

· 特邀综述 ·

# 线阵相机标定方法综述

王国琛<sup>1,2\*\*</sup>, 钱克矛<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>西安工业大学光电工程学院, 陕西 西安 710021;

<sup>2</sup>新加坡南洋理工大学计算机科学与工程学院, 新加坡 639798

**摘要** 在基于相机的众多应用场合中,对相机内外参数与镜头畸变参数的标定是关键环节,确定其标定过程的简易操作及标定结果的精度至关重要。与面阵相机相比,线阵相机的标定过程较为复杂。介绍了适合线阵相机的成像几何模型和镜头畸变模型,总结了线阵相机标定的一般流程,归纳分析了文献中基于静态成像和动态扫描成像的标定方法,并对其特点作出了简要评价。

**关键词** 成像系统; 标定; 线阵相机; 相机成像模型; 镜头畸变模型; 非线性优化; 交比不变性

中图分类号 TP391

文献标志码 A

doi: 10.3788/AOS202040.0111011

## Review on Line-Scan Camera Calibration Methods

Wang Guohui<sup>1,2\*\*</sup>, Qian Kemao<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>School of Optoelectronic Engineering, Xi'an Technological University, Xi'an, Shaanxi 710021, China;

<sup>2</sup>School of Computer Science and Engineering, Nanyang Technological University, Singapore 639798, Singapore

**Abstract** Calibration of the intrinsic and extrinsic parameters of a camera as well as the lens distortion parameters is a crucial step in many camera-based vision applications. Further, ensuring the simple operation of the calibration process and the accuracy of the calibration results is critical. The calibration process of the line-scan cameras is more complicated when compared with that of the area-scan cameras. Herein, the imaging geometric model and the lens distortion model, which are suitable in case of line-scan cameras, are described; subsequently, the general calibration procedure of the line-scan camera is summarized. Furthermore, the calibration methods that have been previously proposed in the literature based on static imaging and dynamic scanning imaging are classified and analyzed, and their characteristics are briefly reviewed.

**Key words** imaging systems; calibration; line-scan camera; camera imaging model; lens distortion model; non-linear optimization; cross-ratio invariance

**OCIS codes** 110.2960; 150.1488; 150.0155; 150.3045; 150.6910

## 1 引 言

工业相机是视觉测量的成像器件,根据传感器类型,可分为线阵相机和面阵相机,前者的传感器通常只有一行或几行成像单元(像元),可视为后的一个特例。利用线阵相机获取物体的 2D 图像时,需使相机与物体之间保持相对运动,因而需要额外的运动装置辅助成像,由此造成了线阵相机的应用不如面阵相机的应用广泛。但是在相同的数据传输速率下,线阵相机由于传感器像元的行数比面阵相机少的多,因此可获得较高的分辨率和扫描频率,如

目前市场上在售的线阵相机,其分辨率高达 16384 pixel(像元总长度达 81.92 mm)、扫描频率可达 300 kHz。同时,线阵相机具有动态范围宽、性价比高等优势,特别是高分辨率和高扫描频率,非常适用于计算光学成像<sup>[1-2]</sup>、航空航天<sup>[3-4]</sup>、靶场测试<sup>[5-6]</sup>、工农业生产过程检测<sup>[7-10]</sup>等领域中要求精度高、视场大、被测物体运动速度快的测量场合。

将相机用于测量物体的 3D 形貌时,需要事先明确空间物体表面某点的几何位置与其在图像中对应点之间的相互关系,可利用相机成像几何模型来描述这种关系,并借助已知特征点的世界坐标与像

收稿日期: 2019-09-23; 修回日期: 2019-11-11; 录用日期: 2019-11-18

基金项目: 西安市智能探视感知重点实验室项目(201805061ZD12CG45)、西安工业大学陕西省光电测试与仪器技术重点实验室开放基金(2016SZSJ-60-1)

\* E-mail: MKMQian@ntu.edu.sg; \*\* E-mail: booler@126.com

素坐标求解模型参数,这就是相机标定。相机标定是实现相机测量应用的关键环节,其标定过程的操作难易程度及标定结果的精度分别会影响到相机工作产生结果的方便性和准确性。由于面阵相机在机器视觉测量中的广泛使用,其标定理论和方法一直以来都是首要深入研究的问题<sup>[11-25]</sup>,目前已经开发出了较为成熟的相机标定工具箱<sup>[26-29]</sup>。有兴趣的读者可参考这方面的综述文献<sup>[11-13]</sup>。

由于线阵相机仅能对 1D 空间成像,无法使 3D 标定物或 2D 平面靶标上所有的特征点同时进入相机视场,因而不能直接将面阵相机的标定方法应用在线阵相机上<sup>[30]</sup>。与面阵相机相比,线阵相机的标定过程更为复杂,相关的研究文献较少。目前尚无无线阵相机标定的综述,对主要的标定方法<sup>[31-52]</sup>进行描述、分析和比较是本文的重点。

本文首先通过引入面阵相机的成像模型、镜头畸变模型,结合线阵相机的特殊性,推导出了适合线阵相机的成像模型和镜头畸变模型;然后,给出了线阵相机标定的一般流程;最后,重点介绍了近些年来文献中出现的主要标定方法,并对其特点进行了一些简要评价。

## 2 相机成像模型

由于可将线阵相机视为面阵相机的一个特例,因此可从面阵相机的成像过程出发推导出线阵相机的成像几何模型。如图 1 所示,空间物体表面特征点  $P$ (物点)的 3D 几何位置与其在图像中对应点  $p$ (像点)之间的相互关系可以在四个坐标系中通过坐标变换得到。这四个坐标系分别为世界坐标系、相机坐标系、图像坐标系和像素坐标系。

1) 3D 直角坐标系  $O_w-X_wY_wZ_w$  为世界坐标系,是一个可以人为设置的右手系;

2) 3D 直角坐标系  $O_c-X_cY_cZ_c$  为相机坐标系,坐标系原点  $O_c$  位于镜头的光学中心(投影中心)处, $Z_c$  轴垂直于图像传感器(像平面)且与镜头(或相机)光轴保持重合, $X_c$  轴平行于图像传感器像元阵列的长边, $Y_c$  轴由右手定则确定;

3) 2D 直角坐标系  $o-xy$  为图像坐标系,坐标系

原点  $o$  为镜头光轴与图像传感器的交点即主点, $x$  轴、 $y$  轴分别平行于相机坐标系的  $X_c$  轴、 $Y_c$  轴;

4)  $uv$  为像素坐标系,一般可用 2D 直角坐标系表示(高精度建模时需用 2D 斜坐标系表示),坐标系原点位于图像传感器像元阵列的左上角, $u$  轴、 $v$  轴分别平行于像元阵列的长边、短边,此时像素坐标  $(u, v)$  表示该像素点对应的像元在图像传感器像元阵列中的列序数与行序数。有了这些坐标系后,即可方便地建立物点世界坐标和像点像素坐标之间的关系。

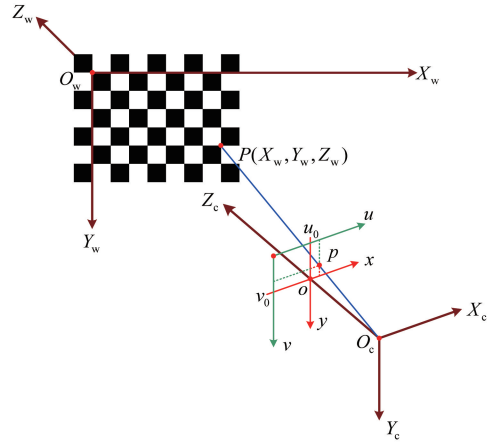


图 1 面阵相机成像过程中的坐标系

Fig. 1 Coordinate systems of imaging process for area-scan cameras

首先,特征点  $P$  在世界坐标系下的坐标  $(X_w, Y_w, Z_w)$  与相机坐标系下的坐标  $(X_c, Y_c, Z_c)$  之间的变换关系可表示为<sup>[53]</sup>

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3} & \mathbf{T}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{1}_{1 \times 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中: $\mathbf{R}$  为世界坐标系  $O_w-X_wY_wZ_w$  到相机坐标系  $O_c-X_cY_cZ_c$  的旋转矩阵,其元素为  $r_{11} \sim r_{33}$ ,具体表达式为

