

穆勒矩阵成像椭偏仪误差源的简化分析方法

孟泽江^{1,2}, 李思坤^{1,2*}, 王向朝^{1,2**}, 步扬^{1,2}, 戴凤钊^{1,2}, 杨朝兴^{1,2}

¹中国科学院上海光学精密机械研究所信息光学与光电技术实验室, 上海 201800;

²中国科学院大学材料与光电研究中心, 北京 100049

摘要 针对穆勒矩阵成像椭偏仪的系统误差源提出一种简化分析方法, 将光强曲线的理想傅里叶级数系数组与实际系数组进行近似匹配, 建立穆勒矩阵测量误差与误差源参数之间的线性模型。针对解析式复杂的随机方位角误差, 从统计学角度提出了一种等效噪声模型以分析其对测量结果的影响。采用上述简化方法系统分析了椭偏仪的 6 种系统误差源和 2 种随机误差源对穆勒矩阵测量结果的影响, 并以一个典型光刻投影物镜的穆勒光瞳为检测对象, 进行了检测仿真。仿真结果验证了所提方法分析的准确性。

关键词 成像系统; 光刻; 偏振像差检测; 穆勒矩阵成像椭偏仪; 误差分析

中图分类号 TN305.7

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201939.0911002

Simplified Analytical Method for Error Sources in Mueller Matrix Imaging Polarimeter

Meng Zejiang^{1,2}, Li Sikun^{1,2*}, Wang Xiangzhao^{1,2**}, Bu Yang^{1,2},
Dai Fengzhao^{1,2}, Yang Chaoxing^{1,2}

¹Laboratory of Information Optics and Opto-Electronic Technology, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics,
Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800, China;

²Center of Materials Science and Optoelectronics Engineering, University of Chinese Academy of Sciences,
Beijing 100049, China

Abstract Aiming at systematic error sources in a Mueller matrix imaging polarimeter, we propose a simplified analytical method based on the approximate matching of the ideal coefficients of Fourier series of the intensity curve with the real ones. By using the method, a linear relationship between the deviation of the Mueller matrix and the parameter of the error source is built. The analytical expression for random error caused by the azimuthal angle is complex, so an equivalent noise model is proposed to characterize the impact of misalignment from the view of statistics. Based on the simplified models above, we conduct a comprehensive analysis for the measured Mueller matrices influenced by six kinds of systematic error sources and two kinds of random error sources. The simulation for the measurement of a typical Mueller pupil of the lithographic projector is performed. The results verify the accuracy of the proposed method.

Key words imaging systems; photolithography; polarization aberration measurement; Mueller matrix imaging polarimeter; error analysis

OCIS codes 110.5220; 110.2960; 220.1010; 260.5430

1 引 言

光刻机是极大规模集成电路制造的核心装备。为提升成像分辨率, 主流的深紫外光刻机均采用偏振光照明和超大数值孔径 ($NA = 1.35$) 投影物镜。

这使得偏振效应对光刻成像的影响尤为明显^[1]。偏振像差反映了光学系统对入射光振幅、相位和偏振态的改变。这一改变量随入射偏振态, 以及光束倾斜角或频域出瞳点的变化而变化^[2-3]。若用琼斯矢量或斯托克斯矢量表征入射偏振光, 则偏振像差可

收稿日期: 2019-04-17; 修回日期: 2019-05-15; 录用日期: 2019-05-21

基金项目: 国家科技重大专项(2017ZX02101006, 2017ZX02101004-002)、国家自然科学基金(61474129)、上海市自然科学基金(17ZR1434100)

* E-mail: lisikun@siom.ac.cn; ** E-mail: wxz26267@siom.ac.cn

表示为在出瞳面上分布的琼斯矩阵函数或穆勒矩阵函数,即琼斯光瞳或穆勒光瞳^[4]。投影物镜的偏振像差会降低光刻成像质量^[5-6],因此需要对其进行高精度的测量和有效的补偿。基于双旋波片法的穆勒矩阵成像椭偏仪^[7]是测量光学系统偏振像差的典型装置。在实际测量过程中,非理想的偏振片和波片、偏振元件的方位角误差,以及图像传感器的噪声均会影响穆勒光瞳的测量精度。光刻成像系统对像差的检测和控制有极为严苛的要求。为尽可能地减小测量误差,首先需要建立椭偏仪各类误差源对测量结果影响的理论模型,且该模型应具有简单清晰的形式,可用于进行综合误差评定、误差源指标分解、元件误差标定和补偿。

关于穆勒矩阵成像椭偏仪的误差分析已有多项研究。关于椭偏仪的系统误差,Goldstein 等^[8]和 Bhattacharyya 等^[9]采用傅里叶级数系数分析法推导了实测穆勒矩阵各元素与受误差源影响的光强曲线傅里叶系数之间的关系式,并分析了波片偏振衰减误差、相位延迟误差和方位角误差的影响。该方法是严格方法,适用于任何范围的误差分析,但该方法的表达式形式复杂,而且以傅里叶系数为自变量,无法直接反映误差源参数和原始穆勒矩阵元素的作用。Nee^[10]和 Savenkov 等^[11]基于起偏和检偏端分离的原理,定义了起偏和检偏斯托克斯矢量形式的误差源参数,并分别推导了不同形式的穆勒矩阵误差表达式,但所得表达式的自变量均为综合的矢量误差源,无法直接反映每一种原始误差源带来的影响。Broch 等^[12-13]利用穆勒矩阵各元素对光强的傅里叶系数进行求导,结合傅里叶系数关于误差源参数的泰勒展开式,提出了穆勒矩阵误差的一阶近似和二阶近似模型,分析了偏振片和波片的方位角、偏振衰减和相位延迟对误差的影响。该模型的表达式简单,但采用了求导方法,因此只适用于所有穆勒矩阵元素均变化较小的情况。

