

# 基于改进 GM(1,1)模型的激光陀螺仪随机误差预测

李想\*, 汪立新\*\*, 沈强

火箭军工程大学导弹工程学院, 陕西 西安 710025

**摘要** 基于静态 Allan 方差分析方法无法有效分析和辨识动态工况下激光陀螺仪的随机误差,也无法给动态工况下激光陀螺仪的随机误差补偿提供准确依据。为此,提出时间框动态 Allan 方差分析方法,利用分段建模对随机误差项进行动态 Allan 方差分析和辨识。建立灰色 GM(1,1)预测模型,对辨识出的随机误差参数项进行预测,针对传统 GM(1,1)预测模型因数据不全存在波动大的问题,基于小波滤波平滑处理原始数据,并利用残差修正模型改进 GM(1,1)预测模型。实验结果表明,针对激光陀螺仪在同一工况下的随机误差系数,改进 GM(1,1)模型预测算法的预测精度高于传统 GM(1,1)模型预测算法的预测精度。

**关键词** 探测器; Allan 方差分析; 激光陀螺仪; 随机误差; 灰色预测; GM(1,1)预测模型; 小波

中图分类号 TP211+.6

文献标志码 A

doi: 10.3788/AOS202040.1204001

## Prediction of the Random Error of a Laser Gyroscope Using the Modified GM (1, 1) Model

Li Xiang\*, Wang Lixin\*\*, Sheng Qiang

College of Missile Engineering, Rocket Force University of Engineering, Xi'an, Shaanxi, 710025, China

**Abstract** The static Allan analysis of variance cannot effectively analyze and identify the random error of a laser gyroscope under static conditions. Further, it cannot provide an accurate basis for the random error compensation of a laser gyroscope under dynamic conditions. Therefore, in this study, we propose a time-frame dynamic Allan analysis of variance method to conduct dynamic Allan analysis of variance and identify the random error terms via piecewise modeling. The grey GM (1, 1) prediction model is established to identify the random error associated with the parameters that have to be predicted. However, the problem of large fluctuation can be observed with respect to the data from the traditional GM (1, 1) prediction model is not complete; therefore, we introduce wavelet filters to smoothen the original data and the residual error correction model to improve the GM (1, 1) prediction model. The test results denote that the prediction accuracy of the improved GM (1, 1) prediction model is higher than that of the traditional GM (1, 1) prediction model for the random error coefficients of laser gyro under the same working condition.

**Key words** detections; Allan variance analysis; laser gyroscope; random error; grey forecast; GM (1, 1) prediction model; wavelet

**OCIS codes** 040.7480; 250.0040; 120.1880

## 1 引 言

激光陀螺仪作为高精度的惯性器件在激光捷联惯导领域应用广泛<sup>[1]</sup>。很多学者已对激光陀螺仪误差模型进行深入研究,通过对误差参数进行辨识、标定及补偿,减小激光陀螺仪的误差,提高激光捷联惯导的导航精度。激光陀螺仪的输出信号包含很多确定误差项和不确定的随机误差项<sup>[2]</sup>,随机误差包括

量化噪声、角度随机游走、零偏不稳定性、角速率随机游走、速率斜坡等,其中量化噪声、角度随机游走、零偏不稳定性是激光陀螺仪主要的性能指标<sup>[3]</sup>。对上述的误差进行分析的方法有常规的样本均值、自相关函数、功率率函数、Allan 方差辨识等方法。样本均值法和方差法都无法知道误差的来源,自相关函数和功率谱函数法虽然是从时域和频域进行统计特性分析的,但是很难将随机误差从数据中分离出

收稿日期: 2020-01-15; 修回日期: 2020-02-24; 录用日期: 2020-03-16

基金项目: 国家自然科学基金(61503392)、陕西省自然科学基金基础研究计划资助项目(2020JQ-491)

\* E-mail: 1561479526@qq.com; \*\* E-mail: wlx@163.com

来<sup>[4]</sup>。静态下的 Allan 方差可以有效地辨识随机误差,但是在实际应用中的动态环境下,随机误差尤其是量测噪声,会随着工况、环境等因素的不同发生变化,因此研究动态 Allan 方差分析方法显得尤为重要。

Allan 方差分析法是 20 世纪 60 年代由国家标准局提出的一种时域分析方法<sup>[5]</sup>,它可以用来分析陀螺仪等惯性器件或者其他精密仪器的随机误差,是一种公认的陀螺仪参数分析方法,Allan 方差分析法可以对各种误差源和噪声统计特性进行辨识<sup>[6]</sup>。动态 Allan 方差可以看作是 Allan 方差的扩展,最初由 Galleani 等<sup>[7-8]</sup>提出,用于测量原子钟的时变特性,同时由美国海军用于时钟监控<sup>[8]</sup>。

