

· 特邀综述 ·

鬼成像中一些数学问题

王健^{1*}, 童智申^{2,3**}, 胡晨昱^{2,3***}, 徐萌初^{1****}, 黄增峰¹

¹复旦大学大数据学院, 上海 200433;

²中国科学院上海光学精密机械研究所量子光学重点实验室, 上海 201800;

³中国科学院大学材料与光电研究中心, 北京 100049

摘要 鬼成像是一种与传统成像方式不同的通过光场涨落的高阶关联获得图像信息的新型成像方式。近年来, 相比传统成像方式, 鬼成像所拥有的一些优点如高灵敏度、超分辨能力、抗散射等, 使其在遥感、多光谱成像、热 X 射线衍射成像等领域得到广泛研究。随着对鬼成像的广泛研究, 数学理论和方法在其中发挥的作用愈显突出。例如, 基于压缩感知理论, 可以进行鬼成像系统采样方式优化、图像重构算法设计及图像重构质量分析等研究工作。本文旨在探索鬼成像中的一些有趣的数学问题, 主要包括: 系统预处理方法、光场优化及相位恢复问题。对这些问题的研究既可以丰富鬼成像理论, 又能推动它在实际应用中的发展。

关键词 成像系统; 鬼成像; 预处理方法; 光场优化; 相位恢复

中图分类号 O436

文献标志码 A

doi: 10.3788/AOS202040.0111007

Some Mathematical Problems in Ghost Imaging

Wang Jian^{1*}, Tong Zhishen^{2,3**}, Hu Chenyu^{2,3***}, Xu Mengchu^{1****}, Huang Zengfeng¹

¹School of Data Science, Fudan University, Shanghai 200433, China;

²Key Laboratory for Quantum Optics, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics,
Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800, China;

³Center of Materials Science and Optoelectronics Engineering,
University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

Abstract Ghost imaging (GI) is a novel imaging technique which is different from conventional imaging techniques, which extracts image information via high-order correlation of light-field fluctuations. In recent years, compared with conventional imaging techniques, GI has some advantages such as high sensitivity, super-resolution ability and anti-scattering, which make it widely studied in remote sensing, multi-spectral imaging, thermal X-ray diffraction imaging, and other fields. With these developments, mathematical theory and methods play a more prominent role in GI. For example, based on compressed sensing (CS) theory, we can optimize the sampling mode of GI system, design the algorithm of image reconstruction and analyze the quality of image reconstruction. In this paper, we discuss a few interesting mathematical problems in GI, including preconditioning, optimization of light fields, and phase retrieval. Studying these problems can be useful for enriching the theory of GI and promoting its practical applications.

Key words imaging systems; ghost imaging; preconditioning; optimization of light fields; phase retrieval

OCIS codes 110.1758; 100.3008; 100.5070; 120.6150

1 引 言

1905 年, Einstein 等引入光子的概念, 之后光波的统计描述便成为了表征光源波动的不可缺少的部

分。在此之后, Wolf 等^[1-4] 和 Glauber^[5-6] 分别建立了经典光学相干理论和量子光学相干理论, 以解释光场的统计特性。从光学相干理论的角度来看, 传统的成像方法是基于光场的一阶相关性, 而从光场

收稿日期: 2019-09-24; 修回日期: 2019-10-23; 录用日期: 2019-11-06

基金项目: 国家自然科学基金(61971146)

* E-mail: jian_wang@fudan.edu.cn; ** E-mail: tongzhishen@siom.ac.cn; *** E-mail: huchenyu@siom.ac.cn;

**** E-mail: mcxu19@fudan.edu.cn

的高阶相关性中提取物体空间信息的尝试可以追溯到著名的 Hanbury Brown-Twiss(HBT)实验,这是 Brown 等^[7-8]于 1956 年基于光场的二阶强度自相关进行的实验。1995 年,Shih 的小组^[9]首次展示了一种新的成像模式,称之为鬼成像(GI)。这种成像方式通过将探测臂的单像素/桶式光电探测器的输出与参考臂的高空间分辨率探测器的信号相关联,得到物体的图像信息。其中,探测臂的桶探测器收集透过物体或从物体反射的光,而照射在参考臂的空间分辨探测器上的光则没有与物体相互作用。在过去的几十年中,鬼成像的物理原理已得到了充分的讨论^[10-15]。理论和实验表明,量子双光子干涉和经典的强度涨落关联都可用于鬼成像。

源于近年来盛行的压缩感知(CS)理论^[16-20],鬼成像已被广泛应用于 3D 雷达成像^[21]、单次曝光高光谱成像^[22]以及 X 光衍射成像^[10]等场景。从信息论角度看,鬼成像利用光场强度的随机涨落对目标进行随机编码,在重构过程中,利用光场高阶互关联实现对目标信号的解码。在信号探测、编码和解码的过程中,鬼成像包含了许多有趣的数学问题。本文将重点阐述其中三个问题。第一、在图像复原过程中,重构矩阵的性质与图像复原精度有密切的关联。当成像系统在物理上确定后,系统测量矩阵也就确定了。那么,如何进一步提升图像重建质量成为一个重要问题。在数值线性代数中,有一种系统预处理的方法。它将成像系统乘以预设计的矩阵,再利用所得到的新系统进行图像恢复,提升了图像复原精度。第二、鬼成像在采样过程中是一种编码过程。因此,研究者们往往会面临系统优化问题。如何对光场进行优化实现对目标最有效调制也成为了一个重要问题。在压缩感知理论中,也是从重构矩阵的性质出发,提出利用矩阵的互相干度最优进行系统测量矩阵的优化。第三、在鬼成像的应用中,包括傅里叶变换鬼成像和基于散斑自相关鬼成像,均需借助于相位恢复算法,从物体的功率谱中获取物体图像信息。然而,现有的相位恢复算法往往无法有效地利用待恢复物体图像的稀疏特性,因而存在复杂度较高、重构精度低等问题。因此,通过发掘物体图像的稀疏特性,设计高效的相位恢复算法便成为一个亟待解决的科学问题。

本文主要针对上述的几个问题,回顾并讨论了最近的相关研究进展。介绍了用于鬼成像的预处理

方法,叙述了鬼成像中光场优化问题及方法,阐述了相位恢复问题并简介了一种新的相位恢复算法,最后对全文进行总结并对一些仍待研究的数学问题进行展望。

2 系统预处理方法在鬼成像中的应用

2.1 系统预处理方法和重构算法的介绍

源于近年来盛行的压缩感知理论和方法^[16-20],基于稀疏约束的鬼成像技术(GISC)^[23]可以在远低于奈奎斯特采样定理要求的采样数下,实现对图像信号的重构^[24],其在超分辨成像^[25]、三维计算成像^[26]和 X 光衍射成像^[10]等领域有着广泛的应用。基于稀疏约束的鬼成像模型为

$$\min_x \|\mathbf{x}\|_0, \text{ s.t. } \mathbf{y}_0 = \Phi \mathbf{x}, \quad (1)$$

式中: $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{R}^M$, 对应物臂上桶探测器的测量信号; $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$, 是待重构的物体; $\Phi \in \mathbf{R}^{M \times N}$, 对应参考臂上记录或预制的调制信号; $\|\cdot\|_0$ 表示 L0 范数。