针对现有系统误差分析方法存在的问题,本文提出一种系统误差源的简化分析方法:令光强曲线原始形式和实测形式的傅里叶系数组逐项相等,舍弃或近似处理使方程组无解的超定项,通过解方程得到穆勒矩阵误差与误差源参数和原始穆勒矩阵的线性表达式。与同类方法相比,所得表达式形式简单,且适用于穆勒矩阵元素一般变化的情况。

关于椭偏仪的随机误差源,Anna 等^[14]基于方差模型分析了高斯噪声和散射噪声的影响。此类光强形式随机误差的传递过程具有形式简单的解析表达式。但对于随机方位角误差而言,其传递过程难以通过解析式表达。本文对此类误差源进行了讨论,并从统计角度提出一种等效噪声模型以分析其影响。

基于上述简化方法,全面分析了穆勒矩阵成像椭偏仪的 6 种系统误差源和 2 种随机误差源对穆勒矩阵测量的影响,并以一个典型光刻投影物镜的琼斯光瞳为检测对象,在含误差的一般情况下进行了检测仿真,结果验证了本文方法的准确性。

2 基本原理

2.1 穆勒矩阵成像椭偏仪的测量原理

用于偏振像差检测的穆勒矩阵成像椭偏仪的系统结构如图 1 所示^[15],由光源 S、偏振片 P₁/P₂、1/4 波片 Q₁/Q₂、聚焦/准直投镜 L₁/L₂、投影物镜 PO 和 CCD 构成。L₁ 和 L₂ 的作用是对 PO 的频域光瞳进行傅里叶变换,从而使 CCD 的单个像素点对应 PO 的单个光瞳点。在测量时,Q₁ 和 Q₂ 按一定的角度比旋转,以产生不同的入射偏振态和检测相应的出射偏振态,通过求解所得的线性方程计算相应光瞳点的穆勒矩阵。

对于图像传感器的某一像素,测得的光强 I 与 Q₁ 方位角 θ 的关系为

$$I(\theta) = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{P}_2 \mathbf{Q}_2(k\theta) \mathbf{M} \mathbf{Q}_1(\theta) \mathbf{P}_1 \mathbf{S}_0, \quad (1)$$

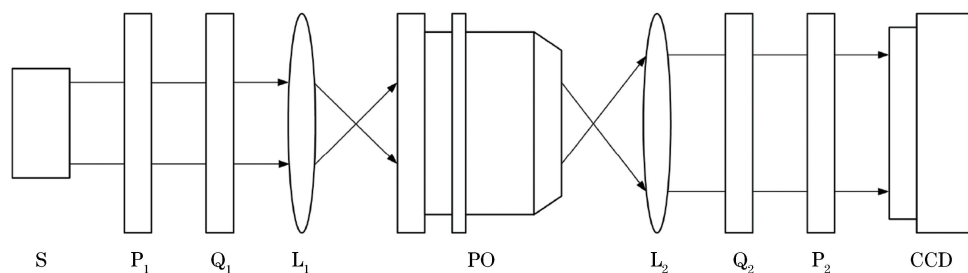


图 1 用于偏振像差检测的穆勒矩阵成像椭偏仪的结构图

Fig. 1 Structure of Mueller matrix imaging polarimeter for measuring polarization aberration

式中： \mathbf{M} 为被测穆勒矩阵； \mathbf{S}_0 为光源出射光的斯托克斯矢量，一般可视为非偏振光，即 $\mathbf{S}_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ； \mathbf{P}_1 、 \mathbf{Q}_1 、 \mathbf{Q}_2 、 \mathbf{P}_2 依次为相应偏振元件的穆勒矩阵； k 为 \mathbf{Q}_2 和 \mathbf{Q}_1 旋转角的比例，一般取 5。利用多个 I 值求解 \mathbf{M} 有两种方式，分别适用于系统误差源和随机误差源的分析。

第一种方法采用傅里叶级数拟合多个光强点分布。 I 与 θ 的关系可表示为

$$I(\theta) = a_0 + \sum_{l=1}^{12} a_{2l-1} \cos[T_l(k)\theta] + a_{2l} \sin[T_l(k)\theta], \quad (2)$$

式中： $T_l(k)$ 是第 l 正弦项或余弦项对应的角度倍数，与 k 的取值有关， l 的取值范围为 $1 \sim 12$ ； $a_0 \sim a_{24}$ 表示常数项，以及各正弦项和余弦项的系数，即傅里叶级数的系数（简称为傅里叶系数）。这 24 个傅里叶系数均为穆勒矩阵 \mathbf{M} 各元素的线性组合，若写成方程组的形式，在无误差时共有 16 个线性无关的方程，可用于求解 \mathbf{M} 的 16 个元素。