灰色系统理论由我国学者邓聚龙 1982 年建立<sup>[9]</sup>,其主要思想是信息可以分为白色、黑色、灰色,分别对应数据全部已知、数据未知、数据已知一部分的状态<sup>[10]</sup>,当数据量比较小时将其视为小样本,并将小样本考虑为大样本的已知部分,最后将整个数据样本作为一个灰色系统进行预测,根据样本发展趋势拓展样本数量,得到整个样本未知的统计特性。灰色预测理论是一种基于灰色理论的有效数据预测的方法,其中的灰色 GM(1,1)预测模型可以应用于实际生产和科学研究的诸多领域<sup>[11]</sup>。灰色 GM(1,1)预测模型可以在已知一部分先验随机误差参数的情况下,对后续的随机误差进行灰色预测和残差检验,通过对随机误差的动态预测来补偿激光陀螺仪随机误差<sup>[12]</sup>,最终达到提高惯性器件的数据精度的目的。

小波变换是信号处理和分析领域的重要方法<sup>[13]</sup>,其中通过小波函数进行信号降噪和信号检测是研究的热点<sup>[14-15]</sup>。小波变换可以将信号分解为近似系数和细节系数,基于小波变换对信号进行小波分解可以得到信号的高频部分和低频部分,近似系数经过多层小波分解隔离掉细节抖动后,可以从近似系数曲线中检测得到信号是否存在间断点和坏值。小波分解后的细节系数主要是表征噪声干扰抖动,抑制信号分离的细节系数可以很好地降低信号受到的噪声干扰。

本文基于改进的灰色 GM(1,1)预测模型,对动态工况下的激光陀螺仪随机误差进行预测,通过预测激光陀螺仪的随机误差,为激光陀螺仪的误差补偿提供依据。首先,提出一种新的动态工况下的 Allan 方差分析方法,建立灰色 GM(1,1)预测模型,通过先验序列预测后续同种工况下的随机误差;接

着,进行实测数据的实验验证。由实测数据直接建立灰色 GM(1,1)预测模型的预测精度较低,只能达到精度 3 级,预测效果不佳<sup>[16-17]</sup>。本研究进一步采用小波滤波结合残差模型对传统 GM(1,1)预测模型进行改进,采用自适应小波对实测随机误差系数进行平滑处理,使用残差修正 GM(1,1)模型提高模型的精度<sup>[18-19]</sup>。

实验分析结果表明,动态 Allan 方差分析可以很好地辨识出激光陀螺仪在等时间间隔内的随机误差参数,从时域动态 Allan 方差分析曲线上可以看出,随机误差参数存在着波动上升的趋势。从 Allan 方差需求数据量大、得出的随机误差系数量小的特点来看,动态 Allan 方差分析符合灰色理论应用条件,在灰色 GM(1,1)预测模型的基础上,基于改进 GM(1,1)预测模型,预测出后续的随机误差参数,其预测结果精度比传统 GM(1,1)预测模型精度提高了 2 个精度等级。

## 2 动态 Allan 方差分析

### 2.1 动态 Allan 方差分析

提出一种新的动态工况下激光陀螺仪信号的 Allan 方差分析方法,新动态 Allan 方差分析方法是利用矩形时间框对整个先验数据进行采样,由于静态 Allan 方差分析需要大量数据才能辨识随机误差参数<sup>[20]</sup>,假设每段矩形框选择的数据时间段内随机误差参数缓慢变化,通过静态 Allan 方差分析得出所有矩形框的随机误差,并将随机误差按时间点列成灰色预测序列后进行灰色 GM(1,1)预测模型预测,选择时间节点  $t=t_1$  作为时间矩形框中心点,矩形框时间跨度为  $T$ ,矩形框点所包含的时间范围为  $t_1 \in [t_1 - T/2, t_1 + T/2]$ ,并且假设在  $T$  时间内随机误差变化缓慢即静态 Allan 方差分析辨识误差系数作为该段时间内的误差系数值,计算得到的随机误差在  $t_1$  时刻值为  $x(t_1)$ ,假设先验数据框数目为  $n$ ,动态 Allan 方差辨识出随机误差序列  $X = \{x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)\}$ 。