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \sin \psi \cos \theta & -\sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (2)$$

显然, $\mathbf{R}$  为正交矩阵,虽有 9 个元素,但不相互独立,实际上自由度为 3,即  $\psi, \theta$  和  $\phi$  三个旋转角度; $\mathbf{T} =$

$[t_x \ t_y \ t_z]^T$  为世界坐标系  $O_w-X_wY_wZ_w$  到相机坐标系  $O_c-X_cY_cZ_c$  的平移向量。旋转矩阵  $\mathbf{R}$  和平

移向量  $\mathbf{T}$  总共包含有 6 个参数,称其为相机的外部参数。

其次,3D 空间中的物点到 2D 像平面之间的成像几何变换理论上可以用透视投影模型来表示。此时,相机坐标系下的物点  $P(X_c, Y_c, Z_c)$  与图像坐标系下的像点  $p(x, y)$  之间的变换关系可通过相似三角形得到,即

$$\begin{cases} \frac{x}{X_c} = \frac{f}{Z_c} \\ \frac{y}{Y_c} = \frac{f}{Z_c} \end{cases} \Rightarrow Z_c \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

式中: $f$  为镜头的焦距。

然后,假定图像坐标系原点  $o$  位于像素坐标系的  $(u_0, v_0)$ ,并忽略图像传感器像元阵列的非矩形影响因素,则图像坐标  $(x, y)$  与像素坐标  $(u, v)$  存在如下关系<sup>[53]</sup>

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/dx & 0 & u_0 \\ 0 & 1/dy & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

式中: $dx, dy$  分别为单个像素点在  $x$  轴和  $y$  轴方向上对应的物理尺寸。

最后,综合(1)~(4)式,可得世界坐标  $(X_w, Y_w, Z_w)$  与像素坐标  $(u, v)$  之间的变换关系,亦即成像几何模型,表达式为

$$Z_c \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & f_y & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3} & \mathbf{T}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{1}_{1 \times 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{3 \times 4} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

式中: $f_x = f/dx, f_y = f/dy, u_0, v_0$  为相机的 4 个内部参数; $\mathbf{M}$  为相机的成像矩阵,其元素为  $m_{11} \sim m_{34}$ 。这就是通常使用的面阵相机的成像几何模型。

对于线阵相机,假定图像传感器像元阵列仅有一行,此时(5)式中  $v_0$  可认为为 0,于是成像几何模型可以简化为

$$Z_c \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & f_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

将(6)式展开,可得

$$\begin{cases} u = f_x \frac{r_{11}X_w + r_{12}Y_w + r_{13}Z_w + t_x}{r_{31}X_w + r_{32}Y_w + r_{33}Z_w + t_z} + u_0 = \frac{m_{11}X_w + m_{12}Y_w + m_{13}Z_w + m_{14}}{m_{31}X_w + m_{32}Y_w + m_{33}Z_w + m_{34}} \\ 0 = f_y (r_{21}X_w + r_{22}Y_w + r_{23}Z_w + t_y) = m_{21}X_w + m_{22}Y_w + m_{23}Z_w + m_{24} \end{cases} \quad (7)$$

(6)式和(7)式称之为线阵相机的成像几何模型。显然, $f_y \neq 0$  不需要标定。因此,对于线阵相机来说,需要标定的外部参数仍为 6 个,而内部参数下降到 2 个<sup>[31-32]</sup>。

### 3 镜头畸变模型

事实上,实际应用的镜头存在一定的畸变,并不满足理想的透视投影。镜头畸变是指镜头中因各透镜设计、制作和装配引起的像点偏离其理想位置的点位误差。也就是说,相机坐标系下的物点  $P(X_c, Y_c, Z_c)$  并不是成像在图像坐标系下的点  $p(x, y)$  处,如图 2 所示,而是成像在点  $p'(x', y')$  处,则其对应的像素坐标为  $(u', v')$ 。图像坐标系下实际像点  $p'(x', y')$  与理想像点  $p(x, y)$  之间的位

置关系可表示为

$$\begin{cases} x' = x + \delta_x(x, y) \\ y' = y + \delta_y(x, y) \end{cases}, \quad (8)$$

式中: $\delta_x, \delta_y$  分别为镜头畸变量在  $x$  轴和  $y$  轴上的分量。

一般来讲,镜头畸变是非线性的,主要存在三种类型的畸变<sup>[54-56]</sup>:径向畸变  $\delta_{r_x}, \delta_{r_y}$ ,离心畸变  $\delta_{d_x}, \delta_{d_y}$  和薄棱镜畸变  $\delta_{p_x}, \delta_{p_y}$ 。

#### 3.1 径向畸变

径向畸变主要是由镜头中各透镜的曲面误差(实际曲面与理论曲面之间的误差)所致,其畸变量  $\delta_r$  可由像平面主点  $o(0, 0)$  到像点  $p(x, y)$  的径向距离  $r$  的奇次幂多项式表示为

$$\delta_r = k_1 r^3 + k_2 r^5 + k_3 r^7 + \dots, \quad (9)$$

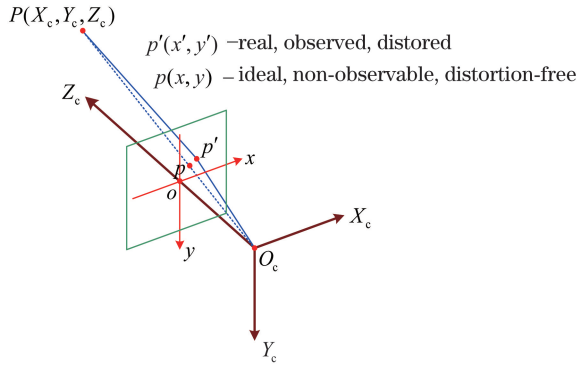


图 2 镜头畸变引起的像点位置改变

Fig. 2 Position change of image point caused by lens distortion

式中： $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ， $\delta_r$  在图像坐标系  $x$  轴和  $y$  轴上的分量为<sup>[54-55, 57]</sup>

$$\begin{cases} \delta_{r_x}(x, y) = x(k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6 + \dots) \\ \delta_{r_y}(x, y) = y(k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6 + \dots) \end{cases}, \quad (10)$$

式中： $k_1, k_2, k_3$  分别为一阶、二阶、三阶径向畸变系数。

### 3.2 离心畸变

离心畸变又称偏心畸变，主要是由镜头中各透镜的光学中心并不严格共线、镜头的光轴与相机的光轴不同轴等引起的，使得实际像点既产生径向偏差又产生切向偏差。

离心畸变量在  $x$  轴和  $y$  轴上的分量为<sup>[54-55, 58]</sup>

$$\begin{cases} \delta_{d_x}(x, y) = [2p_1 xy + p_2(3x^2 + y^2)] \times \\ \quad (1 + p_3 r^2 + p_4 r^4 + \dots) \\ \delta_{d_y}(x, y) = [p_1(x^2 + 3y^2) + 2p_2 xy] \times \\ \quad (1 + p_3 r^2 + p_4 r^4 + \dots) \end{cases}, \quad (11)$$

式中： $p_1, p_2, p_3, p_4$  为离心畸变系数。

### 3.3 薄棱镜畸变

薄棱镜畸变主要是由镜头设计缺陷、加工不完善、与相机装配存在安装误差等引起的，同样使得实际像点既产生径向偏差又产生切向偏差。

薄棱镜畸变量在  $x$  轴和  $y$  轴上的分量为<sup>[54-55, 58]</sup>

$$\begin{cases} \delta_{p_x}(x, y) = [s_1(x^2 + y^2)](1 + s_3 r^2 + s_4 r^4 + \dots) \\ \delta_{p_y}(x, y) = [s_2(x^2 + y^2)](1 + s_3 r^2 + s_4 r^4 + \dots) \end{cases}, \quad (12)$$

式中： $s_1, s_2, s_3, s_4$  为薄棱镜畸变系数。

### 3.4 线阵相机的畸变模型

将径向畸变量  $\delta_{r_x}, \delta_{r_y}$ ，离心畸变量  $\delta_{d_x}, \delta_{d_y}$  和薄棱镜畸变量  $\delta_{p_x}, \delta_{p_y}$  分别代入(8)式，可得到完