第二种方法采用最小二乘法求取多个光强值与穆勒矩阵各元素构成的超定方程组，即

$$\mathbf{I} = \mathbf{C} \text{vec}(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}(\theta_1) \\ \mathbf{K}(\theta_2) \\ \vdots \\ \mathbf{K}(\theta_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{44} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

表 1 穆勒矩阵成像椭偏仪的误差源

Table 1 Error sources in Mueller matrix imaging polarimeter

Error type	Element	Error parameter	Typical value
Systematic	Quarter-wave plates	Retardance error δ	0.001π
	$\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$	Diattenuation error ϵ	0.01
		Azimuthal angle error $\Delta\theta / (^\circ)$	0.1
	Polarizers	Diattenuation error ϵ	0.01
	$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$	Retardance error δ	0.001π
		Azimuthal angle error $\Delta\theta / (^\circ)$	0.1
Random	Image sensor CCD	Noise $\sigma (\Delta I)$	0.003
(normal distribution)	$\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$	Azimuthal angle error $\sigma (\Delta\theta_R) / (^\circ)$	0.1

式中： \mathbf{I} 是 n 次测量所得的光强值构成的列向量； \mathbf{C} 是灵敏度系数矩阵，由 n 个系数行向量 $\mathbf{K}(\theta_1) \sim \mathbf{K}(\theta_n)$ 构成，每个 \mathbf{K} 向量可由(1)式计算； $\theta_1 \sim \theta_n$ 是 n 次测量 \mathbf{Q}_1 的方位角，一般为等间隔角； vec 是向量化运算符，表示使 \mathbf{M} 各元素 m_{ij} 按列堆叠。通过最小二乘法求解 \mathbf{M} ，即

$$\text{vec}(\mathbf{M}) = \mathbf{S}\mathbf{I}, \quad \mathbf{S} = (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T, \quad (4)$$

式中： \mathbf{S} 是灵敏度系数矩阵 \mathbf{C} 的最小二乘逆矩阵。

所有光瞳点上的穆勒矩阵均采用相同的方法求解，而且暂不考虑各元件误差空间分布的不均匀性，以及非理想聚焦/准直投镜 L_1 和 L_2 的影响，因此后续的理论分析均基于单个穆勒矩阵的测量，且不对椭偏仪和成像椭偏仪加以区分。

2.2 穆勒矩阵成像椭偏仪的误差源

表 1 给出了穆勒矩阵成像椭偏仪的主要误差源，共有 6 种系统误差源和 2 种随机误差源^[15]。在实际测量过程中，非理想的偏振元件、偏振元件的方位角误差，以及图像传感器的噪声均会影响穆勒光瞳的测量精度。

系统误差主要来自非理想非对准的偏振片 \mathbf{P}_1 、 \mathbf{P}_2 和 $1/4$ 波片 \mathbf{Q}_1 、 \mathbf{Q}_2 。对于这两种元件，需考虑其偏振衰减误差 ϵ 、相位延迟误差 δ 和方位角误差 $\Delta\theta$ ，其含误差的穆勒矩阵分别为

$$\mathbf{P}(\theta, \epsilon, \delta, \Delta\theta) = \mathbf{R}(-\theta - \Delta\theta) \begin{bmatrix} \frac{1 + \epsilon^2}{2} & \frac{1 - \epsilon^2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1 - \epsilon^2}{2} & \frac{1 + \epsilon^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \cos \delta & -\epsilon \sin \delta \\ 0 & 0 & \epsilon \sin \delta & \epsilon \cos \delta \end{bmatrix} \mathbf{R}(\theta + \Delta\theta), \quad (5)$$

$$\mathbf{Q}(\theta, \epsilon, \delta, \Delta\theta) = \mathbf{R}(-\theta - \Delta\theta) \begin{bmatrix} 1 - \frac{2\epsilon - \epsilon^2}{2} & -\frac{2\epsilon - \epsilon^2}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{2\epsilon - \epsilon^2}{2} & 1 - \frac{2\epsilon - \epsilon^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\epsilon - 1)\sin\delta & (\epsilon - 1)\cos\delta \\ 0 & 0 & (1 - \epsilon)\cos\delta & (\epsilon - 1)\sin\delta \end{bmatrix} \mathbf{R}(\theta + \Delta\theta), \quad (6)$$

式中： $\mathbf{R}(\theta)$ 表示坐标轴旋转的穆勒矩阵，表达式为

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta) & \sin(2\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(2\theta) & \cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

以(5)式和(6)式的含误差元件模型作为后续误差分析公式推导的基础。表1给出了 δ 、 ϵ 和 $\Delta\theta$ 这三种误差的典型值。为简化并方便比较不同元件同类误差的影响，假设起偏和检偏元件的误差参数相等或只是正负号不同，偏振片和1/4波片的误差参数相等。

随机误差主要来自图像传感器的噪声。图像传感器的噪声主要来源于散粒噪声，散粒噪声引起的光强误差 ΔI 可近似看作正态分布。此外，1/4波片 Q_1 和 Q_2 在测量过程中多次旋转，其方位角误差除了与系统误差 $\Delta\theta$ 有关外，还与随机误差 $\Delta\theta_R$ 有关。虽然 ΔI 和 $\Delta\theta_R$ 的期望均为0，但两者的方差到各个穆勒矩阵元素方差的传递系数并不相同，因此仍有进行理论分析和建模的必要。