## 3 GM(1,1)预测模型

### 3.1 建立 GM(1,1)预测模型

灰色量的处理过程是利用灰色理论建立预测模型,采用数据生成的方法规律性地预测动态随机误差,常用的单序列一阶线性灰色模型记作 GM(1,1)。

GM(1,1)建模的原始数据为

$$X^{(0)} = \{x^{(0)}(t_1), x^{(0)}(t_2), \dots, x^{(0)}(t_n)\}, \quad n \geq 4, \quad (1)$$

式中： $x^{(0)}(t_i)$ 为  $t_i$  时刻动态 Allan 方差辨识的随机误差参数。

利用一次累加生成 1-AGO 单增序列，即

$$X^{(1)} = \{x^{(1)}(t_1), x^{(1)}(t_2), \dots, x^{(1)}(t_n)\}, \quad (2)$$

式中： $x^{(1)}(t_1) = x^{(0)}(t_1)$ ,  $x^{(1)}(t_k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(t_i)$ ,  $k = 2, 3, \dots, n$ 。

对于非负的数据序列，累加生成操作可以弱化随机性，增加规律性，使生成序列呈指数增长规律；对于产生的阶跃数据序列，采取小波检测间断点的方式识别出间断点，并用自适应小波对波动干扰数据进行光滑；最后利用处理后的数据建立 GM(1,1) 预测模型，步骤如下。

1) 建立 GM(1,1) 预测模型

设  $Z^{(1)}$  为  $X^{(1)}$  的邻近均值生成序列，即

$$Z^{(1)} = \{z^{(1)}(t_2), z^{(1)}(t_3), \dots, z^{(1)}(t_n)\}, \quad (3)$$

式中： $z^{(1)}(t_k) = [x^{(1)}(t_k) + x^{(1)}(t_{k-1})]/2$ 。则 GM(1,1) 的灰色微分方程为

$$x^{(0)}(t_k) + ax^{(1)}(t_k) = b, \quad (4)$$

式中： $x^{(0)}(t_k)$  为灰导数； $a$  为发展系数； $z^{(1)}(t_k)$  为背景值； $b$  为灰作用量， $k = 2, 3, \dots, n$ 。写成矩阵形式为

$$Y = BP, \quad (5)$$

式中： $Y$  为激光陀螺仪随机误差数据向量， $Y =$

$$\begin{bmatrix} x^{(0)}(t_2) \\ x^{(0)}(t_3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(t_n) \end{bmatrix}; \mathbf{B} \text{ 为数据矩阵, } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(t_2) & 1 \\ -z^{(1)}(t_3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(t_n) & 1 \end{bmatrix};$$

$P$  为参数向量， $P = [a, b]^T$ 。

利用最小二乘法求解，可得

$$P = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T Y, \quad (6)$$

将  $P = [a, b]^T$  代入(4)式，取  $x^{(1)}(t_0) = x^{(0)}(t_1)$ ，解方程得到时间相关函数为

$$x^{(1)}(t_k) = \left[ x^{(0)}(t_1) - \frac{b}{a} \right] \exp(-at_k) + \frac{b}{a}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

因此，灰色微分方程的时间响应序列为

$$\hat{x}^{(1)}(t_{k+1}) = \left[ x^{(0)}(t_1) - \frac{b}{a} \right] \exp(-at_k) + \frac{b}{a}, \quad (8)$$

式中： $t_{k+1}$ 时刻前数据为先验建模序列； $t_{k+1}$ 时刻以后的数据为预测序列。

2) 预测  $t_{k+1}$ 时刻的原始数据

灰色模型实际上是生成数列的模型，模型预测

的数据需要经过逆生成还原后才可使用。还原值为

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(0)}(t_{k+1}) &= \hat{x}^{(1)}(t_{k+1}) - \hat{x}^{(1)}(t_k) = \\ & \left[ x^{(0)}(t_1) - \frac{b}{a} \right] (1 - \exp a) \exp(-at_k), \\ & k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (9)$$

3) 模型精度检验

检验 GM(1,1) 模型的精度，采用后验差进行检验。

预测误差定义为

$$e(t_k) = x^{(0)}(t_k) - \hat{x}(t_k). \quad (10)$$

为求解，首先设置一个估计误差函数，为

$$\bar{e} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e(t_k), \quad (11)$$

原始数列的均值和标准差分别定义为

$$\bar{x}^{(0)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^{(0)}(t_k), \quad (12)$$

$$S_1 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [x^{(0)}(t_k) - \bar{x}^{(0)}]^2}, \quad (13)$$