在图像反演过程中,图像重构质量依赖于采样矩阵 Φ 的性质,采样矩阵的互相干度越低,图像的重构效果越好。将采样矩阵 Φ 的互相干度定义为

$$\mu(\Phi) = \max_{1 \leq i < j \leq N} \frac{|\langle \boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_j \rangle|}{\|\boldsymbol{\varphi}_i\|_2 \|\boldsymbol{\varphi}_j\|_2}, \quad (2)$$

式中: $\|\cdot\|_2$ 表示 L2 范数; $\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_j$ 分别表示矩阵 Φ 的第 i, j 列。

成像装置在给定设计后,对应的采样矩阵 Φ 就确定了,其互相干度无法改变。在这种情况下,为提升图像的重构质量,本文提出一种预处理的方法,在采样信号 \mathbf{y}_0 上乘以预设的矩阵 \mathbf{P} ,则(1)式变换为

$$\min_x \|\mathbf{x}\|_0, \text{ s.t. } \mathbf{P}\mathbf{y}_0 = \mathbf{P}\Phi \mathbf{x}. \quad (3)$$

根据给定的采样矩阵 Φ ,优化矩阵 \mathbf{P} 使得矩阵的互相干度降低,进而提升图像重构质量。在数值线性代数中,这种通过测量信号 \mathbf{y}_0 乘以预设矩阵来改善信号重构效果的方法称为预处理方法^[27]。近年来,在压缩感知领域中,预处理方法被广泛研究。Elad^[28]提出通过收缩 $\mathbf{P}\Phi$ 的格拉姆矩阵的非对角元素来改善其平均互相干度;Duarte-Carvajalino 等^[29]提出优化矩阵使 $\mathbf{P}\Phi$ 的格拉姆矩阵接近单位阵;Tsiligianni 等^[30]提出构造矩阵 $\mathbf{P}\Phi$ 使得其接近单位紧框架。这些方法在信号重建过程中都能改善信号重构质量。然而这些方法都是迭代的方法,计算复杂度较高,同时难以理论分析其效果。

本文提出一种有效的预处理方法来改善采样矩

阵的互相干度,即

$$\mathbf{P} = \Phi^T (\Phi \Phi^T)^{-1}. \quad (4)$$

该优化矩阵 \mathbf{P} 是问题 $\min_{\mathbf{P}} \|\mathbf{P}\Phi - \mathbf{I}\|_F$ 的闭合解,同时 $\mathbf{P}\Phi$ 被证明为一紧框架。在信号重构过程中,压缩感知算法可分为两类:基于优化类的方法和基于贪婪搜索类的方法。基于贪婪搜索类的方法由于计算复杂度低,同时具备良好的效果而被广泛研究。作为贪婪算法的代表,多重正交最小二乘(mOLS)法^[31]在每次迭代过程中选中 $s (\geq 1)$ 个最相关的索引,因此对于 K -稀疏的信号,其收敛迭代次数小于 K 次迭代,能够提升计算效率。

结合上述预处理方法和多重正交最小二乘重构算法,提出一种预处理的多重正交最小二乘(PmOLS)方法来解决 GISC 的成像问题。

2.2 理论保障

理论分析上述预处理方法,优化后的矩阵 $\mathbf{P}\Phi$ 存在一个上界,满足如下定理。

定理 1:测量矩阵 $\Phi \in \mathbf{R}^{M \times N}$ 是一个随机高斯矩阵,其中 M 为测量次数, N 为信号长度,每个元素服从高斯分布,即 $\varphi_{mn} \stackrel{i.i.d.}{\sim} (0, 1/M)$,优化矩阵 \mathbf{P} 为 $\mathbf{P} = \Phi^T (\Phi \Phi^T)^{-1}$,优化后矩阵 $\mathbf{P}\Phi$ 的互相干度 $\mu(\mathbf{P}\Phi)$ 小于任意常数 $\eta \in (0, 1)$ 的概率大于 $1 - 3N^2 \exp(-M\eta^2/72)$ 。

理论分析 PmOLS 算法,该算法能以一定概率进行精确重构,满足如下定理。

定理 2:考虑 PmOLS 算法每次选取 s 个最有可能的索引,当测量矩阵 $\Phi \in \mathbf{R}^{M \times N}$ 是一个随机高斯矩阵,每个元素服从高斯分布,在优化矩阵 \mathbf{P} 为 $\mathbf{P} = \Phi^T (\Phi \Phi^T)^{-1}$ 时,PmOLS 算法从采样信号中精确恢复任何 K -稀疏向量的概率超过 $1 - 3N^2 \exp\{-M/[72(2sK - 2s + 1)^2]\}$ 。

定理 2 意味着 PmOLS 算法能从 M 次高斯随机线性测量中完美复原任何 N 维 K 稀疏信号的概率超过 $1 - 3N^2 \exp(-cM/K^2)$,其中 c 为常数。因此,当测量次数满足 $M \geq cK^2 \log(N/\epsilon)$,信号成功复原的概率大于 $1 - \epsilon$,其中 ϵ 为表征重构概率的参数。具体理论推导可参照文献[32]。

2.3 仿真和实验结果

为测试上述预处理方法的有效性和 PmOLS 算法的性能,本文进行了两个仿真实验:1)检测预处理方法降低采样矩阵互相干度的性能;2)检测 PmOLS 算法恢复信号的性能。

在检测预处理方法性能上,进行了 500 次独立

的实验。每次实验中采用高斯随机采样矩阵 $\Phi \in \mathbf{R}^{M \times N}$,固定 $N=256$,采样率 M/N 从 0.05 变化到 1。对于每一个采样率,重复 500 次实验,计算每次实验中采样矩阵 Φ 和优化后矩阵 $\mathbf{P}\Phi$ 的互相干度,然后对 500 次的结果求平均。从图 1 中明显看到,优化后矩阵 $\mathbf{P}\Phi$ 的互相干度低于原始采样矩阵 Φ ,这论证了预处理方法的有效性。在检测 PmOLS 算法恢复信号的能力上,采用维度为 128×256 的高斯随机采样矩阵 Φ ,信号 \mathbf{x} 为高斯随机信号。采用正交匹配追踪(OMP)算法^[33]、基追踪(BP)算法^[16]、mOLS 法^[31],Tsiligianni 等提出的预处理方法和正交匹配追踪(PreOMP)算法^[30]与 PmOLS 算法进行了对比实验分析。从图 2 可以看出 PmOLS 算法回复信号的性能最好。