3 系统误差源的简化分析方法

3.1 波片的相位延迟误差分析

位于起偏和检偏端的1/4波片 Q_1 和 Q_2 通常采用相同元件。为从数量级上分析这类误差的影响，并与其他误差进行比较，假设 Q_1 和 Q_2 的相位延迟误差 δ 大小相等且符号相同。在相位延迟误差的干扰下，实测光强曲线函数 $I'(\theta)$ 可表示为

$$I'(\theta) = \begin{bmatrix} a_0(\mathbf{M}, \delta) \\ a_1(\mathbf{M}, \delta) \\ a_2(\mathbf{M}, \delta) \\ \vdots \\ a_{23}(\mathbf{M}, \delta) \\ a_{24}(\mathbf{M}, \delta) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ \cos[T_1(k)\theta] \\ \sin[T_1(k)\theta] \\ \vdots \\ \cos[T_{12}(k)\theta] \\ \sin[T_{12}(k)\theta] \end{bmatrix}, \quad (8)$$

式中： \mathbf{M} 代表原始的被测的穆勒矩阵，即每一个傅里叶系数均为 \mathbf{M} 各元素的线性组合，且在误差源的干扰下这些线性组合的系数与 δ 有关。(8)式表示 δ 到傅里叶系数 $a_0 \sim a_{24}$ 再到实测光强分布 I' 的正

向传递过程。穆勒矩阵的逆向求解过程与之对称，即先将 I' 分解为各傅里叶系数，再在理想无误差的条件下求解测得的穆勒矩阵 \mathbf{M}' ，该过程可表示为

$$I'(\theta) = \begin{bmatrix} a_0(\mathbf{M}') \\ a_1(\mathbf{M}') \\ a_2(\mathbf{M}') \\ \vdots \\ a_{23}(\mathbf{M}') \\ a_{24}(\mathbf{M}') \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ \cos[T_1(k)\theta] \\ \sin[T_1(k)\theta] \\ \vdots \\ \cos[T_{12}(k)\theta] \\ \sin[T_{12}(k)\theta] \end{bmatrix}. \quad (9)$$

在实际测量过程中， \mathbf{M} 和 δ 的正向传递与 \mathbf{M}' 的逆向求解均基于相等的实测光强点 I'_1, I'_2, \dots, I'_n 。考虑一个更充分的条件： $a_0(\mathbf{M}, \delta) = a_0(\mathbf{M}')$ ， $a_1(\mathbf{M}, \delta) = a_1(\mathbf{M}')$ ， \dots ， $a_{24}(\mathbf{M}, \delta) = a_{24}(\mathbf{M}')$ ，即正向逆向过程对应的傅里叶系数一一相等。在这种条件下，可以消去傅里叶系数变量，联立并求解25个方程从而直接建立 \mathbf{M}' 与 \mathbf{M} 和 δ 的关系。但是，这一设想存在两个问题：首先，一般情况下所得方程为超定方程组，无严格解；其次，即使方程组有唯一解， \mathbf{M}' 的表达式复杂，无法直观看出误差的传递规律。

为解决以上问题，采用一种非严格一阶近似的傅里叶系数匹配方法以得到形式简单且较为准确的误差模型。对于傅里叶系数一一匹配得到的原始方程组，一方面通过舍弃理想傅里叶系数为零的方程或合并两两矛盾的方程使方程组有唯一解，另一方面对误差源只考虑相应参数的一次项，以简化误差模型的公式表达。

令 $s_1 = \sin\delta, c_1 = \cos\delta, a_0(\mathbf{M}, \delta) \sim a_{24}(\mathbf{M}, \delta)$ 的表达式如表2第3列所示。将其中 s_1 的二次项置0，同时令 $c_1 = 1$ ，可得到第4列的简化表达式。

在一阶近似的条件下，只有穆勒矩阵的 m_{44} 元素对应的系数不受此类误差影响，而其他系数在 δ 的影响下一般变为自身或自身一部分项的 $1 + s_1$ 倍。需要注意的是，穆勒矩阵各元素的大小往往有较大差异。对于所研究的小像差系统，如光刻投影物镜系统，所有光瞳点的穆勒矩阵接近单位矩阵，即只有主对角线元素 $m_{11}, m_{22}, m_{33}, m_{44}$ 接近1，而其他元素至少要小一个数量级。在这种情况下，若某

表 2 含波片相位延迟误差的光强傅里叶系数

Table 2 Fourier coefficients of light intensity influenced by delay error of retarder