整的镜头畸变模型：

$$\begin{cases} x' = x + x(k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6 + \dots) + \\ \quad [2p_1 xy + p_2(3x^2 + y^2)](1 + p_3 r^2 + p_4 r^4 + \dots) + \\ \quad [s_1(x^2 + y^2)](1 + s_3 r^2 + s_4 r^4 + \dots) \\ y' = y + y(k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6 + \dots) + \\ \quad [p_1(x^2 + 3y^2) + 2p_2 xy](1 + p_3 r^2 + p_4 r^4 + \dots) + \\ \quad [s_2(x^2 + y^2)](1 + s_3 r^2 + s_4 r^4 + \dots) \end{cases}. \quad (13)$$

Tsai<sup>[18]</sup>指出，镜头畸变建模时一般不宜考虑高阶分量，若考虑高阶分量，有时不仅不能提高测量精度，反而会造成测量结果的不稳定。因此经常采用以下的简化模型<sup>[26-27, 29]</sup>：

$$\begin{cases} \tilde{x}' = \tilde{x} + \tilde{x}(k_1 \tilde{r}^2 + k_2 \tilde{r}^4 + k_3 \tilde{r}^6) + \\ \quad 2p_1 \tilde{x} \tilde{y} + p_2(3\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) + s_1(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) \\ \tilde{y}' = \tilde{y} + \tilde{y}(k_1 \tilde{r}^2 + k_2 \tilde{r}^4 + k_3 \tilde{r}^6) + \\ \quad p_1(\tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2) + 2p_2 \tilde{x} \tilde{y} + s_2(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) \end{cases}, \quad (14)$$

式中： $\tilde{r} = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}$ ， $\tilde{x} = x/f = X_c/Z_c$ ， $\tilde{y} = y/f = Y_c/Z_c$ ， $(\tilde{x}, \tilde{y})$  为归一化的图像坐标。(14)式就是面阵相机标定中通常使用的镜头畸变模型。

对于线阵相机，由于仅存在一个方向的成像单元， $\tilde{y}$  值固定不变且接近于 0<sup>[59-60]</sup>，只需考虑  $x$  轴方向的畸变，因此镜头畸变模型(14)式可简化为

$$\tilde{x}' = \tilde{x} + k_0 \tilde{x}^2 + k_1 \tilde{x}^3 + k_2 \tilde{x}^5 + k_3 \tilde{x}^7, \quad (15)$$

式中： $k_0 = 3p_2 + s_1$ 。若不考虑三阶径向畸变，模型(15)式可简化为<sup>[36-37, 41, 43, 45, 49, 61-62]</sup>

$$\tilde{x}' = \tilde{x} + k_0 \tilde{x}^2 + k_1 \tilde{x}^3 + k_2 \tilde{x}^5. \quad (16)$$

若不考虑离心畸变和薄棱镜畸变，模型(16)式可简化为<sup>[38, 63]</sup>

$$\tilde{x}' = \tilde{x} + k_1 \tilde{x}^3 + k_2 \tilde{x}^5. \quad (17)$$

若仅考虑一阶径向畸变，模型(17)式可进一步简化为<sup>[35, 44, 52, 59-60]</sup>

$$\tilde{x}' = \tilde{x} + k_1 \tilde{x}^3. \quad (18)$$

模型(16)~(18)式是线阵相机标定中常用的镜头畸变模型。

## 4 线阵相机标定流程

线阵相机标定的一般流程如图 3 所示，其实质就是根据已知的、充足的特征点 3D 坐标  $P_w(X_w, Y_w, Z_w)$  和对应的图像像素坐标  $(u', 0)$ ，通过非线性优化算法来估计相机内参数  $(f_x, u_0)$ 、外参数  $(\mathbf{R}, \mathbf{T})$  以及镜头畸变参数  $(k_0, k_1, k_2, k_3)$ 。

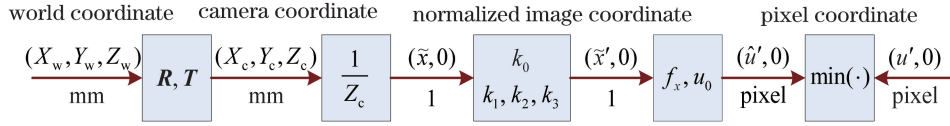


图 3 线阵相机标定的一般流程

Fig. 3 General procedure of line-scan camera calibration

根据流程,可采用重投影误差作为代价函数并使之最小化来估计上述参数,对应计算式为

$$\sum_i \{u'_i - \hat{u}'_i((X_w, Y_w, Z_w); f_x, u_0, k_0, k_1, k_2, k_3, \mathbf{R}(\psi, \theta, \phi), \mathbf{T}(t_x, t_y, t_z))\}^2 \rightarrow \min, \quad (19)$$

式中,  $\hat{u}'_i(f_x, u_0, k_0, k_1, k_2, k_3, \mathbf{R}, \mathbf{T})$  是世界坐标点  $P_w(X_w, Y_w, Z_w)$  在像面上投影的像素坐标,可由(15)式代入(7)式获得。代价函数的最小化可利用 Newton-Raphson、 Gauss-Newton、 Levenberg-Marquardt 或粒子群等算法实现,其中畸变参数  $(k_0, k_1, k_2, k_3)$  的初始值可设为 0,内参数  $(f_x, u_0)$  与外参数  $(\mathbf{R}, \mathbf{T})$  的初始值可通过不同方法得到。

基于上述基本流程,目前线阵相机标定方法大致分为静态成像方法和动态扫描成像方法。静态成像方法如 Horaud 标定方法<sup>[31-32]</sup>、Luna 标定方法<sup>[33]</sup>、Li 标定方法<sup>[34-35]</sup>、Sun 标定方法<sup>[36-38]</sup>等,是指相机每次拍摄标定物时,相机与标定物均保持静止不动,像面上获得的每一行数据均一致。动态扫描成像方法如 Draréni 标定方法<sup>[46-47]</sup>、Donné 标定方法<sup>[48]</sup>、Hui 标定方法<sup>[49-51]</sup>等,是指相机每次拍摄标定物时,借助精密位移平台或其他设备使相机与标定物之间保持匀速运动,此时像面上获得的数据为 2D 图像,便于后续特征点像素坐标的提取。

## 5 线阵相机静态成像标定方法

### 5.1 Horaud 标定方法

Horaud 等<sup>[31-32]</sup>是最早开始研究线阵相机标定的学者之一,他们从线阵相机的成像模型(7)式出发,提出了一种基于交比不变性的两步线阵相机标定方法。对模型(7)式进行简单变换,可得到

$$X_w = pY_w + qZ_w + t, \quad (20)$$

$$u = \frac{n_1 Y_w + n_2 Z_w + n_3}{n_4 Y_w + n_5 Z_w + 1}, \quad (21)$$

式中:  $p = \frac{-m_{22}}{m_{21}}, q = \frac{-m_{23}}{m_{21}}, t = \frac{-m_{24}}{m_{21}}, n_1 =$

$$\frac{m_{11}p + m_{12}}{m_{31}t + m_{34}}, n_2 = \frac{m_{11}q + m_{13}}{m_{31}t + m_{34}}, n_3 = \frac{m_{11}t + m_{14}}{m_{31}t + m_{34}}, n_4 =$$

$$\frac{m_{31}p + m_{32}}{m_{31}t + m_{34}}, n_5 = \frac{m_{31}q + m_{33}}{m_{31}t + m_{34}}$$
 为需要标定的线阵相

机参数。两步标定方法的第一步是将至少 5 个已知的非共线的对应点集  $\{u_i, Y_{wi}, Z_{wi}\}$  代入(21)式,通过最小二乘法估计出参数  $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5$ 。类似地,第二步则是将至少 3 个已知的非共线的特征点的世界坐标  $\{X_{wi}, Y_{wi}, Z_{wi}\}$  代入(20)式,通过最小二乘法估计参数  $p, q, t$ 。