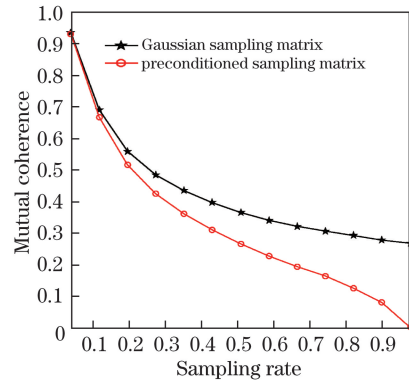


图 1 矩阵互相干度与采样率的关系曲线

Fig. 1 Mutual coherence as a function of sampling rate

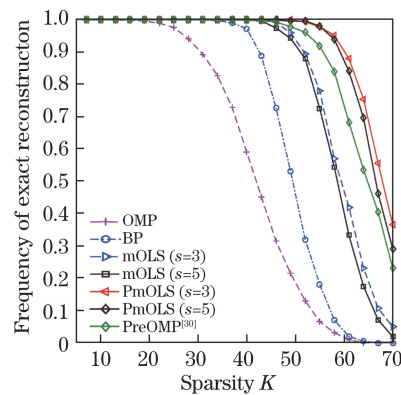


图 2 稀疏信号被精确重构的频率与稀疏度 K 的关系

Fig. 2 Frequency of exact recovery of sparse signals as a function of K

将 PmOLS 算法用于解决 GISC 成像中的图像恢复问题。典型的基于数字微镜器件(DMD)的鬼成像装置如图 3 所示,波长为 532 nm 的 LED 光源发出的光束经过柯勒照明系统均匀地照射在 DMD 上,被 DMD 预制的花样所调制。被调制的

光束经过透镜 1 投射到物体表面上,然后反射,经过透镜 2 被桶探测器收集。在实验中,将数字目标和太极图目标用于测试,目标大小为 28 pixel×28 pixel。导入到 DMD 上的随机花样的强度值呈高斯分布。为了对比不同算法的性能,这里采用经典鬼成像算法^[10],微分鬼成像(DGI)算法^[34],伪逆鬼成像(PGI)算法^[35],mOLS 算法^[32],稀疏梯度投影(GPSR)算法^[36],BP 算法^[16]以及 PmOLS 算法进行目标重构,结果如图 4 所示。图 4 最左边标记的是采样数,最右边标记的是原始图像,中间为不同算法重构的图像结果。从图 4 可以看出,对于所测试的目标,PmOLS 算法重构的效果最好。

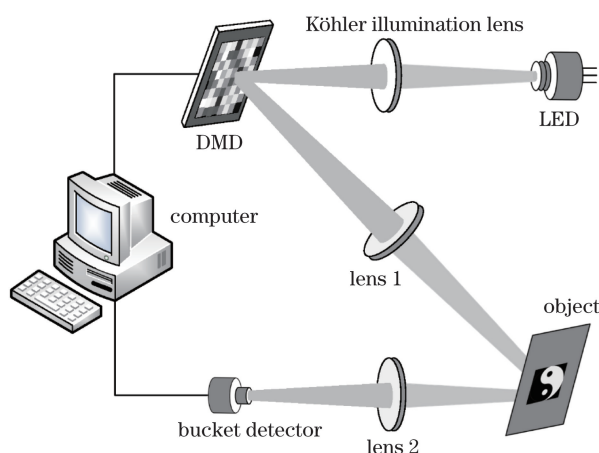


图 3 基于 DMD 的鬼成像技术装置图

Fig. 3 System diagram of GISC based on DMD

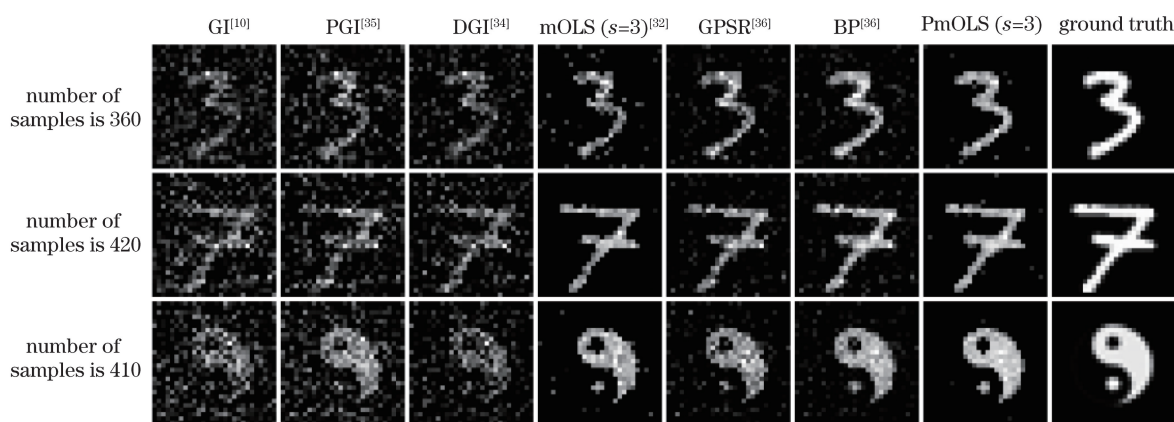


图 4 不同算法的实验结果对比图

Fig. 4 Experimental results for different reconstruction algorithms

3 鬼成像中的系统优化问题

3.1 调制光场优化

压缩感知重构算法的引入极大促进了鬼成像的应用,然而有越来越多的研究表明,鬼成像的重构质量可能受限于采样效率,即从采样中获取目标信息的多少;一般来说,采样效率越高,可以得到的重构图像质量就会越高。提高采样效率可以通过优化鬼成像中的调制光场来实现,具体数学问题如下。

在鬼成像中,光信号探测过程可以近似表示为

$$y = \Phi x + n, \quad (5)$$

式中: $y \in \mathbf{R}^M$ 表示探测器上测得的信号; $\Phi \in \mathbf{R}^{M \times N}$ 为由调制光场强度分布组成的测量矩阵; $x \in \mathbf{R}^N$ 表示待成像目标的信息; $n \in \mathbf{R}^M$ 为探测噪声。因而,调制光场的优化问题,在数学上,就变为测量矩阵 Φ 的优化设计问题,目前已有较多的相关研究工作^[37-40]。Chen 等^[37]将多尺度的调制光场应用到鬼成像中,成像质量明显优于应用单一尺度光场时的

结果。Khamoushi 等^[38]将 Φ 设计为一个离散余弦矩阵,使得在采样次数较少时依然可以重构出不错的图像结果,并可实现目标图像的边缘增强;Xu 等^[39]参考压缩感知理论,基于使正交基与测量矩阵的互相干度最小的准则,优化了调制光场的花样;Hu 等^[40]基于字典学习进行鬼成像系统的光场优化设计,将图像统计先验与光场的设计相结合,大大提升了鬼成像对特定目标的成像质量,下面具体介绍这篇工作。

3.2 基于字典学习的光场优化方法

字典学习方法^[41-42]可以通过训练得到对一类图像进行稀疏表示的过完备表达基,使得图像相比在正交基下能被更稀疏地表示,从而提高图像恢复质量。本课题组借鉴了压缩感知中已有的基于字典学习进行测量矩阵优化的方法^[29,43],提出了针对鬼成像调制光场的优化方案。该优化方法主要分为两步:1)通过对一系列样本图像进行训练,得到能够对这些样本图像同类别的图像进行稀疏表示的过完

备字典;2)基于学习字典以及互相干度最小约束进行测量光场的优化。其中涉及到的具体过程的数学表述如下。

首先,预先给定 L 个像素数为 N 的样本图像数据 $\mathbf{X} = [\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(L)}] \in \mathbf{R}^{N \times L}$, 其中每列是表征一幅样本图像的向量。

$$\min_{\Psi, \mathbf{Z}} \|\mathbf{X} - \Psi\mathbf{Z}\|_{\text{F}}^2, \text{ s.t. } \Psi_{11} = \dots = \Psi_{N1} = N^{-1/2}, \|\mathbf{z}_i\|_0 \leq T_0, i = 1, \dots, L, \quad (6)$$