Order	Term	Coefficient of Fourier series	Approximate coefficient
0	1	$m_{11}/4+(1-s_1)(m_{12}+m_{21})/8+(1-s_1)^2 m_{22}/16$	$m_{11}/4+(1-s_1)(m_{12}+m_{21})/8+(1-2s_1)m_{22}/16$
1	$\cos(2\theta)$	0	0
2	$\sin(2\theta)$	$-c_1 m_{14}/4-c_1(1-s_1)m_{24}/8$	$-m_{14}/4-(1-s_1)m_{24}/8$
3	$\cos(2k\theta)$	0	0
4	$\sin(2k\theta)$	$c_1 m_{41}/4+c_1(1-s_1)m_{42}/8$	$m_{41}/4+(1-s_1)m_{42}/8$
5	$\cos[2(1+k)\theta]$	$c_{12} m_{44}/8$	$m_{44}/8$
6	$\sin[2(1+k)\theta]$	0	0
7	$\cos[2(1-k)\theta]$	$-c_{12} m_{44}/8$	$-m_{44}/8$
8	$\sin[2(1-k)\theta]$	0	0
9	$\cos(4\theta)$	$(1-s_{12})m_{22}/16+(1+s_1)m_{12}/8$	$m_{22}/16+(1+s_1)m_{12}/8$
10	$\sin(4\theta)$	$(1-s_{12})m_{23}/16+(1+s_1)m_{13}/8$	$m_{23}/16+(1+s_1)m_{13}/8$
11	$\cos(4k\theta)$	$(1-s_{12})m_{22}/16+(1+s_1)m_{21}/8$	$m_{22}/16+(1+s_1)m_{21}/8$
12	$\sin(4k\theta)$	$(1-s_{12})m_{32}/16+(1+s_1)m_{31}/8$	$m_{32}/16+(1+s_1)m_{31}/8$
13	$\cos[4(1+k)\theta]$	$(1+s_1)^2(m_{22}-m_{33})/32$	$(1+2s_1)(m_{22}-m_{33})/32$
14	$\sin[4(1+k)\theta]$	$(1+s_1)^2(m_{23}+m_{32})/32$	$(1+2s_1)(m_{23}+m_{32})/32$
15	$\cos[4(1-k)\theta]$	$(1+s_1)^2(m_{22}+m_{33})/32$	$(1+2s_1)(m_{22}+m_{33})/32$
16	$\sin[4(1-k)\theta]$	$(1+s_1)^2(m_{23}-m_{32})/32$	$(1+2s_1)(m_{23}-m_{32})/32$
17	$\cos[2(1+2k)\theta]$	$c_1(1+s_1)m_{34}/16$	$(1+s_1)m_{34}/16$
18	$\sin[2(1+2k)\theta]$	$-c_1(1+s_1)m_{24}/16$	$-(1+s_1)m_{24}/16$
19	$\cos[2(1-2k)\theta]$	$-c_1(1+s_1)m_{34}/16$	$-(1+s_1)m_{34}/16$
20	$\sin[2(1-2k)\theta]$	$-c_1(1+s_1)m_{24}/16$	$-(1+s_1)m_{24}/16$
21	$\cos[2(2+k)\theta]$	$-c_1(1+s_1)m_{43}/16$	$-(1+s_1)m_{43}/16$
22	$\sin[2(2+k)\theta]$	$c_1(1+s_1)m_{42}/16$	$(1+s_1)m_{42}/16$
23	$\cos[2(2-k)\theta]$	$c_1(1+s_1)m_{43}/16$	$(1+s_1)m_{43}/16$
24	$\sin[2(2-k)\theta]$	$-c_1(1+s_1)m_{42}/16$	$-(1+s_1)m_{42}/16$

一傅里叶系数包含 s_1 与主对角线元素的乘积,且该系数可用于求解非主对角线元素(表 2 中标为粗体格式的元素),则其受 δ 的影响较大。表 2 中的 a_0 是符合这一条件的傅里叶系数,其作用是与 a_9 和 a_{11} 联立求解 m_{12} 和 m_{21} 。 m_{12} 和 m_{21} 本身的价值均远小于 m_{22} ,但相应的误差却包含 m_{22} 与 s_1 的乘积,因此 s_1 误差在传递到 m_{12} 和 m_{21} 误差的过程中被明显放大。

将表 2 第 4 列中 \mathbf{M} 各元素和 s_1 分别替换为 \mathbf{M}' 各元素和 0,通过傅里叶系数一一匹配列出并求解方程组。由于 δ 误差只引起傅里叶系数的相对变化,因此方程组恰好有唯一解,得到波片相位延迟误差影响下的穆勒矩阵误差 $\Delta\mathbf{M}_{q,\delta}$ 的表达式为

$$\Delta\mathbf{M}_{q,\delta} = \begin{bmatrix} -m_{12} - m_{21} & m_{12} - m_{22} & m_{13} - m_{23} & -m_{24} \\ m_{21} - m_{22} & 2m_{22} & 2m_{23} & m_{24} \\ m_{31} - m_{32} & 2m_{32} & 2m_{33} & m_{34} \\ -m_{42} & m_{42} & m_{43} & 0 \end{bmatrix} s_1 \quad (10)$$

(10)为形式简单的 \mathbf{M} 各元素的线性组合与 s_1 的乘积。从(10)式可直观看出,系统误差源引入的穆勒矩阵误差与原始穆勒矩阵紧密相关。穆勒矩阵元素误差 Δm_{12} 和 Δm_{21} 的系数包含主对角线元素 m_{22} ,说明 δ 会对 m_{12} 和 m_{21} 产生较大影响,但对其余元素只引起不明显的相对变化。