预测误差的标准差定义为

$$S_2 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [e(t_k) - \bar{e}]^2}, \quad (14)$$

方差比定义为

$$C = \frac{S_2}{S_1}. \quad (15)$$

### 3.2 灰色预测模型的改进

原始数据的光滑特性是影响模型精度的主要因素，本研究结合激光陀螺仪的随机误差参数特点对 GM(1,1) 模型进行改进，改进方法如下。

1) 预处理原始数据序列，使其满足序列级比判断，引入小波滤波函数检测原始数据中的间断点与坏值。

2) 对原始数据进行光滑处理，利用自适应小波函数对数据的波动干扰进行平滑处理，增加数据的光滑性，对自适应小波滤波平滑后的预测序列进行 GM(1,1) 预测模型建模，建模结果的平均相对误差明显减小，提高了预测精度。

3) GM(1,1) 预测模型的预测初始  $x^{(0)}$  值与后续预测值有间断点，造成了曲线拟合效果差、预测精度差的问题。采用初始序列动态预测的方法<sup>[21]</sup>，放弃初始先验序列  $x^{(0)}$ ，加入  $x^{(k+1)}$  构成新序列 ( $k$  个数据为建模序列，得到第  $k+1$  个数据，也就是模型中的第  $n+1$  个递推值)，也就是  $X_{\text{new}}^{(0)} = \{x^{(0)}(t_2), x^{(0)}(t_3), \dots, x^{(0)}(t_{n+1})\}$ ，如此递推，实现

了动态实时预测。由于初始先验值不是预测模型产生的预测值,后续预测曲线会产生明显的突起。因此,提出由方差比计算的改进算法,舍弃  $x^{(0)}$  参与方差比精度的计算,采取后验预测值的方差比计算来评定精度。

4) 建立残差修正模型,修正原点附近的数据。

已知原有的预测模型(8)式,对应数据为  $\hat{x}^{(1)} = \{x^{(1)}(t_1), x^{(1)}(t_2), \dots, x^{(1)}(t_n)\}$ , 原来的 1-AGO 数据序列为  $\hat{x}^{(1)} = \{x^{(1)}(t_1), x^{(1)}(t_2), \dots, x^{(1)}(t_n)\}$ , 则残差定义为

$$q^{(0)}(t_k) = x^{(1)}(t_k) - \hat{x}^{(1)}(t_k) \quad (16)$$

令  $k = i, i + 1, \dots, n$ , 得到残差序列  $q^{(0)}(t_k) = \{x^{(0)}(t_i), x^{(0)}(t_{i+1}), \dots, x^{(0)}(t_n)\}$ , 可以进一步表示为  $q^{(0)}(t_k) = \{x^{(0)}(t_1), x^{(0)}(t_2), \dots, x^{(0)}(t_{n'})\}$ ,  $n' = n - i + 1$ 。

对  $q^{(0)}$  建立 GM(1, 1) 模型, 时间响应为  $q^{(1)}(t_{k+1}) = \left[ q^{(0)}(t_1) - \frac{b'}{a'} \right] \exp(-a't_k) + \frac{b'}{a'}$ , 求导数并进行改写可以得到  $\hat{q}^{(0)}(t_{k+1}) = (-a') \left[ q^{(0)}(t_1) - \frac{b'}{a'} \right] \exp(-a't_k)$ 。

将上述残差的 GM(1, 1) 模型加入原模型可得

$$\hat{x}^{(1)}(t_{k+1}) = \left[ x^{(0)}(t_1) - \frac{b}{a} \right] \exp(-at_k) + \frac{b}{a} + \delta(k-i)(-a') \left[ q^{(0)}(t_1) - \frac{b'}{a'} \right] \exp(-a't_k) \quad (17)$$

式中:  $\delta(k-i) = \begin{cases} 1, & k \geq i \\ 0, & k < i \end{cases}$ , 将(17)式还原得到残差

GM(1, 1) 模型修正后的预测模型为

$$x^{(0)}(t_{k+1}) = (-a) \left[ x^{(0)}(t_1) - \frac{b}{a} \right] \exp(-at_k) + \delta(k-i)(-a') \left[ q^{(0)}(t_1) - \frac{b'}{a'} \right] \exp(-a't_k) \quad (18)$$

改进 GM(1, 1) 预测模型算法运行具体步骤如图 1 所示。

## 4 实验分析

实验采用实验车、带有三轴激光陀螺仪的激光捷联惯导系统(LSINS)装置进行动态跑车测试实验,实验装置如图 2 所示(图中 PC 是指工控机),激光陀螺仪输出角增量数据,频率为 500 Hz,实验数