式中: $\|\cdot\|_{\text{F}}$ 和 $\|\cdot\|_0$ 分别表示 F 范数和 L0 范数; $\mathbf{Z} = [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_L] \in \mathbf{R}^{Q \times L}$ 为训练图像的稀疏系数矩阵; T_0 为算法中预先设定的稀疏向量 \mathbf{z}_i 的稀疏度。用字典学习方法通过求解 (6) 式所示的带约束问题得到过完备字典 $\Psi (\Psi \in \mathbf{R}^{N \times Q}, Q > N)$ 。

然后,通过最小化等效测量矩阵 \mathbf{D} 的互相干度实现测量矩阵 Φ 的优化,最小化问题具体写为

$$\min_{\Phi} \mu(\mathbf{D}), \text{ s.t. } \varphi_{mn} \geq 0, \mathbf{D} = \Phi\Psi. \quad (7)$$

(7) 式中,施加非负约束 $\varphi_{mn} \geq 0$ 的原因是光场强度的非负特性。对于 (7) 式的优化问题,文献[40]采取的方法是将其转化为如下的目标函数:

$$\min_{\Phi} \|\Psi^T \Phi^T \Phi \Psi - \Psi^T \Psi\|_{\text{F}}^2. \quad (8)$$

随后,将 (8) 式转化为

$$\min_{\Phi} \|\Psi\Psi^T \Phi^T \Phi \Psi\Psi^T - \Psi\Psi^T \Psi\Psi^T\|_{\text{F}}^2, \quad (9)$$

接着,将 $\Psi\Psi^T$ 用它的奇异值分解 $\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T$ 代替,并记 $\mathbf{W} := \mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T \Phi^T$, 可以得到如下问题:

$$\min_{\mathbf{W}} \|\mathbf{V}\mathbf{W}\mathbf{W}^T \mathbf{V}^T - \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^2 \mathbf{V}^T\|_{\text{F}}^2, \quad (10)$$

或等价地写为

$$\min_{\mathbf{W}} \|\mathbf{\Lambda}^2 - \sum_{i=1}^M \mathbf{w}_i \mathbf{w}_i^T\|_{\text{F}}^2, \mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_M], \quad (11)$$

式中: \mathbf{w}_i 表示矩阵 \mathbf{W} 的第 i 列元素组成的列向量。

因此,可以得到 (11) 式的一个解析解 $\hat{\mathbf{W}} = \mathbf{\Lambda}_1^T$, 其中 $\mathbf{\Lambda}_1$ 是由 $\mathbf{\Lambda}$ 矩阵的前 M 列组成的矩阵。继而得到优化后的测量矩阵 $\hat{\Phi} = \mathbf{V}_1^T$, 其中 \mathbf{V}_1 是由 \mathbf{V} 的前 M 列组成的矩阵。可以看出,这样优化出的测量矩阵可以被用来进行连续的采样。具体来说,当需要更多的采样时,可以直接将 \mathbf{V}^T 矩阵的更多行添加到测量矩阵 $\hat{\Phi}$ 中,使得之前的采样不会被浪费。

针对 (7) 式中的非负约束,文献[40]中提出通过非负抬升进行解决。非负抬升,即是对优化后的测量矩阵 $\hat{\Phi}$ 加上一个常数 c , 表达式为

$$c := \begin{cases} -\min_{m,n} \hat{\varphi}_{mn}, & \text{if } \min_{m,n} \hat{\varphi}_{mn} < 0 \\ 0, & \text{if } \min_{m,n} \hat{\varphi}_{mn} \geq 0 \end{cases}. \quad (12)$$

那么等效测量矩阵将变为

$$\hat{\mathbf{D}} = (\hat{\Phi} + c \mathbf{1}_{M \times N}) \Psi = \hat{\Phi} \Psi + cn^{-1/2} [\mathbf{1}_{M \times 1}, \underbrace{\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}}_{M \times (Q-1)}]. \quad (13)$$

尽管 $\hat{\mathbf{D}}$ 与 $\hat{\Phi} \Psi$ 在第一列有所不同,但文中的实验结果表明,这样的处理对矩阵 $\hat{\mathbf{D}}$ 的互相干度没有影响。

3.3 仿真结果

将通过这种方法得到的优化光场应用于鬼成像中,并通过仿真和实验,对比它与 Gauss 型随机调制光场对成像效果的影响。此外,仿真中还加入了 Duarte-Carvajalino 等^[29]的方法, Xu 等^[39]的方法和归一化鬼成像 (NGI) 方法,结果对比如图 5 所示。其中,采用峰值信噪比 (PSNR) 和结构相似性指标 (SSIM) 两个指标定量地评价图像质量。可以看出,这种优化调制光场的方法,相比于先前的一些方法,在低采样率下可以得到更高的目标图像重构质量。其主要原因在于,这种方案是针对特定类型的成像目标,通过字典学习的方法获得目标的统计特性并用其进行调制光场的优化设计。这种方法的局限性在于:1) 其受限于当前字典学习方法能处理的图像尺寸大小,2) 对优化得到的测量矩阵的非负处理并不完美,存在着使互相干度恶化的可能。

4 相位恢复问题

4.1 相位恢复

相位恢复 (PR) 问题,即在给定原始信号傅里叶变换(或其他变换)的幅度平方情况下恢复原始信号,其被广泛应用于各种科学和工程领域,包括电子显微镜、晶体学、天文学和光学成像。由于光学检测装置[例如, CCD 相机, 光敏膜, 人眼]不能测量光波的相位,而相位信息包含成像物体的大部分信息,因此简单地忽略相位进行傅里叶逆变换并不会得到良好的重构结果,因此相位恢复便自然成为了研究的重点。在给定观测强度和先验知识(如稀疏度、支撑集位置等先验知识)的条件下,相位恢复提供了一种恢复相位的方法。