上述方法的关键点是获取特征点的坐标信息,为此 Horaud 等设计了如图 4 所示的 2D 平面靶标。图中  $D_1, D_2, D_3, D_4$  为  $O_w-X_w Y_w$  平面内的四条直线,其中  $D_1 \parallel D_2 \parallel D_3 \parallel X_w$  轴,  $D_4$  与平行线相交,其直线方程分别为:  $Y_w = \epsilon, Y_w = \alpha, Y_w = \beta, Y_w = \gamma X_w + \delta$ ,  $(\epsilon, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$  均为已知的直线方程参数。线阵相机获得的像点  $a, b, c, d$  必然来自平面靶标上的一条直线上的四个特征点  $A, B, C, D$ 。

显然,  $A, B, C$  点的世界坐标中  $Y_w, Z_w$  已知,结合对应的像点坐标  $u$ ,就能获得 3 个特征点的信息  $\{u_i, Y_{wi}, Z_{wi}\}$ ,以供第一步标定使用,更多特征点信息可通过精确控制靶标沿  $Y_w$  轴和/或  $Z_w$  轴移动至新的位置获得。

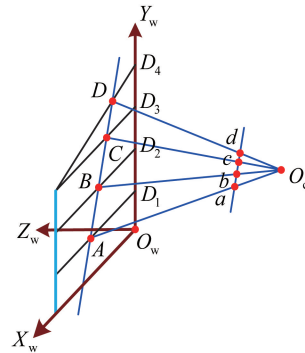


图 4 Horaud 标定方法的标定物

Fig. 4 Calibration object of Horaud's calibration method

第二步标定中的特征点信息  $\{X_{wi}, Y_{wi}, Z_{wi}\}$  可按照以下方式通过计算  $D$  点的世界坐标获得:根据射影变换理论中的交比不变性,特征点在  $Y_w$  轴方向的交比与像点的点列交比相等,即

$$C_R = \frac{Y_w(AC)/Y_w(BC)}{Y_w(AD)/Y_w(BD)} = \frac{ac/(bc)}{ad/(bd)}, \quad (22)$$

由此可计算得到  $D$  点的坐标为

$$\begin{cases} Y_w = \frac{\alpha(\beta - \epsilon) - C_R(\beta - \alpha)\epsilon}{(\beta - \epsilon) - C_R(\beta - \alpha)} \\ X_w = (Y_w - \delta)/\gamma \\ Z_w = 0 \end{cases} \quad (23)$$

这样就获得一个特征点的信息  $\{X_{wi}, Y_{wi}, Z_{wi}\}$ , 更多特征点信息可通过精确控制靶标沿  $Y_w$  轴和  $Z_w$  轴移动至新的位置并重复前面的计算获得。

Horaud 标定方法采用线性成像模型, 算法简单, 但需借助精密位移平台将 2D 平面靶标沿  $Y_w$  轴和/或  $Z_w$  轴精确移动多次, 且移动的精度直接影响到标定精度。另外, 该方法没有考虑镜头畸变造成的非线性影响。

为此, Zhuang 等<sup>[52]</sup> 通过增加畸变(18)式对 Horaud 标定方法进行了改进。需要指出的是, 改进后的模型已不能采用线性最小二乘法估计出其参数, 而需要通过非线性优化方法来求解  $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, k_1$ ; 第二步估计参数  $p, q, t$  时, 在计算像点的点列交比时, 需要利用第一步估计出的畸变参数  $k_1$  预先对像点进行畸变校正。

### 5.2 Luna 标定方法

Luna 等<sup>[33]</sup> 对 Horaud 标定方法中的 2D 平面靶标进行了改进, 设计了如图 5 所示的 3D 标定物。图中, 直线  $L_1 // L_3 // L_5 // L_7 // L_8 // L_{10} // L_{12} // L_{14} // X_w$  轴,  $L_2 // L_4 // L_6 // L_9 // L_{11} // L_{13}$  与  $X_w$  轴方向有一定的夹角, 直线  $L_i (i = 1, 2, \dots, 7)$  位于  $O_w - X_w Y_w$  平面内, 直线  $L_i (i = 8, 9, \dots, 14)$  位于与平面  $O_w - X_w Y_w$  平行且相距一定距离  $d_p$  的平面内, 所有的直线参数均已知。

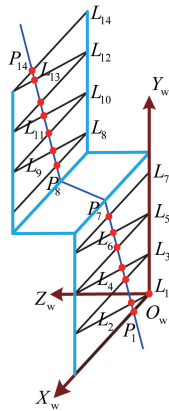


图 5 Luna 标定方法的标定物

Fig. 5 Calibration object of Luna's calibration method

标定时, 线阵相机将获得 14 个像点  $p_i (i = 1, 2, \dots, 14)$ , 依次来自对应的物空间折线与直线  $L_i (i = 1, 2, \dots, 14)$  的交点, 记为  $P_i (i = 1, 2, \dots, 14)$ 。点

$P_i (i = 1, 2, \dots, 14)$  的  $Z_w$  坐标和点  $P_i (i = 1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 14)$  的  $Y_w$  坐标由标定物本身给出。若要求像面平行于  $O_w - X_w Y_w$ , 则有特征点在  $Y_w$  轴方向的筒比与像点的点列筒比相等, 此时  $P_i (i = 2, 4, 6, 9, 11, 13)$  的  $X_w, Y_w$  坐标可由下面的筒比关系式确定:

$$S_R = \frac{P_i P_{i+1}}{P_{i-1} P_i} = \frac{p_i p_{i+1}}{p_{i-1} p_i}, i = 2, 4, 6, 9, 11, 13. \quad (24)$$

这时, 可利用已求得的  $P_2, P_4$  和  $P_9, P_{11}$  的坐标, 分别计算  $Z_w = 0$  和  $Z_w = d_p$  平面中的扫描直线方程, 进一步可计算  $P_i (i = 1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 14)$  的  $X_w$  坐标。这样就获得了所有 14 个特征点的 3D 坐标, 然后依据图 3 所示的相机标定流程, 利用 Newton-Raphson 算法优化求解所有标定参数, 其中内参数  $(f_x, u_0)$  的初始值由相机与镜头出厂参数计算得到, 外参数  $(R, T)$  的初始值通过手工测量得到。

尽管 Luna 标定方法避免了使用精密位移平台精确移动 2D 平面靶标, 但该方法对 3D 标定物的制作精度提出了较高的要求, 而且标定物制作完成后特征点的数量较少(只有 14 个); 同时, 标定时要求像面平行于  $O_w - X_w Y_w$ , 并且 Newton-Raphson 算法中部分参数的初始值需通过手工测量得到, 在一定程度上影响了标定结果的准确性。

### 5.3 Li 标定方法

在 Horaud 和 Luna 标定方法的基础上, Li 等<sup>[34]</sup> 提出了一种两步标定方法, 设计了如图 6 所示的 3D 标定物(图中示意特征点数量为 20 个, 实际上有 40 个)。图中, 两个 2D 平面靶标成  $90^\circ$  夹角, 靶标图案结构参数均已知。

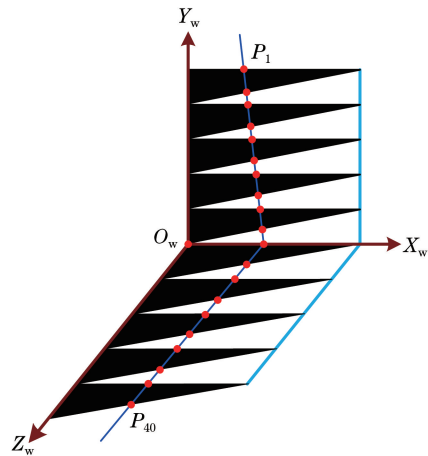


图 6 Li 标定方法<sup>[34]</sup>的标定物

Fig. 6 Calibration object of Li's calibration method<sup>[34]</sup>

标定时,线阵相机扫描平面上特征点  $P_i (i=1, 2, \dots, 20; 21, 23, \dots, 39)$  的  $Z_w$  坐标和点  $P_i (i=1, 3, \dots, 19; 21, 22, \dots, 40)$  的  $Y_w$  坐标由标定物本身给出。同 Horaud 标定方法一样,可利用交比不变性(22)式计算得到  $P_i (i=2, 4, \dots, 16)$  的  $X_w, Y_w$  坐标和  $P_i (i=22, 24, \dots, 36)$  的  $X_w, Z_w$  坐标。根据这些特征点的 3D 坐标,通过最小二乘拟合得到线阵相机扫描平面方程(20)式,进一步计算得到 40 个特征点的 3D 坐标。