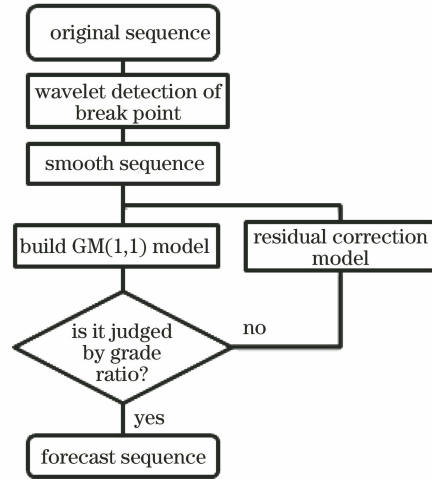


图 1 预测步骤图

Fig. 1 Prediction step diagram

据共 930000 组,矩形框时间选为 20 s,总共计算数据 90 组,前面 60 组数据用于 GM(1, 1) 模型的预测建模,后 30 组数据用于验证分析 GM(1, 1) 模型的预测精度。



图 2 实验装置图

Fig. 2 Diagram of experimental equipment

传统灰色 GM(1, 1) 预测模型直接利用原始序列进行递推预测,结果如图 3 所示,从图中可以看出,动态数据 Allan 方差序列上下波动,不进行平滑处理而直接进行预测的各项系数方差比如表 1 所示,精度等级评判标准如表 2 所示。表 1 中的数据为陀螺仪 Allan 方差系数,其中包含陀螺仪的量化噪声系数(表中用 Q 表示)、角度随机游走系数(表中用 N 表示)、零偏不稳定性系数(表中用 B 表示)、角速率随机游走系数(表中用 K 表示)、速率斜坡系数(表中用 R 表示)。从表 1 和表 2 可以得出,传统 GM(1, 1) 灰色预测模型预测各项系数方差比均在 3 级精度左右,预测精度不够好。

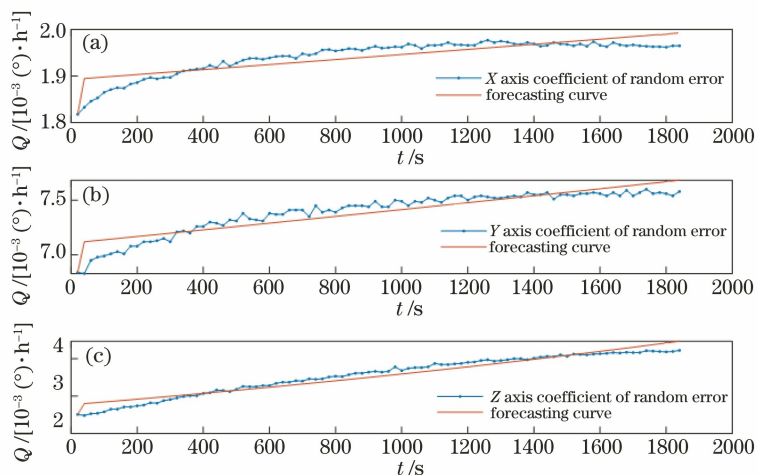


图 3 传统灰色预测算法量测噪声系数预测图。(a) X 轴量测噪声系数;(b) Y 轴量测噪声系数;(c) Z 轴量测噪声系数  
Fig. 3 Noise coefficient prediction graphs measured by traditional grey prediction algorithm. (a) X-axis measuremental noise coefficient; (b) Y-axis measuremental noise coefficient; (c) Z-axis measuremental noise coefficient

表 1 传统 GM(1,1)模型随机误差预测方差比  
Table 1 Variance ratios of random error prediction by traditional GM (1,1) model

Coefficient of random error	Q	N	B	K	R
X-axis variance ratio	0.53	0.52	0.49	0.52	0.56
Y-axis variance ratio	0.50	0.53	0.53	0.53	0.53
Z-axis variance ratio	0.54	0.59	0.59	0.59	0.59