3.2 波片的偏振衰减误差和方位角误差分析

对于 1/4 波片 Q_1 和 Q_2 的偏振衰减误差 ϵ 和方位角误差 $\Delta\theta$, 同样采用 3.1 节叙述的简化分析方法推导误差传递公式。首先令 $s_2 = \epsilon, s_3 = \sin(2\Delta\theta)$, 采用一阶近似分别得到 δ 和 $\Delta\theta$ 对应的傅里叶系数, 如表 3 的第 3 列和第 4 列所示。

从表 3 可以看出, ϵ 会使所有傅里叶系数发生改变, 且会引起各傅里叶系数相对于自身的变化。 $\Delta\theta$ 不会改变 $a_0, a_2, a_4, a_5, a_7, a_{15}, a_{16}$, 但会使其他傅里叶系数发生与对偶系数成比例的变化, 而非相对于自身的变化, 如 $a'_9 = a_9 + 2s_3 a_{10}, a'_{10} =$

$$a_{10} - 2s_3 a_9。$$

和 3.1 节讨论的 δ 不同, 无论是 ϵ 还是 $\Delta\theta$, 严格匹配傅里叶系数所得的方程组均无解。分析其原因: 1) 原本为 0 的 a_1, a_3, a_6, a_8 系数在误差源影响下变为非零表达式, 使求解 ϵ 或 $\Delta\theta$ 的方程组多出 4 个或 3 个约束条件; 2) 对于 ϵ 或 $\Delta\theta$ 而言, 原本只差正负号的 4 对系数 a_{17} 和 a_{19}, a_{18} 和 a_{20}, a_{21} 和 a_{23}, a_{22} 和 a_{24} 在误差源影响下均加上同一个量或加减不同的量, 使含误差的 4 对系数等式两两矛盾。表 3 中的粗体格式元素为使方程组从唯一解变为无解的部分。

表 3 含波片偏振衰减和方位角误差的光强傅里叶系数

Table 3 Fourier coefficients of light intensity influenced by diattenuation and azimuthal-angle error of retarder

Order	Term	Approximate coefficient (ϵ)	Approximate coefficient (θ)
0	1	$(1-2s_2)(m_{11}/4+(m_{12}+m_{21})/8+m_{22}/16)$	$m_{11}/4+(m_{12}+m_{21})/8+m_{22}/16$
1	$\cos(2\theta)$	$s_2(m_{11}/4+m_{12}/4+m_{21}/8+m_{22}/8)$	$-s_3(m_{14}/4+m_{24}/8)$
2	$\sin(2\theta)$	$-(m_{14}/4+m_{24}/8)+s_2(m_{14}/2+m_{24}/4+m_{13}/4+m_{23}/8)$	$-(m_{14}/4+m_{24}/8)$
3	$\cos(2k\theta)$	$s_2(m_{11}/4+m_{21}/4+m_{12}/8+m_{22}/8)$	$s_3(m_{41}/4+m_{42}/8)$
4	$\sin(2k\theta)$	$(m_{41}/4+m_{42}/8)-s_2(m_{41}/2+m_{42}/4-m_{31}/4-m_{32}/8)$	$(m_{41}/4+m_{42}/8)$
5	$\cos[2(1+k)\theta]$	$m_{44}/8-s_2(m_{44}/4-m_{34}/8+m_{43}/8)$	$m_{44}/8$
6	$\sin[2(1+k)\theta]$	$-s_2(m_{14}/8+m_{24}/8-m_{41}/8-m_{42}/8)$	$-s_3 m_{44}/4$
7	$\cos[2(1-k)\theta]$	$-m_{44}/8+s_2(m_{44}/4-m_{34}/8+m_{43}/8)$	$-m_{44}/8$
8	$\sin[2(1-k)\theta]$	$-s_2(m_{14}/8+m_{24}/8+m_{41}/8+m_{42}/8)$	0
9	$\cos(4\theta)$	$(1-2s_2)(m_{12}/8+m_{22}/16)$	$(m_{12}/8+m_{22}/16)+s_3(m_{13}/4+m_{23}/8)$
10	$\sin(4\theta)$	$(1-2s_2)(m_{13}/8+m_{23}/16)$	$(m_{13}/8+m_{23}/16)-s_3(m_{12}/4+m_{22}/8)$
11	$\cos(4k\theta)$	$(1-2s_2)(m_{21}/8+m_{22}/16)$	$(m_{21}/8+m_{22}/16)+s_3(m_{31}/4+m_{32}/8)$
12	$\sin(4k\theta)$	$(1-2s_2)(m_{31}/8+m_{32}/16)$	$(m_{31}/8+m_{32}/16)-s_3(m_{21}/4+m_{22}/8)$
13	$\cos[4(1+k)\theta]$	$(1-2s_2)(m_{22}-m_{33})/32$	$(m_{22}-m_{33})/32+s_3(m_{23}+m_{32})/8$
14	$\sin[4(1+k)\theta]$	$(1-2s_2)(m_{23}+m_{32})/32$	$(m_{23}+m_{32})/32-s_3(m_{22}-m_{33})/8$
15	$\cos[4(1-k)\theta]$	$(1-2s_2)(m_{22}+m_{33})/32$	$(m_{22}+m_{33})/32$
16	$\sin[4(1-k)\theta]$	$(1-2s_2)(m_{23}-m_{32})/32$	$(m_{23}-m_{32})/32$
17	$\cos[2(1+2k)\theta]$	$m_{34}/16-s_2(m_{34}/8+m_{33}/16-m_{21}/16-m_{22}/16)$	$m_{34}/16-3s_3 m_{24}/16$
18	$\sin[2(1+2k)\theta]$	$-m_{24}/16+s_2(m_{24}/8+m_{23}/16+m_{31}/16+m_{32}/16)$	$-m_{24}/16-3s_3 m_{34}/16$
19	$\cos[2(1-2k)\theta]$	$-m_{34}/16+s_2(m_{34}/8+m_{33}/16+m_{21}/16+m_{22}/16)$	$-m_{34}/16+s_3 m_{24}/16$
20	$\sin[2(1-2k)\theta]$	$-m_{24}/16+s_2(m_{24}/8+m_{23}/16-m_{31}/16-m_{32}/16)$	$-m_{24}/16-s_3 m_{34}/16$
21	$\cos[2(2+k)\theta]$	$-m_{43}/16+s_2(m_{43}/8-m_{33}/16+m_{12}/16+m_{22}/16)$	$-m_{43}/16+3s_3 m_{42}/16$
22	$\sin[2(2+k)\theta]$	$m_{42}/16-s_2(m_{42}/8-m_{32}/16-m_{13}/16-m_{23}/16)$	$m_{42}/16+3s_3 m_{43}/16$
23	$\cos[2(2-k)\theta]$	$m_{43}/16-s_2(m_{43}/8-m_{33}/16-m_{12}/16-m_{22}/16)$	$m_{43}/16-s_3 m_{42}/16$
24	$\sin[2(2-k)\theta]$	$-m_{42}/16+s_2(m_{42}/8-m_{32}/16+m_{13}/16+m_{23}/16)$	$-m_{42}/16-s_3 m_{43}/16$