两步标定方法中第一步是估计成像模型(7)式中所有的内外参数,其中,  $r_{21}, r_{22}, r_{23}, t_y$  可以根据特征点  $P_i$  拟合的线阵相机扫描平面方程(20)式的系数直接得到,  $r_{11}, r_{12}, r_{13}, t_x, t_z, f_x, u_0$  可以借助(21)式通过相应变换得到(具体过程可参见文献[34]),  $r_{31}, r_{32}, r_{33}$  可根据旋转矩阵行向量的正交性通过叉乘求得,即  $[r_{31} \ r_{32} \ r_{33}]^T = [r_{11} \ r_{12} \ r_{13}]^T \times [r_{21} \ r_{22} \ r_{23}]^T$ 。

第二步则是以第一步的结果为初值,通过 Gauss-Newton 算法迭代求解(19)式来优化相机的内外参数。

Li 标定方法[34]同样避免了使用精密位移平台精确移动 2D 平面靶标,而且靶标制作相对较为简单,改进了 Luna 方法中要求像面平行于  $O_w-X_wY_w$  以及手工测量获取参数初始值的弊端,使得标定过程更加方便。但是,该方法并没有考虑镜头畸变造成的非线性影响。

Li 等[35]在后来的研究工作中,考虑了一阶径向畸变[(18)式]的影响,并通过图 7 中的 2D 平面靶标(相对于图 6 减少了一维,但增加了 6 个角点图案)的  $j$  次运动来获取多个特征点的 3D 坐标,运动变换矩阵  $R'_j$  和  $T'_j$  由辅助的面阵相机和 2D 平面靶标上的角点来获取,利用  $R'_j$  和  $T'_j$  可将  $j$  次获得的多个特征点的 3D 坐标统一到一个世界坐标系。然后利用文献[34]中类似的方法,计算得到相机内外参数的初始值。最后通过 Nelder-Mead 单纯形法优化得到线阵相机的内外参数和镜头的畸变参数。

Li 标定方法[35]借助张正友面阵相机标定方法[13-14]的手段,解除了 Horaud 标定方法必须将 2D 平面靶标沿  $Y_w$  轴和/或  $Z_w$  轴精确移动的限制,使得 2D 平面靶标的运动更加灵活,并且克服了 3D 标定物[33-34]特征点偏少的问题,标定精度得到了一定幅度的提高。但是,需要增加额外的面阵相机辅助标定,标定精度受制于面阵相机的标定与测量精度,且标定过程略显繁琐。

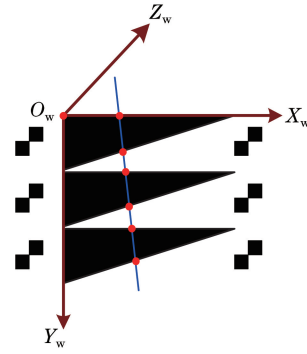


图 7 Li 标定方法[35]的标定物

Fig. 7 Calibration object of Li's calibration method[35]

### 5.4 Sun 标定方法

与 Li 等[35]提出的标定方法类似,Sun 等利用图 8 所示的 2D 平面靶标对单线阵相机[36]和双线阵相机[37-38]实现了标定。

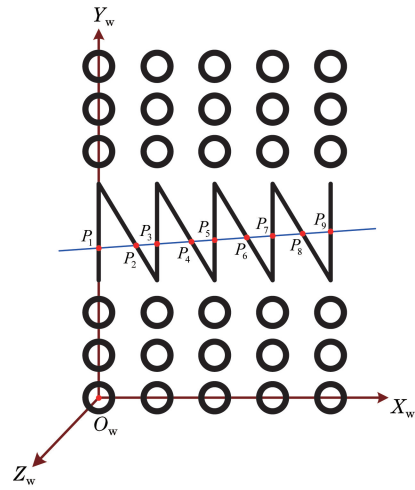


图 8 Sun 标定方法的标定物

Fig. 8 Calibration object of Sun's calibration method

标定时,线阵相机扫描平面上特征点  $P_i (i=1, 2, \dots, 9)$  的 3D 坐标计算方式、两步标定方法过程与 Li 标定方法[35]一致。不同之处是:文献[36-37]使用辅助的面阵相机和 2D 平面靶标上的同心圆特征点来得到  $j$  次的运动变换矩阵  $R'_j$  和  $T'_j$ ,然后利用  $R'_j$  和  $T'_j$  将  $j$  次获得的多个特征点的 3D 坐标统一到一个世界坐标系;而文献[38]中则是利用激光跟踪仪将  $j$  次获得的多个特征点的 3D 坐标统一到一个世界坐标系。

需要说明的是,在计算内外参数初始值时,为了减少误差,Sun 标定方法[36]采用了文献[53]的做法,增加了约束条件:

$$m_{31}^2 + m_{32}^2 + m_{33}^2 = 1, \quad (25)$$

并使用拉格朗日乘子法求解得到参数的初始值。Sun 标定方法[36]的精度相对于 Li 标定方法[35]有了

大幅度的提高。

### 5.5 其他静态成像标定方法

除了上述方法外, Lilienblum 等<sup>[39-40]</sup> 和 Song 等<sup>[41]</sup> 提出了基于编码图案的 3D 标定物的线阵相机标定方法, 理论上讲虽然可以提高精度, 但是增加了标定物的复杂性和制作困难以及特征点提取算法的难度。Yao 等<sup>[42]</sup> 仅利用 Luna 标定方法<sup>[33]</sup> 中 3D 标定物的一个平面靶标, 提取特征点像素坐标后进行正交旋转得到虚拟的 2D 数据, 然后利用类似张正友<sup>[13-14]</sup> 的方法进行内外参数标定。Niu 等<sup>[43]</sup> 设计了基于空间圆环组的 3D 标定物, 并利用粒子群优化算法对相机的内外参数进行了优化。Su 等<sup>[44]</sup> 将 Li 等<sup>[34]</sup> 提出的标定方法引入了高光谱线阵相机的标定, 同时也考虑了镜头畸变造成的影响。Liao 等<sup>[45]</sup> 设计了基于空心线条的 3D 标定物, 解决了线阵相机从不同视角拍摄靶标时产生的偏心误差的问题。

## 6 线阵相机动态扫描成像标定方法

### 6.1 Draréni 标定方法

Draréni 等<sup>[46-47]</sup> 首次提出了基于 2D 平面靶标的动态扫描成像标定方法, 其中动态扫描成像示意图如图 9 所示。图中, 线阵传感器沿  $Y_c$  轴保持匀速运动, 像元阵列方向平行于  $X_c$  轴, 因此, 线阵相机的扫描平面平行于  $O_c-X_cZ_c$  平面。仿照前面成像

模型[(6)式]的建立, 首先, 考虑到线阵传感器特定的运动速度和方向, 特征点在相机坐标系下的坐标  $(X_c, Y_c, Z_c)$  和其对应的像素坐标  $(u, v, 1)$  之间的变换关系可表示为

$$Z_c \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c Z_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

式中:  $v = sY_c$ ,  $s$  为比例因子, 依赖于线阵传感器的运动速度。其次, 既然采用 2D 平面靶标, 可假定  $Z_w = 0$ , 于是世界坐标系下的坐标  $(X_w, Y_w, Z_w)$  与相机坐标系下的坐标  $(X_c, Y_c, Z_c)$  之间的变换关系(1)式简化为

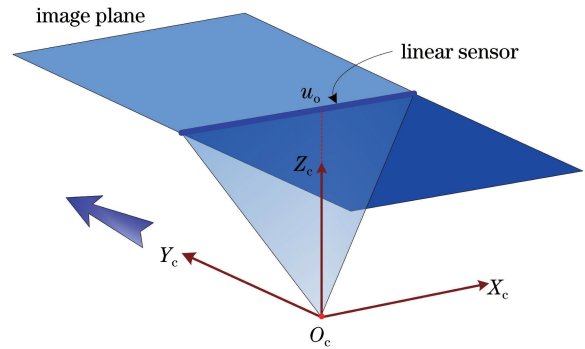


图 9 Draréni 标定方法中动态扫描成像  
Fig. 9 Dynamic scanning imaging of Draréni's calibration method