但是,从理论和算法的角度来看,相位恢复仍然十分困难,在许多情况下没有唯一解。此外,即使解是唯一的,也不一定能保证可以在算法上找到它。

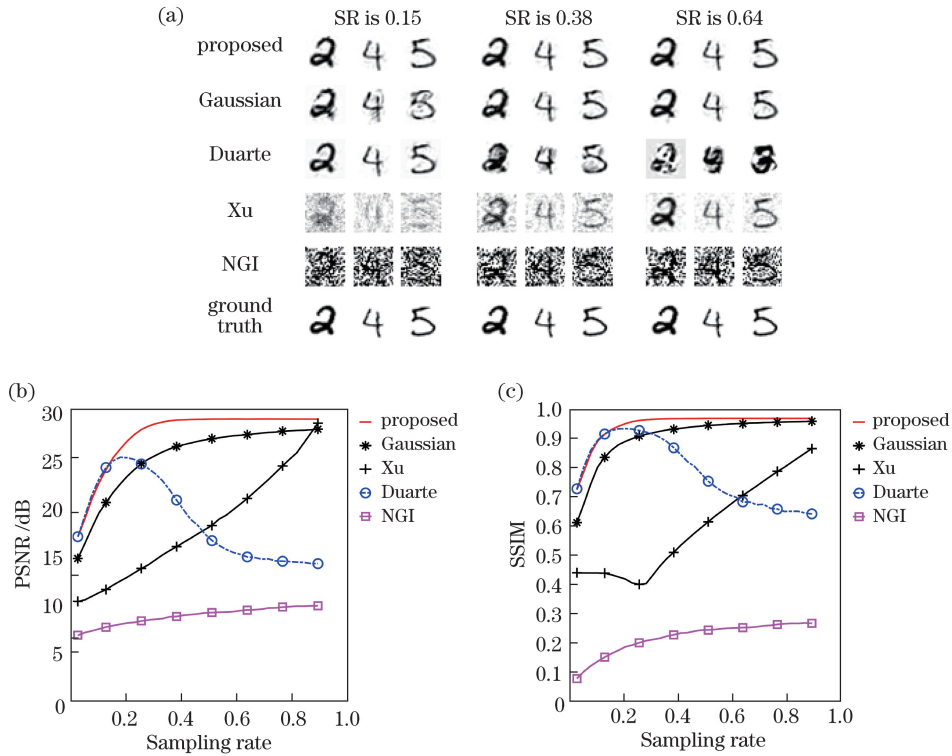


图 5 鬼成像光场优化效果图。(a) 不同测量光场、不同采样率(SR)下的重构图像;(b) 不同测量光场下重构图像的 PSNR 随采样率的变化曲线;(c)不同测量光场下重构图像的 SSIM 随采样率的变化曲线

Fig. 5 Results of light field optimization in GI. (a) Images reconstructed via different light fields under different sampling rates; (b) PSNR of reconstructed images via different light fields as a function of sampling rates; (c) SSIM of reconstructed images via different light fields as a function of sampling rates

不过近年来,对相位恢复算法的研究和应用不断增加,这在很大程度上是因为光学中出现了各种新的成像技术,这种趋势也开始影响信号处理领域。过去几年,研究者通过使用现代优化理论工具开发新的相位恢复方法^[44-45],最近已经开始探索相位检索和基于结构的信息处理之间的联系^[46-47]。例如,基于许多光学图像的稀疏性可以开发出有效的相位恢复方法,使得分辨率大大超出 Abbe 衍射极限(分辨率小于波长的 1/5)^[47]。目前,基于稀疏性重建的重要手段和方法已从线性测量系统逐步推广到了非线性测量系统^[48-49]。在这里,压缩感知^[50]在信号处理中发挥了重要作用;由于相位恢复问题在数学上是非线性的(即所寻求的信号与测量所得并非线性相关),而压缩感知是一个线性问题,因此要将压缩感知算法应用于相位恢复问题上需要作出一些调整和修改。

4.2 问题描述

相位恢复是一种基于非线性采样的信号重构问题。与压缩感知中的线性采样不同的是:其采样向量 \mathbf{y} 的相位信息丢失了,只剩下幅值信息^[44,51]。

$$y_i = |\Phi_i^* \mathbf{x}|, i = 1, \dots, M, \quad (14)$$

式中: \mathbf{x} 是未知的 N 维信号; Φ_i 为第 i 个采样向量

($\Phi = [\Phi_1, \dots, \Phi_M]^*$); y_i 为第 i 个采样的幅值。相位恢复的目标就是基于这些幅值信息重构出原始信号 \mathbf{x} :

$$\text{Find } \mathbf{x}, \text{ s.t. } y_i = |\Phi_i^* \mathbf{x}|, i = 1, \dots, M. \quad (15)$$

目前来说,尽管能够利用高精度仪器直接获得相位信息,但是由于对分辨率有要求,研究人员更倾向于利用算法求解相位恢复问题。以下是一些算法简介。

交替投影法。Gerchberg^[52]于 1972 年首次提出了交替投影(GS)法来实现相位恢复。该算法以信号本身的幅值以及经傅里叶变化后的幅值作为先验,通过光波在空域和频域上交替投影来重构原始信号。凭借其简单和易于实施的优点,GS 法已被广泛应用于许多工程领域^[53]。但是该算法也存在解不唯一的缺点,这是因为傅里叶变换后的幅值与原信号存在多对一的映射。因此,求解其反问题时自然会出现解不唯一的情况。在实际应用中,GS 法也常常出现收敛速度慢,甚至陷入局部最优解的情形。

混合输入输出法。为克服 GS 法收敛速度慢的缺点,1982 年 Fienup^[54]在其基础上提出了误差下降(ER)法和混合输入输出(HIO)法。其中,ER 法

每次迭代时在空域中对图像的像素值加以约束,而在频域中把傅里叶变换的幅值替换为测量值。HIO法则是加入了支撑集的先验知识。这两种改进都加快了算法的收敛速度,但依然无法解决局部最优解的问题,且难以保证有噪环境下算法的鲁棒性。1993年,Yang等^[55]提出了Yang-Gu算法,跟GS法相比,该算法更为通用,可处理任何非正则变换的相位恢复问题。但是该算法对初始值较敏感,也无法解决局部最优解问题。2013年,Rodriguez等^[56]在HIO法的基础上提出了过采样光滑(OSS)法,用一个可变带宽的低通滤波器对HIO法的支撑集以外的区域加以滤波,从而提高算法的抗噪声性能。

凸优化方法。以上算法主要基于交替投影的思想,利用信号傅里叶变换后的幅值以及其他先验信息进行信号重构。由于傅里叶变换后的幅值约束集本质上是非凸的,其信号重构便变为一个非凸优化问题,寻找其全局最优解非常困难。因此,研究者们便尝试将该问题转化为可有效求解的凸优化问题。例如,Candès等^[44]提出了相位提升法(Phase-Lift),将信号向量提升成秩为1的矩阵,从而把相位恢复问题转化为低秩矩阵补全问题。该问题可用半正定规划来求解,理论上可收敛至全局最优解。然而在采样数较少或原始信号是稀疏的情况下,其重构效果并不十分理想。另外由于维度的提升,算法的计算复杂度也大幅度增加,给解决高维问题带来了较大的难度。

非凸优化方法。为了提高相位恢复问题的求解效率,研究者们也提出了非凸优化方法。2015年,Candès等^[57]提出了梯度下降法(WF)。该算法找到一个可靠的初始点之后利用梯度下降准则来寻找相位恢复问题的全局最优解。还有一些基于梯度下降思想的改进算法,如阈值梯度下降法(TWF)^[58]和整形梯度下降法(RWF)^[59]等。总体上说,由于相位恢复问题本身的非凸特性,这些非凸优化方法依然无法解决局部最优解的问题,同时也存在收敛速度不稳定等缺点。

稀疏约束方法。近年来,随着压缩感知理论的发展,稀疏约束下的相位恢复问题也逐渐引起了研究者的关注。如果原始信号是稀疏的或者在某个变换域存在稀疏表征,那么可通过求解下面的优化问题来实现相位恢复^[60]:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0, \text{ s.t. } y_i = |\Phi_i^T \mathbf{x}|, \quad i = 1, \dots, N. \quad (16)$$