使用 3.1 节所述的非严格的匹配方法,首先舍弃新增的 a_1, a_3, a_6, a_8 误差表达式对应的方程。其次,对于 ϵ 引入的改变,将 4 对系数 a_{17} 和 a_{19}, a_{18} 和 a_{20}, a_{21} 和 a_{23}, a_{22} 和 a_{24} 的表达式中含 s_2 且两两互为正负的部分予以保留,含 s_2 且两两相等的部分予以舍弃;对于 $\Delta\theta$ 引入的改变,将 4 对系数的表达式中

的含 $-3s_3$ 和 s_3 项分别平均化为 $-2s_3$ 和 $-2s_3$ 项、含 $3s_3$ 和 $-s_3$ 项分别平均化为 $2s_3$ 和 $2s_3$ 项。求解近似匹配后得到的方程组,所得波片偏振衰减和方位角误差影响下的穆勒矩阵误差 $\Delta\mathbf{M}_{q\epsilon}$ 和 $\Delta\mathbf{M}_{q\theta}$ 的表达式分别为

$$\Delta\mathbf{M}_{q\epsilon} = - \begin{bmatrix} 2m_{11} & 2m_{12} & 2m_{13} & m_{13} + 2m_{14} \\ 2m_{21} & 2m_{22} & 2m_{23} & m_{23} + 2m_{24} \\ 2m_{31} & 2m_{32} & 2m_{33} & m_{33} + 2m_{34} \\ -m_{31} + 2m_{41} & -m_{32} + 2m_{42} & -m_{33} + 2m_{43} & -m_{34} + m_{43} + 2m_{44} \end{bmatrix} s_2, \quad (11)$$

$$\Delta\mathbf{M}_{q\theta} = \begin{bmatrix} -m_{13} - m_{31} & 2m_{13} - m_{32} & -2m_{12} - m_{33} & -m_{34} \\ -m_{23} + 2m_{31} & 2m_{23} + 2m_{32} & -2m_{22} + 2m_{33} & 2m_{34} \\ -2m_{21} - m_{33} & -2m_{22} + 2m_{33} & -2m_{23} - 2m_{32} & -2m_{24} \\ -m_{43} & 2m_{43} & -2m_{42} & 0 \end{bmatrix} s_3. \quad (12)$$

表 3 中反映偏振衰减误差 ϵ 的第 3 列系数共有 11 项包含 s_2 与主对角线元素的乘积,但只有标为下划线格式的 4 项(两两互为正负,实际只有两项有效)会使穆勒矩阵非主对角线元素误差 Δm_{34} 和 Δm_{43} 的系数包含主对角线元素 m_{33} ,即 s_2 误差在传递到 m_{34} 和 m_{43} 误差的过程中会被明显放大。从(11)式也可以看出 m_{34} 和 m_{43} 受 s_2 影响较大。

表 3 中反映方位角误差 $\Delta\theta$ 的第 4 列系数只有 3 项包含 s_3 与主对角线元素的乘积,其中标为下划线格式的 2 项会使 Δm_{13} 和 Δm_{31} 的系数包含主对角线元素 m_{33} ,从而明显放大 s_3 的影响。从(12)式也可以看出, m_{13} 和 m_{31} 受 s_3 影响较大。