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11}X_w + r_{12}Y_w + t_x \\ r_{21}X_w + r_{22}Y_w + t_y \\ r_{31}X_w + r_{32}Y_w + t_z \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

最后, 将(27)式代入(26)式, 可得

$$Z_c \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & u_0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x & 0 & 0 & 0 \\ r_{21}t_z + r_{31}t_y & r_{22}t_z + r_{32}t_y & t_yt_z & r_{21}r_{31} & r_{22}r_{32} & r_{21}r_{32} + r_{22}r_{31} \\ r_{31} & r_{32} & t_z & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ 1 \\ X_w^2 \\ Y_w^2 \\ X_wY_w \end{bmatrix}, \quad (28)$$

(28)式可进一步简写为

$$[u, v, 1]^T \sim \mathbf{H} [X_w, Y_w, 1, X_w^2, Y_w^2, X_wY_w]^T, \quad (29)$$

式中:

$$\mathbf{H} = \lambda \begin{bmatrix} f_x r_{11} + u_0 r_{31} & f_x r_{12} + u_0 r_{32} & f_x t_x + u_0 t_z & 0 & 0 & 0 \\ s(r_{21}t_z + r_{31}t_y) & s(r_{22}t_z + r_{32}t_y) & st_y t_z & sr_{21}r_{31} & sr_{22}r_{32} & s(r_{21}r_{32} + r_{22}r_{31}) \\ r_{31} & r_{32} & t_z & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (30)$$



反映了物像之间的单应变换关系(homography), $\lambda$ 为比例因子。显然,可通过计算 $[X_w, Y_w, 1, X_w^2, Y_w^2, X_w Y_w]^T$ 与 $[u, v, 1]^T$ 之间的多组单应变换矩阵 $\mathbf{H}$ 来求解线阵相机内外参数初始值(具体过程可参见文献[46-47])。然后通过 Levenberg-Marquardt 算法迭代优化所有参数。

Draréni 标定方法能在像面上直接获得 2D 图像数据,使得后续特征点像素坐标的提取非常方便,并且无需制作精密的靶标,仅利用传统的 2D 平面靶标(如棋盘格、圆阵列等)即可产生大量的特征点,标定精度得到大幅度提高。但是需要指出的是,线阵相机运动方向要严格垂直于像元阵列方向,标定过程中没有考虑镜头畸变造成的影响。

### 6.2 Donné 标定方法

在 Draréni 标定方法中,当采用的 2D 平面靶标

接近平行于像平面或  $O_c-X_cY_c$  平面时, $r_{31}, r_{32}$  接近于 0,此时单应变换矩阵  $\mathbf{H}$  中  $h_{31}, h_{32}$  接近于 0,内参数在求解过程中会出现退化情况。Donné 等<sup>[48]</sup>对 Draréni 标定方法进行了改进,将单应变换矩阵  $\mathbf{H}$  除以  $h_{33}$  ( $\mathbf{H}$  的第三行第三列元素,即  $\lambda t_z$ ),解决了 2D 平面靶标接近平行于像平面时出现的退化问题,同时也使得相机标定的精度得到提高。

### 6.3 Hui 标定方法

鉴于 Draréni 标定方法中线阵相机运动方向的特殊性,Hui 等<sup>[49-51]</sup>提出了新的动态扫描成像标定算法,线阵传感器不再需要沿特定的坐标轴运动,而是可以沿任意方向匀速直线运动。他们将相机坐标系的三个运动参数( $T_x, T_y, T_z$ )添加到线阵相机的成像模型[(7)式]中,构造了新的动态扫描成像几何模型:

$$\begin{cases} u = f_x \frac{r_{11}(X_w - vT_x) + r_{12}(Y_w - vT_y) + r_{13}(Z_w - vT_z) + t_x}{r_{31}(X_w - vT_x) + r_{32}(Y_w - vT_y) + r_{33}(Z_w - vT_z) + t_z} + u_0 \\ 0 = r_{21}(X_w - vT_x) + r_{22}(Y_w - vT_y) + r_{23}(Z_w - vT_z) + t_y \end{cases} \quad (31)$$

Hui 标定方法<sup>[49]</sup>使用图 10(a)所示的 3D 标定物(图中含有 3 个平面靶标,所有角点的 3D 世界坐标均已知),并考虑了镜头畸变[(16)式]造成的影响,利用直接线性变换求解动态扫描成像几何模型[(31)式]的简化情况(认为线阵相机沿着  $Y_c$  轴保持匀速运动,即 Draréni 和 Donné 标定方法的动态扫描成像几何模型),得到近似的相机参数,作为

Gauss-Newton 非线性优化算法的初值进行迭代优化所有参数。

Hui 标定方法<sup>[50]</sup>采用图 10(b)所示的 3D 标定物[相对于图 10(a)减少了 1 个平面靶标],利用直接线性变换求解动态扫描成像几何模型(31)式中包括三个运动参数在内的 11 个参数(具体过程可参见文献[50]),将其作为非线性优化方法的初值。

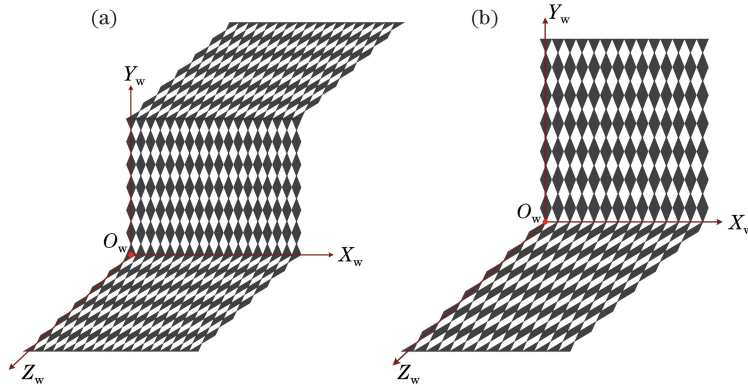


图 10 Hui 标定方法的标定物。(a)文献[49]中的标定物;(b)文献[50]中的标定物

Fig. 10 Calibration object of Hui's calibration method. (a) Calibration object of method in Ref. [49]; (b) calibration object of method in Ref. [50]

与 Hui 标定方法<sup>[49-50]</sup>中相机做匀速运动不同的是,Hui 标定方法<sup>[51]</sup>中是 2D 平面靶标(棋盘格)做匀速运动,使用辅助的面阵相机拍摄棋盘格,获取  $j$  次运动的变换矩阵  $\mathbf{R}'_j$  和  $\mathbf{T}'_j$ ,利用  $\mathbf{R}'_j$  和  $\mathbf{T}'_j$  可将  $j$

次获得的多个特征点的 3D 坐标统一到一个世界坐标系,然后采用与文献[49-50]类似的方法进行参数求解。

Hui 标定方法<sup>[49-51]</sup>解除了 Draréni 标定方法中

线阵相机运动方向要严格垂直于像元阵列方向的限制,使得线阵相机的运动更加灵活,但是建立的动态扫描成像几何模型较为复杂,标定过程算法复杂性有所提高。

## 7 两类标定方法性能比较

为了更好地对前述的线阵相机标定方法进行说明,本文对不同标定方法的性能进行了总结,如表 1 所示,从标定物维数、相机与标定物是否运动、是否需要辅助的设备、算法复杂性以及  $u'$  重投影的方均根误差(RMSE)等五个方面进行了比较。N.A.表示文献中无此数据。

对表 1 中的标定方法进行以下讨论:

1) 从标定物维数来看,若采用 2D 标定物,静态成像标定方法需要移动相机或标定物以获取多个视角下的图像;动态扫描成像方法在标定过程中则需借助辅助设备匀速移动相机或标定物,不同视角的成像则需要改变相机或标定物的相对位置关系。若

采用 3D 标定物,静态成像标定方法无需移动相机或标定物;动态扫描成像方法需要匀速移动相机以获得 2D 图像。总体来看,3D 标定物制作比 2D 标定物困难,但使用起来则有可能降低标定过程的复杂性。

2) 从算法复杂性来看:总体上讲,动态扫描成像标定方法的复杂性要比静态成像方法的高,这是因为前者处理的是 2D 图像数据。但较高复杂性的算法往往可以换取较低的方均根误差。