表 2 GM(1,1)模型精度分级

Table 2 Accuracy classification of GM (1,1) model

Precision grade	1	2	3	4
C	<0.35	<0.5	<0.65	≥0.65

原始序列经过小波滤波平滑处理,处理后的曲线如图 4 所示,从图中可以看出原始序列存在着波动上升的趋势,经过平滑处理后的数据序列使灰色

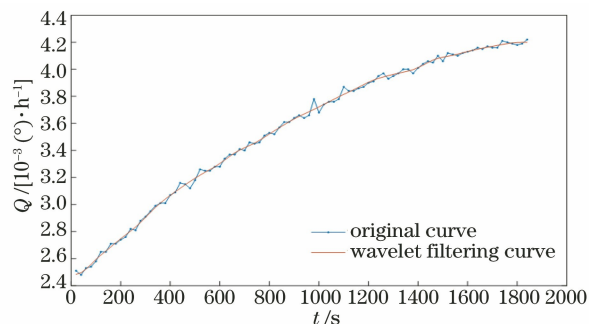


图 4 小波滤波后数据序列曲线图

Fig. 4 Data sequence curves after wavelet filtering

GM(1,1)预测模型方差比精度等级更小。

将平滑处理后的序列用于改进 GM(1,1)预测模型建模,以量测噪声系数为例,利用建模数据和检验数据作图,如图5所示,预测曲线和建模序列曲线

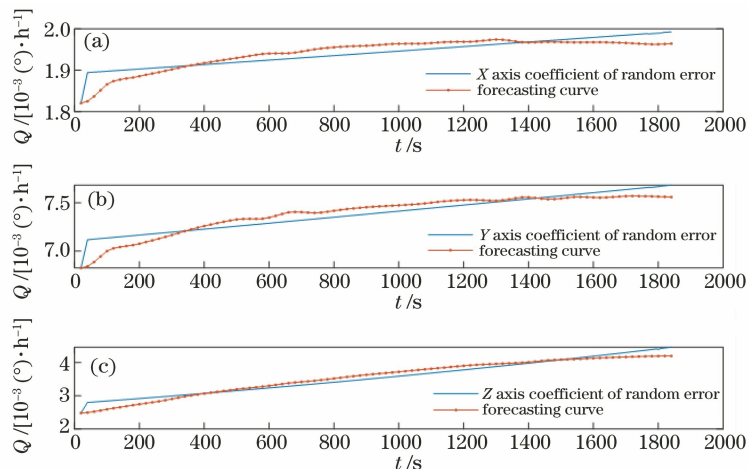


图 5 改进算法量测噪声系数预测图。(a) X 轴量测噪声系数;(b) Y 轴量测噪声系数;(c) Z 轴量测噪声系数  
Fig. 5 Noise coefficient prediction graphs measured improved coefficient. (a) X-axis measuremental noise coefficient; (b) Y-axis measuremental noise coefficient; (c) Z-axis measuremental noise coefficient

趋势一致且差距不大,在最开始阶段存在着一个相差较大的倾角差别,这是因为建模序列是从第二个数据开始递推的,第一个数据保留,因此在第一个数据周围就会形成类似的倾角。以量测噪声系数、角

度随机游走系数、零偏不稳定性系数为例,作激光陀螺仪随机误差预测曲线图,如图 6 所示,从图中可以看出随机误差预测的效果,实测验证数据曲线在预测曲线周围摆动,摆动范围小,满足预测要求。

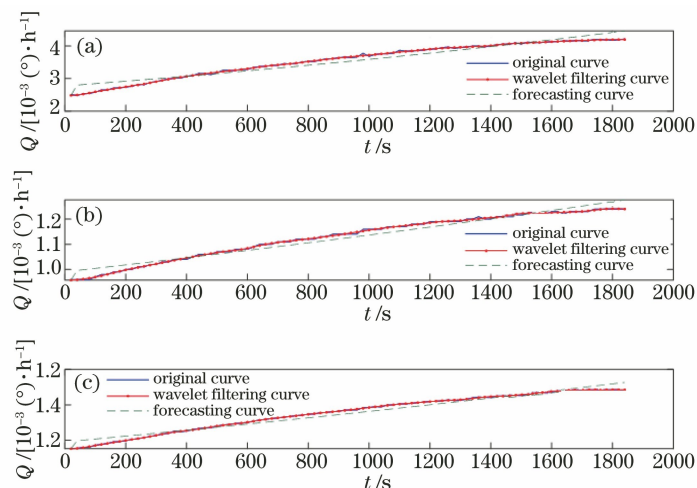


图 6 激光陀螺仪随机误差预测曲线图。(a)量测噪声系数;(b)角度随机游走系数;(c)零偏不稳定性系数  
Fig. 6 Random error prediction curves of laser gyroscope. (a) Measurement noise coefficient; (b) angle random walk coefficient; (c) coefficient of zero deviation instability