该问题被称为稀疏相位恢复(SPR),其形式上可看作压缩感知问题的非线性形式。由于目标函数和L0范数约束都是非凸函数,直接将其转化为凸问题来求解较为困难。2007年,Moravec等^[60]首次提出了压缩相位恢复算法(CPR)。2012年,Shechtman等^[61]提出了贪婪稀疏相位恢复算法(GESPAR)。2019年,Yuan等^[62]提出了稀疏正则化的梯度下降法(SWF)。总体来说,利用稀疏先验的算法可在一定程度上提高相位恢复的效率,为处理高维情况提供了有效的途径。但是这类算法仍然存在一系列问题。例如,迭代速度较慢且不稳定,对算法的初始值较敏感(不同的初始值常常导致不同的重构结果),抗噪能力差等。因此重构的准确率普遍不高。另外,利用这类算法对复信号进行相位恢复也较困难。

4.3 子空间相位恢复算法

子空间相位恢复(SPR)算法是本课题组提出的一种新型的求解稀疏相位恢复问题的算法。该算法借鉴了压缩感知^[17-18]中经典的子空间追溯法(SP)^[63]和压缩采样匹配追踪法(CoSaMP)^[64]。其主要步骤在于支撑集的匹配(Identification)和支撑集上的投影(Projection)。

记损失函数 $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - |\Phi \mathbf{x}|\|_2^2$, 其中 $|\cdot|^2$ 代表对每个元素分别进行平方操作,矩阵 Φ 每个元素独立同分布于 $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right) + j\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 。SPR算法流程如图6所示。其中第3步一般采用二阶牛顿法,以期得到一个近似最优解。

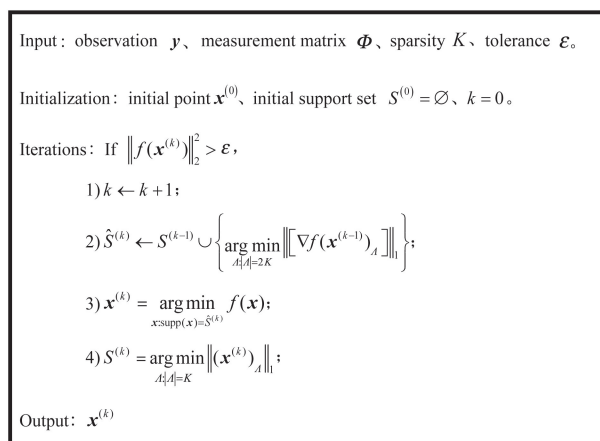


图6 SPR算法流程

Fig. 6 Flow of SPR algorithm

引理1 对于函数 $g(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$, g 为 $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R}$ 的一个映射,则对于该映射,Wirtinger calculus 定义如下:

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{z}} \triangleq \left. \frac{\partial g(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\bar{\mathbf{z}} \text{ as constant}}, \quad \frac{\partial g}{\partial \bar{\mathbf{z}}} \triangleq \left. \frac{\partial g(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})}{\partial \bar{\mathbf{z}}} \right|_{\mathbf{z} \text{ as constant}}, \quad (17)$$

$$\nabla f_w(\mathbf{x}) = 2 \sum_{k=1}^M \begin{bmatrix} (|\Phi_k^* \mathbf{x}|^2 - y_k) \Phi_k \Phi_k^* \mathbf{x} \\ (|\Phi_k^* \mathbf{x}|^2 - y_k) (\Phi_k \Phi_k^*)^* \bar{\mathbf{x}} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

在 Wirtinger calculus 意义下,对于损失函数,则有

$$\nabla g(\mathbf{z}) \triangleq \left[\frac{\partial g}{\partial \mathbf{z}}, \frac{\partial g}{\partial \bar{\mathbf{z}}} \right],$$

$$\nabla^2 g(\mathbf{z}) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{z}} \right)^* & \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{z}}} \left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{z}} \right)^* \\ \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{z}}} \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{\mathbf{z}}} \right)^* & \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{\mathbf{z}}} \right)^* \end{bmatrix}. \quad (19)$$

当信号为复数信号时,考虑利用引理 1 中的 Wirtinger calculus 来代替一般的导数。

4.4 模拟实验

算法的测试程序采用 MATLAB 2019a 编写。主要针对一维信号和二维图像分别作了仿真实验。针对一维信号情况,选用长度为 100×1 的向量,恢复结果判定标准如下:定义相位最小距离 $h(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = \min_{\varphi \in [0, 2\pi]} \|\mathbf{z} - \mathbf{x} \exp(j\varphi)\|^2$ 。记恢复信号为 $\hat{\mathbf{x}}$, 原始信号为 \mathbf{x} , 当 $h(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) < 10^{-6}$ 即为恢复成功, 否则为失败。这里选取四种其他算法与本课题组提出的算法进行对比, 分别是 WF^[57], TWF (Truncated Wirtinger Flow)^[65], RWF (Reweighted Wirtinger Flow)^[59], SWF^[62]。

以下分别做了两组实验,在信号为实数和复数情况下,对比所提算法的恢复成功率与其他算法的恢复成功率,实验 1 的具体设定如图 7 所示。

Fix sparsity and range M . Test for 100 times.

$\mathbf{x}_i \sim \mathcal{N}^{i.i.d.}(0,1)$,

Sparsity $K=5$,

$\Phi \in \mathbb{R}^{M \times 100}$, $M \in [30, 300]$,

$\varphi_{mn} \sim \mathcal{N}^{i.i.d.}(0,1)$.

图 7 实验 1 设置

Fig. 7 Basic setting of experiment 1

所得成功频率曲线如图 8 所示。

一般而言, M 越大说明观测代价越高, 而所提 SPR 算法能够在 M 非常小的情况下有极高的准确率, 证明该算法在观测限制的情况下仍能有效恢复信号。相比之下, 其他算法准确率在 M 较小的情况下不稳定, 这一点是由于这些算法思路均源于梯度

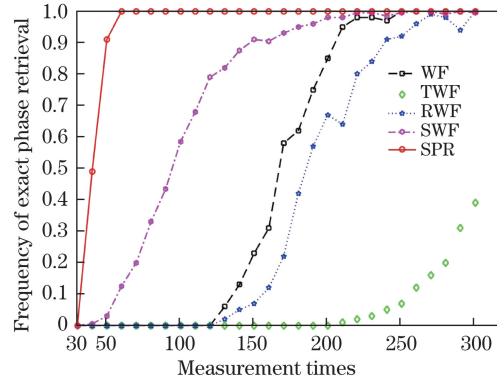


图 8 固定稀疏度为 5 时的实数信号恢复情况

Fig. 8 Frequency of exact phase retrieval as a function of measurement times for real signals with $K=5$

下降法, 而相位恢复问题是非凸问题, 因此依赖于初始点的选择。而 SPR 算法对初值点的依赖性不强, 它是通过对支撑集的精确选取来准确恢复信号, 因此能取得更好的恢复成功率。

实验 2 的设置如图 9 所示, 实验结果如图 10 所示。

Fix sparsity and range M . Test for 100 times.

$\mathbf{x}_i \sim \mathcal{N}^{i.i.d.}(0,1) + j\mathcal{N}^{i.i.d.}(0,1)$,

Sparsity $K=5$,

$\Phi \in \mathbb{C}^{M \times 100}$, $M \in [40, 300]$,

$\varphi_{mn} \sim \mathcal{N}^{i.i.d.}(0,1) + j\mathcal{N}^{i.i.d.}(0,1)$.