3) 关于镜头畸变,在高精度标定中需要考虑镜头畸变,一般不考虑三阶以上畸变。

4) 在实际应用中,若需要较高的标定精度,如果标定环境允许安装辅助的面阵相机和运动装置,则可以采用动态扫描成像方法<sup>[48,51]</sup>,也可以采用静态成像方法<sup>[36]</sup>。反之,如果无法安装辅助的面阵相机或运动装置,则只能采用 3D 标定物的方法<sup>[33-34,45]</sup>,若需要提高标定精度,可增加特征点的数量以及考虑镜头的非线性畸变的影响。

表 1 不同标定方法的性能比较

Table 1 Comparison of performances of different calibration methods

Method	Dimension of calibration object	Move camera or calibration object	Auxiliary equipment	Complexity of algorithm	RMSE* of $u'$ / pixel
Horaud <sup>[31-32]</sup>	2D	Calibration object	Stage	Low	N.A.
Luna <sup>[33]</sup>	3D	No	No	Medium	N.A.
Li <sup>[34]</sup>	3D	No	No	Medium	0.547
Li <sup>[35]</sup>	2D	Calibration object	Camera	Medium	0.348
Sun <sup>[36-37]</sup>	2D	Calibration object	Camera	High	0.100
Sun <sup>[38]</sup>	2D	Calibration object	Tracker	High	0.120/0.080**
Lilienblum <sup>[39-40]</sup>	3D	No	No	Medium	N.A.
Song <sup>[41]</sup>	3D	No	No	Medium	0.223
Yao <sup>[42]</sup>	2D	Camera	No	High	0.460
Niu <sup>[43]</sup>	3D	No	No	Medium	0.160
Su <sup>[44]</sup>	3D	No	No	Medium	0.3772
Liao <sup>[45]</sup>	3D	No	No	Medium	0.120
Draréni <sup>[46-47]</sup>	2D	Both	Stage	High	N.A.
Donné <sup>[48]</sup> ***	2D	Both	Stage	High	N.A.
Hui <sup>[49]</sup>	3D	Camera	Stage	High	0.180
Hui <sup>[50]</sup>	3D	Camera	Stage	High	0.310
Hui <sup>[51]</sup>	2D	Both	Camera	High	0.170

Note: \* These data are from the corresponding papers;

\*\* These two data are RMSE of the two line-scan cameras, respectively;

\*\*\* The author provides the source codes, please refer to <https://telin.ugent.be/~sdonn/code/lincams.zip> for details.

5) 目前,标定方法通常需要 2D 标定物配合辅助设备或者 3D 标定物来实现,未来可以研究开发借助 2D 标定物自身运动约束条件来去除辅助设备的线阵相机标定方法,也可以研究利用深度学习来实现更高精度的标定方法。

## 8 结 论

本文给出了适合线阵相机的成像模型、镜头畸变模型,总结了线阵相机标定的一般流程,分析研究了近些年来文献中出现的主要标定方法,并对其特点进行了一些简要评价。总体而言,动态扫描成像方法和静态成像方法各有优缺点,前者需借助精密位移平台使相机与标定物之间保持匀速运动,因此标定环境受限,但像素点坐标提取方便且标定精度较高;后者虽操作容易,但标定物制作精度要求较高,且像素点坐标提取误差偏大。

### 参 考 文 献

- [1] Watanabe Y, Maeno S, Aoshima K, et al. Real-time processing for full-range Fourier-domain optical-coherence tomography with zero-filling interpolation using multiple graphic processing units[J]. *Applied Optics*, 2010, 49(25): 4756-4762.
- [2] Liu C G, Knitter S, Cong Z L, et al. High-speed line-field confocal holographic microscope for quantitative phase imaging [J]. *Optics Express*, 2016, 24(9): 9251-9265.
- [3] Gupta R, Hartley R I. Linear pushbroom cameras [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1997, 19(9): 963-975.
- [4] Zhu Z S, Yuan Y, Li Y, et al. High precision matching and 3D surface reconstruction of Chang'E 1 lunar images[J]. *Acta Optica Sinica*, 2014, 34(2): 0211002.  
朱遵尚, 苑云, 李由, 等. 嫦娥一号月面成像的高精度匹配及月貌三维重建 [J]. *光学学报*, 2014, 34(2): 0211002.
- [5] Ma W H, Dong T, Tian H, et al. Line-scan CCD camera calibration in 2D coordinate measurement[J]. *Optik*, 2014, 125(17): 4795-4798.
- [6] Wu P, Wang Y J, Sun H H, et al. Calibration method for linear array camera of intersection measurement system[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2016, 45(6): 0612003.  
吴培, 王延杰, 孙宏海, 等. 交汇测量系统线阵相机标定方法[J]. *光子学报*, 2016, 45(6): 0612003.
- [7] Yun J P, Jeon Y J, Choi D, et al. Real-time defect detection of steel wire rods using wavelet filters optimized by univariate dynamic encoding algorithm for searches [J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2012, 29(5): 797-807.
- [8] Zhang F, Shan Z D, Ren Y X, et al. Calibration of line array camera for head defect detection system on cylinder cover[J]. *Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition)*, 2017, 47(2): 540-545.  
张飞, 单忠德, 任永新, 等. 缸盖缺陷检测系统线阵相机现场标定方法 [J]. *吉林大学学报(工学版)*, 2017, 47(2): 540-545.
- [9] Zhao Z Y. Line scan camera calibration for fabric imaging [D]. USA: The University of Texas at Austin, 2012: 19-52.
- [10] Wendel A. Hyperspectral imaging from ground based mobile platforms and applications in precision agriculture[D]. Sydney: The University of Sydney, 2018: 45-47, 69-97.
- [11] Hu Z Y, Wu F C. A review on some active vision based camera calibration techniques [J]. *Chinese Journal of Computers*, 2002, 25(11): 1149-1156.  
胡占义, 吴福朝. 基于主动视觉摄像机标定方法 [J]. *计算机学报*, 2002, 25(11): 1149-1156.
- [12] Salvi J, Armangué X, Batlle J. A comparative review of camera calibrating methods with accuracy evaluation[J]. *Pattern Recognition*, 2002, 35(7): 1617-1635.
- [13] Zhang Z Y. Camera calibration [M] // Medioni G, Kang S B. *Emerging topics in computer vision*. USA: Prentice Hall PTR Upper Saddle River, 2004: 5-43.
- [14] Zhang Z Y. A flexible new technique for camera calibration[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2000, 22(11): 1330-1334.
- [15] Adbel-Aziz Y I. Direct linear transformation from comparator coordinates into object space coordinates in close-range photogrammetry [C] // *Proceedings of the Symposium on Close-Range Photogrammetry (American Society of Photogrammetry)*, January 26-29, 1971, Urbana, USA. Falls Church: American Society of Photogrammetry, 1971: 1-18.
- [16] Abdel-Aziz Y I, Karara H M, Hauck M. Direct linear transformation from comparator coordinates into object space coordinates in close-range photogrammetry [J]. *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*, 2015, 81(2): 103-107.
- [17] Faig W. Calibration of close-range photogrammetric systems: mathematical formulation [J]. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 1975, 41(12): 1479-1486.