通过实测数据计算改进 GM(1,1)模型随机误差预测方差比如表 3 所示,从表 3 和表 1 对比可以看出改进 GM(1,1)模型比传统 GM(1,1)模型预测方差比减小了很多,从表 2 中的精度等级来看,改进 GM(1,1)模型比传统 GM(1,1)模型预测方差比提高了 2 个精度等级,达到了 1 级的精度等级,预测效果更好。

表 3 改进 GM(1,1)模型随机误差预测方差比

Table 3 Variance ratios of random error prediction by modified GM (1,1) model

Coefficient of random error	Q	N	B	K	R
X-axis variance ratio	0.26	0.25	0.27	0.274	0.27
Y-axis variance ratio	0.15	0.28	0.27	0.27	0.27
Z-axis variance ratio	0.16	0.14	0.14	0.14	0.14

## 5 结 论

基于改进 GM(1,1)预测模型预测激光陀螺仪的随机误差参数,采用矩形时间框等间隔采集动态 Allan 方差辨识随机误差参数。基于小波变换检测 GM(1,1)预测模型序列间断点,使用小波滤波平滑 GM(1,1)预测模型序列,对模型进行残差修正,最后利用多组实测数据进行模型的建模和验证。实验结果表明,改进的灰色 GM(1,1)预测模型可以预测激光陀螺仪的随机误差参数,预测精度方差比相比

于传统灰色 GM(1,1)预测模型提高了 2 个精度等级,达到了 1 级的精度等级,对于激光陀螺仪的随机误差的补偿提供了重要依据。

## 参 考 文 献

- [1] Zhan D J, Qin S Q, Wang S S, et al. Investigations on forward-reversal rotation asymmetry of rate biased laser gyro scale factor[J]. Chinese Journal of Lasers, 2009, 36(8): 1995-1998.  
战德军, 秦石乔, 王省书, 等. 速率偏频激光陀螺标度因数正反转不对称性的研究[J]. 中国激光, 2009, 36(8): 1995-1998.
- [2] Du S L, Chen S Z, Chen P G, et al. Analysis of MEMS gyroscope noise based on Allan variance[J]. Instrument Technique and Sensor, 2018(5): 20-22, 27.  
杜少林, 陈书钊, 陈鹏光, 等. 基于 Allan 方差的 MEMS 陀螺仪噪声分析[J]. 仪表技术与传感器, 2018(5): 20-22, 27.
- [3] Ma Q, Wang Q, Yang Y, et al. Random error identification and suppression of MEMS gyroscope based on Allan variance [J]. Transducer and Microsystem Technologies, 2019, 38(6): 62-65.  
马群, 王庆, 阳媛, 等. 基于 Allan 方差的 MEMS 陀螺仪随机误差辨识与抑制[J]. 传感器与微系统, 2019, 38(6): 62-65.
- [4] Wei G, Long X W. Research on stochastic errors of dithered ring laser gyroscope based on dynamic Allan

