART 算法迭代收敛慢的缺点,提出一种加速收敛算法,其关键技术是为基函数添加权重 α 。本文给出权重参数的两种不同取法:选取高能 and 低能投影曲线夹角最大的权重 α_{angle} 和选取高能 and 低能投影方程组系数矩阵条件数最小的权重 α_{cond} 。本文使用口腔模型对水和骨双基材料分解做了模拟实验,实验结果表明:该算法的收敛速度比 E-ART 算法提高了 30% 以上,而且要求重建图像

的精度越高,加速效果越明显;使用权重 α_{cond} 的收敛速度比使用 α_{angle} 的收敛速度略快。

观察图 7 中本文算法 6 次迭代的结果,发现在水基材料图像中会存在骨材质的边界,而增大迭代次数,如 15 次,该现象则消失。该现象的发生机制及相应的消除方式,是进一步需要研究的问题。该方法对 E-ART 算法有加速作用,但效果有限,如何更好地加快该算法的收敛是进一步需研究的问题。特别地,如何结合解析类^[21]和迭代类算法,加快 DSCT 问题的收敛速度和提高 DSCT 图像质量是双

能重建领域的研究热点。

致谢 本研究获首都师范大学交叉科学研究院资助。

参 考 文 献

- [1] Alvarez R E, Macovski A. Energy-selective reconstructions in X-ray computerised tomography [J]. *Physics in Medicine and Biology*, 1976, 21(5): 733-744.
- [2] Kalender W A, Perman W H, Vetter J R, et al. Evaluation of a prototype dual-energy computed tomographic apparatus. I. Phantom studies [J]. *Medical Physics*, 1986, 13(3): 334-339.
- [3] Vetter JR, Perman W H, Kalender W A, et al. Evaluation of a prototype dual-energy computed tomographic apparatus. II. Determination of vertebral bone mineral content [J]. *Medical Physics*, 1986, 13(3): 340-343.
- [4] Fornaro J, Leschka S, Hibbeln D, et al. Dual- and multi-energy CT: approach to functional imaging [J]. *Insights into Imaging*, 2011, 2(2):149-159.
- [5] Yu L F, Leng S, McCollough C H. Dual-energy CT-based monochromatic imaging [J]. *American Journal of Roentgenology*, 2012, 199: S9-S15.
- [6] Johnson T R C, Krauß B, Sedlmair M, et al. Material differentiation by dual energy CT: initial experience [J]. *European Radiology*, 2007, 17(6): 1510-1517.
- [7] Yoshizumi T. Dualenergy CT in clinical practice [J]. *Medical Physics*, 2011, 38(11):6346-6346.
- [8] Zhao X, Hu J, Zhao Y S, et al. A novel iterative reconstruction method for dual-energy computed tomography based on polychromatic forward-projection calibration [J]. *Insight-Non-Destructive Testing and Condition Monitoring*, 2014, 56(10): 541-548.
- [9] Ying Z R, Naidu R, Crawford C R. Dual-energy computed tomography for explosive detection [J]. *Journal of X-Ray Science and Technology*, 2006, 14(4): 235-256.
- [10] Tang T X, Duan X J, Zhou Z Z, et al. Scatter correction based on beam stop array for cone-beam micro-computed tomography [J]. *Acta Optica Sinica*, 2019, 39(8): 0834001.
唐天旭, 段晓礁, 周志政, 等. 基于散射校正板的锥束微纳 CT 系统的散射校正 [J]. *光学学报*, 2019, 39(8): 0834001.
- [11] Liu J, Kang Y Q, Gu Y B, et al. Lowdose computed tomography image reconstruction based on sparse tensor constraint [J]. *Acta Optica Sinica*, 2019, 39(8): 0811004.
刘进, 亢艳芹, 顾云波, 等. 稀疏张量约束的低剂量 CT 图像重建 [J]. *光学学报*, 2019, 39(8): 0811004.
- [12] Zhao Y S, Zhao X, Zhang P. An extended algebraic reconstruction technique (E-ART) for dual spectral CT [J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2015, 34(3): 761-768.
- [13] Zhao Y S, Zhang H T, Zhao X, et al. Iterative reconstruction model and reconstruction method for dual energy computed tomography [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2014, 42(4): 666-671.
赵云松, 张慧滔, 赵星, 等. 双能谱 CT 的迭代重建模型及重建方法 [J]. *电子学报*, 2014, 42(4): 666-671.
- [14] Hu J J, Zhao X, Wang F. An extended simultaneous algebraic reconstruction technique (E-SART) for X-ray dual spectral computed tomography [J]. *Scanning*, 2016, 38(6):599-611.
- [15] Rutt B, Fenster A. Split-filter computed tomography: a simple technique for dual energy scanning [J]. *Journal of Computer Assisted Tomography*, 1980, 4(4):501-509.
- [16] Hsieh J. Computed tomography: principle, design, artifacts and recent advances [M]. Zhang C Z, Guo Z P, Wang X G, et al, Transl. Beijing: Science Press, 2006: 66-68.
谢强. 计算机断层成像技术: 原理、设计、伪像和进展 [M]. 张朝宗, 郭志平, 王贤刚, 等, 译. 北京: 科学出版社, 2006: 66-68.
- [17] Zhang P, Zhang H T, Zhao Y S. The mathematical models on X-ray CT and their related issues [J]. *Mathematical Modeling and Its Applications*, 2012, 1(1): 1-12.
张朋, 张慧滔, 赵云松. X 射线 CT 成像的数学模型及其有关问题 [J]. *数学建模及其应用*, 2012, 1(1): 1-12.
- [18] Andersen A H, Kak A C. Simultaneous algebraic reconstruction technique (SART): a superior implementation of the art algorithm [J]. *Ultrasonic Imaging*, 1984, 6(1): 1-94.
- [19] Y Saad. Iterative methods for sparse linear systems [M]. 2nd ed. Boston: PWS Publishing Company, 2003: 252-253.
- [20] Hubbell J H, Seltzer S M. Tables of X-ray mass attenuation coefficients and mass energy-absorption coefficients 1 keV to 20 MeV for elements Z=1 to 92 and 48 additional substances of dosimetry interest [R]. [S.l.]: NIST Publications, 1995.
- [21] Li M F, Zhao Y S, Zhang P. Accurate iterative FBP reconstruction method for material decomposition of dual energy CT [J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2019, 38(3): 802-812.