图 9 实验 2 设置

Fig. 9 Basic setting of experiment 2

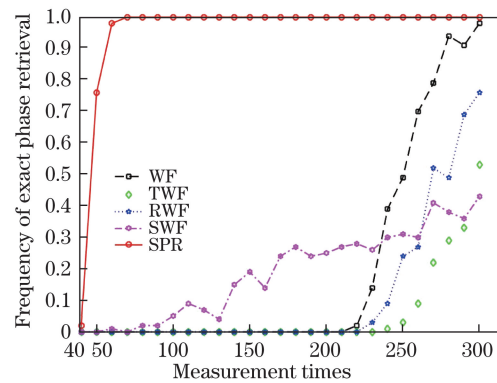


图 10 固定稀疏度为 5 时复数信号恢复情况

Fig. 10 Frequency of exact phase retrieval as a function of measurement times for complex signals with $K=5$

可以看到, 在复数情况时 SPR 算法的重构效果仍然非常稳定, 而其他算法在复数情况时恢复效果普遍很差。这一点的原因在于复数信号相当于比实

数信号多了一倍的维度,因此需要更高的采样量,同时在初始值方面,好的复数初始值显然要比实数初始值更难求得,因此其他算法不能得到好的恢复效果。

4.5 小 结

近年来,由于物理学、光学等领域的蓬勃发展,相位恢复问题已经开始逐步被研究人员所重视。同时,对信号的稀疏属性的深度利用可以使人们花费更少的代价来重构信号。因此稀疏相位恢复问题在目前的研究中具有重要的意义。本节的主要贡献在于归纳总结了前人经验,用压缩感知的思想提出了SPR算法,它基于信号的稀疏性,能以极小的代价(观测量)较为精确地重构原始信号,包括实数和复数情况。但是SPR算法存在着一些不足,在模拟实验中,SPR算法的速度不够快,难以胜任实时性重构信号的要求。此外,目前阶段算法的抗噪能力不够,难以在有噪环境下恢复原始信号。在未来工作中,本课题组将对SPR算法的性能作进一步的优化,同时专注于提升算法的抗噪声性能。

5 结 束 语

具体选取并讨论了鬼成像中系统预处理、光场优化和相位恢复这三个数学问题,并介绍了鬼成像最近的一些相关研究。事实上,数学方法的研究和应用对解决鬼成像以及计算成像中的实际问题有很大的帮助。例如,鬼成像的实际应用需要事先对其图像重构质量给出一个评价。虽然近些年来有许多工作者致力于鬼成像重构质量的研究,并提出了一些可分析的评价指标。然而,作为一种新的成像方式,鬼成像必不可少地需要一个像传统成像那样完善的分析描述框架,这就需要建立一个可分析的成像模型。鬼成像所依赖的物理机制是基于对光场的统计描述,因此,其成像模型的建立与分析也会用到统计相关的理论。这是鬼成像未来发展的关键问题之一。此外,光学成像本身是一个信息获取过程,因此,计算成像与无线通信理论相结合,将会是未来发展的趋势。这中间涉及到的数学既有对光场的统计描述,又有现代信息论中的若干概念和理论。随着计算成像的发展与应用,可以预见,从系统模型分析到重构算法设计等各方面,数学将在成像领域中发挥越来越大的作用。

参 考 文 献

- [1] Wolf E. Optics in terms of observable quantities[J]. *Il Nuovo Cimento* (1943-1954), 1954, 12(6): 884-888.
- [2] Bhatia A B, Wolf E. On the circle polynomials of Zernike and related orthogonal sets[J]. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1954, 50(1): 40-48.
- [3] Wolf E. Coherence properties of partially polarized electromagnetic radiation[J]. *Il Nuovo Cimento* (1955-1965), 1959, 13(6): 1165-1181.
- [4] Mandel L, Wolf E. Coherence properties of optical fields[J]. *Reviews of Modern Physics*, 1965, 37(2): 231-287.
- [5] Glauber R J. Photon correlations[J]. *Physical Review Letters*, 1963, 10(3): 84-86.
- [6] Glauber R J. The quantum theory of optical coherence [J]. *Physical Review*, 1963, 130(6): 2529-2539.
- [7] Brown R H, Twiss R Q. Correlation between photons in two coherent beams of light[J]. *Nature*, 1956, 177(4497): 27-29.
- [8] Brown R H, Twiss R Q. The question of correlation between photons in coherent light rays[J]. *Nature*, 1956, 178(4548): 1447-1448.
- [9] Strekalov D V, Sergienko A V, Klyshko D N, et al. Observation of two-photon “ghost” interference and diffraction[J]. *Physical Review Letters*, 1995, 74(18): 3600-3603.
- [10] Cheng J, Han S S. Incoherent coincidence imaging and its applicability in X-ray diffraction[J]. *Physical Review Letters*, 2004, 92(9): 093903.
- [11] Gatti A, Brambilla E, Bache M, et al. Ghost imaging with thermal light: comparing entanglement and classical correlation[J]. *Physical Review Letters*, 2004, 93(9): 093602.
- [12] Bennink R S, Bentley S J, Boyd R W, et al. Quantum and classical coincidence imaging [J]. *Physical Review Letters*, 2004, 92(3): 033601.
- [13] Ferri F, Magatti D, Gatti A, et al. High-resolution ghost image and ghost diffraction experiments with thermal light [J]. *Physical Review Letters*, 2005, 94(18): 183602.
- [14] Kolobov M I. *Quantum imaging* [M]. New York, NY: Springer, 2007: 79-110.
- [15] Shapiro J H, Boyd R W. The physics of ghost imaging[J]. *Quantum Information Processing*, 2012, 11(4): 949-993.
- [16] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit [J]. *SIAM Review*, 2001, 43(1): 129-159.
- [17] Donoho D L. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289-1306.