- [18] Tsai R. A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3D machine vision metrology using off-the-shelf TV cameras and lenses[J]. *IEEE Journal on Robotics and Automation*, 1987, 3(4): 323-344.
- [19] Maybank S J, Faugeras O D. A theory of self-calibration of a moving camera [J]. *International Journal of Computer Vision*, 1992, 8(2): 123-151.
- [20] Luong Q T, Faugeras O D. Self-calibration of a moving camera from point correspondences and fundamental matrices [J]. *International Journal of Computer Vision*, 1997, 22(3): 261-289.
- [21] Pollefeys M, Koch R, van Gool L. Self-calibration and metric reconstruction in spite of varying and unknown internal camera parameters[C]//Sixth International Conference on Computer Vision (IEEE Cat. No. 98CH36271), January 7-7, 1998, Bombay, India. New York: IEEE, 1998: 90-95.
- [22] Guan B L, Shang Y, Yu Q F. Planar self-calibration for stereo cameras with radial distortion[J]. *Applied Optics*, 2017, 56(33): 9257-9267.
- [23] de Ma S. A self-calibration technique for active vision systems [J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1996, 12(1): 114-120.
- [24] Wan X, Xu G Y. Camera parameters estimation and evaluation in active vision system[J]. *Pattern Recognition*, 1996, 29(3): 439-447.
- [25] Heikkilä J, Silvén O. A four-step camera calibration procedure with implicit image correction[C]//Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), June 17-19, 1997, San Juan, Puerto Rico, USA. New York: IEEE, 1997: 1106-1112.
- [26] Bouguet J Y. Camera calibration toolbox for Matlab [EB/OL]. (2015-10-14) [2019-08-01]. [http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib\\_doc/index.html](http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib_doc/index.html).
- [27] OpenCV. Camera calibration with OpenCV[EB/OL]. [2019-08-01]. [https://docs.opencv.org/2.4/doc/tutorials/calib3d/camera\\_calibration/camera\\_calibration.html](https://docs.opencv.org/2.4/doc/tutorials/calib3d/camera_calibration/camera_calibration.html).
- [28] MVTec Software GmbH. 3D calibration[EB/OL]. [2019-08-01]. <https://www.mvtec.com/services-solutions/technologies/3d-vision/3d-calibration/>.
- [29] MathWorks. Computer vision toolbox [EB/OL]. [2019-08-01]. <https://ww2.mathworks.cn/help/vision/index.html>.
- [30] Wang L, Sun B, Long C Y, et al. A novel method for calibrating intrinsic parameters of linear array cameras based on collinear feature points[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2015, 44(6): 1878-1883. 王澜, 孙博, 隆昌宇, 等. 一种基于共线特征点的线阵相机内参标定方法[J]. *红外与激光工程*, 2015, 44(6): 1878-1883.
- [31] Horaud R, Mohr R, Lorecki B. Linear-camera calibration[C]//Proceedings 1992 IEEE International Conference on Robotics and Automation, May 12-14, 1992, Nice, France. New York: IEEE, 1992: 1539-1544.
- [32] Horaud R, Mohr R, Lorecki B. On single-scanline camera calibration [J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1993, 9(1): 71-75.
- [33] Luna C A, Mazo M, Lázaro J L, et al. Calibration of line-scan cameras[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2009, 59(8): 2185-2190.
- [34] Li D D, Wen G J, Hui B W, et al. Cross-ratio invariant based line scan camera geometric calibration with static linear data [J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2014, 62: 119-125.
- [35] Li D D, Wen G J, Qiu S H. Cross-ratio-based line scan camera calibration using a planar pattern [J]. *Optical Engineering*, 2016, 55(1): 014104.
- [36] Sun B, Zhu J G, Yang L H, et al. Calibration of line-scan cameras for precision measurement[J]. *Applied Optics*, 2016, 55(25): 6836-6843.
- [37] Sun B, Zhu J G, Yang L H, et al. Sensor for in-motion continuous 3D shape measurement based on dual line-scan cameras[J]. *Sensors*, 2016, 16(11): 1949.
- [38] Sun B, Zhu J G, Yang L H, et al. Stereo line-scan sensor calibration for 3D shape measurement [J]. *Applied Optics*, 2017, 56(28): 7905-7914.
- [39] Lilienblum E, Al-Hamadi A, Michaelis B. A coded 3D calibration method for line-scan cameras [M] // Weickert J, Hein M, Schiele B. *Pattern recognition. Lecture notes in computer science*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013, 8142: 81-90.
- [40] Lilienblum E, Handrich S, Al-Hamadi A. Low cost calibration of stereo line scan camera systems [C] // 2017 Fifteenth IAPR International Conference on Machine Vision Applications (MVA), May 8-12, 2017, Nagoya, Japan. New York: IEEE, 2017: 322-325.
- [41] Song K C, Hou B, Niu M H, et al. Flexible line-scan camera calibration method using a coded eight trigrams pattern[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2018, 110: 296-307.
- [42] Yao M, Zhao Z Y, Xu B G. Geometric calibration of line-scan camera using a planar pattern[J]. *Journal of Electronic Imaging*, 2014, 23(1): 013028.
- [43] Niu M H, Song K C, Wen X, et al. The line scan camera calibration based on space rings group [J].

- IEEE Access, 2018, 6: 23711-23721.
- [44] Su D, Bender A, Sukkarieh S. Improved cross-ratio invariant-based intrinsic calibration of a hyperspectral line-scan camera[J]. *Sensors*, 2018, 18(6): 1885.
- [45] Liao R Y, Zhu J G, Yang L H, et al. Flexible calibration method for line-scan cameras using a stereo target with hollow stripes [J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2019, 113: 6-13.
- [46] Draréni J, Roy S, Sturm P. Plane-based calibration for linear cameras [J]. *International Journal of Computer Vision*, 2011, 91(2): 146-156.
- [47] Draréni J. Exploitation de contraintes photométriques et géométriques en vision: application au suivi, au calibrage et à la reconstruction [D]. Montréal: Université de Montréal, 2010: 47-72.
- [48] Donné S, Luong H, Dhondt S, et al. Robust plane-based calibration for linear cameras[C] // 2017 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP), September 17-20, 2017, Beijing, China. New York: IEEE, 2017: 36-40.
- [49] Hui B W, Wen G J, Zhao Z X, et al. Line-scan camera calibration in close-range photogrammetry[J]. *Optical Engineering*, 2012, 51(5): 053602.
- [50] Hui B W, Zhong J R, Wen G J, et al. Determination of line scan camera parameters via the direct linear transformation[J]. *Optical Engineering*, 2012, 51(11): 113201.
- [51] Hui B W, Wen G J, Zhang P, et al. A novel line scan camera calibration technique with an auxiliary frame camera[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2013, 62(9): 2567-2575.
- [52] Zhuang H, Horaud R. A note on "on single-scanline camera calibration" [and reply] [J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1995, 11(3): 470-471.
- [53] Faugeras O D, Toscani G. The calibration problem for stereo[C] // Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), June 22-26, 1986, Miami Beach, USA. New York: IEEE, 1986: 15-20.
- [54] Weng J, Cohen P, Herniou M. Calibration of stereo cameras using a non-linear distortion model (CCD sensory)[C] // [1990] Proceedings. 10th International Conference on Pattern Recognition, June 16-21, 1990, Atlantic City, NJ, USA. New York: IEEE, 1990: 246-253.
- [55] Weng J, Cohen P, Herniou M. Camera calibration with distortion models and accuracy evaluation [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence*, 1992, 14(10): 965-980.
- [56] Wang J H, Shi F H, Zhang J, et al. A new calibration model of camera lens distortion[J]. *Pattern Recognition*, 2008, 41(2): 607-615.
- [57] Brown D C. Close-range camera calibration [J]. *Photogrammetric Engineering*, 1971, 37(8): 855-866.
- [58] Brown D C. Decentering distortion of lenses[J]. *Photogrammetric Engineering*, 1966, 32(3): 444-462.
- [59] Fang S P, Xia X H, Xiao Y, et al. Lens distortion calibration method for linear array cameras[J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2013, 47(1): 11-14.  
方素平, 夏晓华, 肖燕, 等. 一种线阵相机镜头畸变的标定方法[J]. *西安交通大学学报*, 2013, 47(1): 11-14.
- [60] Fang S P, Xia X H, Xiao Y. A calibration method of lens distortion for line scan cameras [J]. *Optik*, 2013, 124(24): 6749-6751.
- [61] Sun B, Zhu J G, Ren Y, et al. A novel method for calibrating linear array cameras based on laser-tracker [J]. *Journal of Optoelectronics • Laser*, 2014, 25(2): 311-316.  
孙博, 郝继贵, 任瑜, 等. 一种利用激光跟踪仪标定线阵相机的方法[J]. *光电子 • 激光*, 2014, 25(2): 311-316.
- [62] Zhan D, Jing D Y, Wu M L, et al. An accurate and efficient vision measurement approach for railway catenary geometry parameters[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2018, 67(12): 2841-2853.
- [63] Ait-Aider O, Berry F. A flexible calibration method for the intrinsic and mechanical parameters of panoramic line-scan cameras [J]. *Computer Vision and Image Understanding*, 2019, 180: 47-58.