- variance[J]. Chinese Journal of Lasers, 2010, 37(12): 2975-2979.
- 魏国, 龙兴武. 基于动态 Allan 方差的机抖激光陀螺随机误差研究[J]. 中国激光, 2010, 37(12): 2975-2979.
- [5] El-Sheimy N, Hou H Y, Niu X J. Analysis and modeling of inertial sensors using Allan variance[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2008, 57(1): 140-149.
- [6] Zhang Q, Wang W, Wang L, et al. Research on random errors of fiber optic gyro based on dynamic Allan variance and algorithm improvement[J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(4): 0406003.
- 张谦, 王玮, 王蕾, 等. 基于动态 Allan 方差的光纤陀螺随机误差分析及算法改进[J]. 光学学报, 2015, 35(4): 0406003.
- [7] Galleani L, Tavella P. Tracking nonstationarities in clock noises using the dynamic Allan variance[C]// Proceedings of the 2005 IEEE International Frequency Control Symposium and Exposition, August 29-31, 2005, Vancouver, BC, Canada. New York: IEEE, 2005: 392-396.
- [8] Galleani L, Tavella P. The characterization of clock behavior with the dynamic Allan variance[C]// IEEE International Frequency Control Symposium and PDA Exhibition Jointly with the 17th European Frequency and Time Forum, May 4-8, 2003, Tampa, FL, USA. New York: IEEE, 2003: 8029712.
- [9] Luo D, Wei B L. A unified treatment approach for a class of discrete grey forecasting models and its application [J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2019, 39(2): 451-462.
- 罗党, 韦保磊. 一类离散灰色预测模型的统一处理方法及应用[J]. 系统工程理论与实践, 2019, 39(2): 451-462.
- [10] Liu S F. Emergence and development of grey system theory and its forward trends[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2004, 36(2): 267-272.
- 刘思峰. 灰色系统理论的产生与发展[J]. 南京航空航天大学学报, 2004, 36(2): 267-272.
- [11] Yang S X, Hu Y. Prediction of traffic accident loss based on dynamic grey prediction [J]. Journal of Wuhan University of Technology (Information & Management Engineering), 2017, 39(6): 674-678.
- 杨书霞, 胡艳. 基于动态灰色预测的交通事故损失预测[J]. 武汉理工大学学报(信息与管理工程版), 2017, 39(6): 674-678.
- [12] Tang T G, Wan X, Liu H W. Improved GM model for safety monitoring of high rock slopes[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(2): 307-312.
- 唐天国, 万星, 刘浩吾. 高边坡安全监测的改进 GM 模型预测研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(2): 307-312.
- [13] Li J L, Xu H L, He J. Research and improvement of denoising method of fiber optic gyroscope based on wavelet packet analysis [J]. Acta Optica Sinica, 2010, 30(8): 2224-2228.
- 李家垒, 许化龙, 何婧. 光纤陀螺信号的小波包去噪及改进[J]. 光学学报, 2010, 30(8): 2224-2228.
- [14] Meng X, Liu L, Jiang S, et al. Detection and revision of interference spectral signals based on wavelet transforms[J]. Acta Optica Sinica, 2019, 39(9): 0930007.
- 孟鑫, 刘磊, 江升, 等. 基于小波变换的干涉光谱信号检测与校正方法[J]. 光学学报, 2019, 39(9): 0930007.
- [15] Wang X F, Jin S Q, Hou S Y. Research on denoising method of laser detection sound signal based on wavelet threshold [J]. Journal of Atmospheric and Environmental Optics, 2018, 13(5): 388-394.
- 王行芳, 金施群, 侯少阳. 基于小波阈值的激光探测声音信号去噪研究[J]. 大气与环境光学学报, 2018, 13(5): 388-394.
- [16] Fang W H, Lu W, Hong D L, et al. Study on infrared thermal prediction model of rice seed germination rate based on multi-scale wavelet transform and grey neural network [J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(10): 1012001.
- 方文辉, 卢伟, 洪德林, 等. 基于多尺度小波变换和灰色神经网络的稻种发芽率红外热预测模型的研究[J]. 光学学报, 2015, 35(10): 1012001.
- [17] Cheng Y Q, Lu W, Luo H, et al. Study on prediction of rice seed germination rate by using continuous polarization spectroscopy and in laid grey neural network [J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(12): 1230001.
- 程宇琼, 卢伟, 罗慧, 等. 基于连续偏振光谱技术与嵌入型灰色神经网络的稻种发芽率检测方法研究[J]. 光学学报, 2015, 35(12): 1230001.
- [18] Ju H H, Liu Z G, Jiang J J, et al. Removal of hyperspectral stripe noise using low-pass filtered residual images [J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38(12): 1228002.
- 鞠荟荟, 刘志刚, 姜江军, 等. 基于低通滤波残差图的高光谱条带噪声去除[J]. 光学学报, 2018, 38(12): 1228002.
- [19] Zhou P, Wang X L, Ma Y X, et al. Analysis on residual error for adaptive optical system based on stochastic parallel gradient descent control algorithm [J]. Acta Optica Sinica, 2010, 30(3): 613-617.

- 周朴, 王小林, 马阁星, 等. 基于随机并行梯度下降算法自适应光学系统的校正残差分析[J]. 光学学报, 2010, 30(3): 613-617.
- [20] Zhang N, Li X Y. Research on theoretical improvement of dynamic Allan variance and its application[J]. Acta Optica Sinica, 2011, 31(11): 1106003.  
张娜, 李绪友. 动态 Allan 方差的理论改进及其应用研究[J]. 光学学报, 2011, 31(11): 1106003.
- [21] Wang L D, Che L, Lu J, et al. SINS/GPS integrated navigation system based on improved grey forecasting model[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2015, 23(2): 248-251, 257.  
王立冬, 车琳, 鲁军, 等. 基于改进型灰色预测模型的 SINS/GPS 组合导航系统[J]. 中国惯性技术学报, 2015, 23(2): 248-251, 257.