- [18] Candès E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(2): 489-509.
- [19] Candès E, Tao T. The Dantzig selector: statistical estimation when p is much larger than n [J]. *The Annals of Statistics*, 2007, 35(6): 2313-2351.
- [20] Candès E J. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing[J]. *Comptes Rendus Mathématique*, 2008, 346(9/10): 589-592.
- [21] Zhao C Q, Gong W L, Chen M L, et al. Ghost imaging lidar via sparsity constraints [J]. *Applied Physics Letters*, 2012, 101(14): 141123.
- [22] Liu Z T, Tan S Y, Wu J R, et al. Spectral camera based on ghost imaging via sparsity constraints [J]. *Scientific Reports*, 2016, 6: 25718.
- [23] Gong W L, Han S S. Experimental investigation of the quality of lensless super-resolution ghost imaging via sparsity constraints[J]. *Physics Letters A*, 2012, 376(17): 1519-1522.
- [24] Katz O, Bromberg Y, Silberberg Y. Compressive ghost imaging [J]. *Applied Physics Letters*, 2009, 95(13): 131110.
- [25] Wang H, Han S S, Kolobov M I. Quantum limits of super-resolution of optical sparse objects via sparsity constraint [J]. *Optics Express*, 2012, 20 (21): 23235-23252.
- [26] Sun B, Edgar M P, Bowman R, et al. 3D computational imaging with single-pixel detectors[J]. *Science*, 2013, 340(6134): 844-847.
- [27] Benzi M. Preconditioning techniques for large linear systems: a survey [J]. *Journal of Computational Physics*, 2002, 182(2): 418-477.
- [28] Elad M. Optimized projections for compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(12): 5695-5702.
- [29] Duarte-Carvajalino J M, Sapiro G. Learning to sense sparse signals: simultaneous sensing matrix and sparsifying dictionary optimization[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2009, 18 (7): 1395-1408.
- [30] Tsiligianni E, Kondi L P, Katsaggelos A K. Preconditioning for underdetermined linear systems with sparse solutions [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(9): 1239-1243.
- [31] Wang J, Li P. Recovery of sparse signals using multiple orthogonal least squares [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 65(8): 2049-2062.
- [32] Tong Z S, Wang J, Han S S. Preconditioned multiple orthogonal least squares and applications in ghost imaging via sparsity constraint[J/OL]. (2019-10-11)[2019-11-01]. <https://arxiv.xileisou.top/abs/1910.04926>.
- [33] Pati Y C, Rezaifar R, Krishnaprasad P S. Orthogonal matching pursuit: recursive function approximation with applications to wavelet decomposition [C] // *Proceedings of 27th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, November 1-3, 1993, Pacific Grove, CA, USA. New York: IEEE, 1993: 40-44.
- [34] Ferri F, Magatti D, Lugiato L A, et al. Differential ghost imaging [J]. *Physical Review Letters*, 2010, 104(25): 253603.
- [35] Zhang C, Guo S X, Cao J S, et al. Object reconstitution using pseudo-inverse for ghost imaging [J]. *Optics Express*, 2014, 22(24): 30063-30073.
- [36] Figueiredo M A T, Nowak R D, Wright S J. Gradient projection for sparse reconstruction: application to compressed sensing and other inverse problems [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2007, 1(4): 586-597.
- [37] Chen M L, Li E R, Han S S. Application of multi-correlation-scale measurement matrices in ghost imaging via sparsity constraints[J]. *Applied Optics*, 2014, 53(13): 2924-2928.
- [38] Khamoushi S M M, Nosrati Y, Tavassoli S H. Sinusoidal ghost imaging[J]. *Optics Letters*, 2015, 40(15): 3452-3455.
- [39] Xu X Y, Li E R, Shen X, et al. Optimization of speckle patterns in ghost imaging via sparse constraints by mutual coherence minimization [J]. *Chinese Optics Letters*, 2015, 13(7): 071101.
- [40] Hu C Y, Tong Z S, Liu Z T, et al. Optimization of light fields in ghost imaging using dictionary learning [J]. *Optics Express*, 2019, 27(20): 28734-28749.
- [41] Olshausen B A, Field D J. Natural image statistics and efficient coding [J]. *Network: Computation in Neural Systems*, 1996, 7(2): 333-339.
- [42] Aharon M, Elad M, Bruckstein A. K-SVD: an algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation[J]. *IEEE Transactions on signal processing*, 2006, 54(11): 4311-4322.
- [43] Abolghasemi V, Ferdowsi S, Sanei S. A gradient-based alternating minimization approach for optimization of the measurement matrix in compressive sensing [J]. *Signal Processing*, 2012, 92(4): 999-1009.
- [44] Candès E J, Strohmer T, Voroninski V. Phaselift: exact and stable signal recovery from magnitude measurements via convex programming[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2013, 66(8): 1241-1274.
- [45] Candès E J, Eldar Y C, Strohmer T, et al. Phase retrieval via matrix completion [J]. *SIAM review*,

- 2015, 57(2): 225-251.
- [46] Fannjiang A. Absolute uniqueness of phase retrieval with random illumination [J]. *Inverse Problems*, 2012, 28(7): 075008.
- [47] Szameit A, Shechtman Y, Osherovich E, et al. Sparsity-based single-shot subwavelength coherent diffractive imaging[J]. *Nature Materials*, 2012, 11(5): 455-459.
- [48] Ohlsson H, Yang A Y, Dong R, et al. Compressive phase retrieval from squared output measurements via semidefinite programming [J]. *IFAC Proceedings Volumes*, 2012, 45(16): 89-94.
- [49] Shechtman Y, Small E, Lahini Y, et al. Sparsity-based super-resolution and phase-retrieval in waveguide arrays[J]. *Optics Express*, 2013, 21(20): 24015-24024.
- [50] Eldar Y C, Kutyniok G. *Compressed sensing: theory and applications* [M]. UK: Cambridge University Press, 2012.
- [51] Hayes M. The reconstruction of a multidimensional sequence from the phase or magnitude of its Fourier transform [J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1982, 30(2): 140-154.
- [52] Gerchberg R W. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures[J]. *Optik*, 1972, 35: 237-246.
- [53] Fienup C, Dainty J. Phase retrieval and image reconstruction for astronomy [M] // Stark H. *Image recovery: theory and application*. Orlando: Academic Press, 1987: 275.
- [54] Fienup J R. Phase retrieval algorithms: a comparison [J]. *Applied Optics*, 1982, 21(15): 2758-2769.
- [55] Yang G Z, Gu B Y, Dong B Z. Theory of the amplitude-phase retrieval in any linear transform system and its applications[J]. *International Journal of Modern Physics B*, 1993, 7(18): 3153-3224.
- [56] Rodriguez J A, Xu R, Chen C C, et al. Oversampling smoothness: an effective algorithm for phase retrieval of noisy diffraction intensities [J]. *Journal of Applied Crystallography*, 2013, 46(2): 312-318.
- [57] Candes E J, Li X D, Soltanolkotabi M. Phase retrieval via Wirtinger flow: theory and algorithms [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2015, 61(4): 1985-2007.
- [58] Cai T T, Li X D, Ma Z M. Optimal rates of convergence for noisy sparse phase retrieval via thresholded Wirtinger flow[J]. *The Annals of Statistics*, 2016, 44(5): 2221-2251.
- [59] Zhang L, Wang G, Giannakis G B, et al. Compressive phase retrieval via reweighted amplitude flow[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2018, 66(19): 5029-5040.
- [60] Moravec M L, Romberg J K, Baraniuk R G. Compressive phase retrieval[J]. *Proceedings of SPIE*, 2007, 6701: 670120.
- [61] Shechtman Y, Beck A, Eldar Y C. Efficient phase retrieval of sparse signals[C]//2012 IEEE 27th Convention of Electrical and Electronics Engineers in Israel, November 14-17, 2012, Eilat, Israel. New York: IEEE, 2012: 13172953.
- [62] Yuan Z Y, Wang H X, Wang Q. Phase retrieval via sparse Wirtinger flow[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2019, 355: 162-173.
- [63] Dai W, Milenkovic O. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, 55(5): 2230-2249.
- [64] Needell D, Tropp J A. CoSaMP: iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2009, 26(3): 301-321.
- [65] Kolte R, Özgür A. Phase retrieval via incremental truncated Wirtinger flow [J/OL]. (2016-06-10) [2019-11-01]. <https://arxiv.xilesou.top/abs/1606.03196>.