对于 1/4 波片,三种误差源造成的穆勒矩阵误差均与原始穆勒矩阵相关,且误差在同一数量级。在这三种情况下,原始穆勒矩阵分别有两个非主对角线元素(m_{12} 和 m_{21}, m_{34} 和 m_{43}, m_{13} 和 m_{31})受误差源影响较大,其原因是误差传递系数包含接近 1 的主对角线元素。

3.3 偏振片的三种系统误差分析

对于偏振片 P_1 和 P_2 的三种系统误差,同样采用 3.1 节叙述的简化分析方法推导误差传递公式。由偏振片方位角误差 $\Delta\theta$ 、偏振衰减误差 ϵ 和相位延迟误差 δ 引起的穆勒矩阵误差 $\Delta\mathbf{M}_{p\theta}$ 、 $\Delta\mathbf{M}_{p\epsilon}$ 和 $\Delta\mathbf{M}_{p\delta}$ 的表达式分别为

$$\Delta\mathbf{M}_{p\theta} = \begin{bmatrix} m_{13} + m_{31} & -m_{13} + m_{32} & m_{12} + m_{33} & m_{34} \\ m_{23} - m_{31} & -m_{23} - m_{32} & m_{22} - m_{33} & -m_{34} \\ m_{21} + m_{33} & m_{22} - m_{33} & m_{23} + m_{32} & m_{24} \\ m_{43} & -m_{43} & m_{42} & 0 \end{bmatrix} s_3, \quad (13)$$

$$\Delta\mathbf{M}_{p\epsilon} = - \begin{bmatrix} -m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ 0 & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ 0 & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} 2s_2^2, \quad (14)$$

$$\Delta\mathbf{M}_{p\delta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} s_1, \quad (15)$$

式中: s_3, s_2, s_1 的定义与 3.1 和 3.2 节相同。三种误差的数量级依次递减: $\Delta\mathbf{M}_{p\theta}$ 与 s_3 成正比, $\Delta\mathbf{M}_{p\epsilon}$ 只包含 s_2 的二次项,而 $\Delta\mathbf{M}_{p\delta}$ 恒为 0。

对于 $\Delta\theta$, $\Delta\mathbf{M}_{p\theta}$ 表达式的形式与 $\Delta\mathbf{M}_{q\theta}$ 类似,将 $\Delta\mathbf{M}_{q\theta}$ 右下的 3×3 子块用 A 表示, $\Delta\mathbf{M}_{p\theta}$ 右下子块用 B 表示,二者满足 $A = -2B$,即在两者共同作用下, \mathbf{M} 右下 3×3 子块的元素误差会以 1:2 的比例相互抵消。对于 ϵ ,由于偏振片的起偏过程是从非偏振光中按两个正交偏振基以 $1:\epsilon^2$ 的强度比产生线

偏振光,故所得线偏振光的斯托克斯参量不包含 ϵ 的一次项。同理,偏振片的检偏过程最终得到的 $\Delta \mathbf{M}_{p,\epsilon}$ 只包含 s_3 的二次项。对于 δ ,由于非偏振光可分解为两个相位无关或相位随机的正交偏振基,故起偏偏振片的相位延迟误差不会起任何作用。同理,偏振片的检偏过程最终得到的 $\Delta \mathbf{M}_{p,\delta}$ 恒为 0。因此,一般只需考虑偏振片方位角误差 $\Delta\theta$ 的影响,且该影响整体小于 1/4 波片 $\Delta\theta$ 的影响。

4 随机误差源的简化模型

4.1 图像传感器噪声分析

除了傅里叶系数分析方法,通过(3)式的光强方程组可以看出,随机误差源分为影响光强向量 \mathbf{I} 或影响灵敏度系数矩阵 \mathbf{C} 两类。对于随机光强形式的误差源 $\Delta \mathbf{I}$,根据(4)式, $\Delta \mathbf{M}$ 与 $\Delta \mathbf{I}$ 具有简单的线性传递关系,且传递系数矩阵 \mathbf{S} 与原始穆勒矩阵 \mathbf{M} 无关。随机误差的期望可认为是 0,一般用方差或标准差表示误差源参数。若 $\langle \cdot \rangle$ 表示统计平均,则 $\Delta \mathbf{I}$ 误差协方差的传递表达式为

$$\langle \text{vec}(\Delta \mathbf{M})_i \text{vec}(\Delta \mathbf{M})_j \rangle = \sum_{u,v} \mathbf{S}_{i,u} \mathbf{S}_{j,v} \langle \Delta I_u \Delta I_v \rangle, \quad (16)$$

式中: u 和 v 是光强误差向量 $\Delta \mathbf{I}$ 的下标,范围是 1~ n , n 为测量次数; i 和 j 是穆勒矩阵误差向量 $\text{vec}(\Delta \mathbf{M})$ 的下标,范围是 1~16。若 $\Delta \mathbf{I}$ 来源于图像传感器的噪声,可认为图像传感器某像素的不同次光强测量相互独立,且每一次测量误差的方差均等于传感器整体噪声的方差,即 $\langle \Delta I_u^2 \rangle = \sigma^2(\Delta \mathbf{I})$,且 $\langle \Delta I_u \Delta I_v \rangle_{u \neq v} = 0$ 。

令 $r_1 = \sigma(\Delta \mathbf{I})$,则在图像传感器噪声的影响下,穆勒矩阵误差 $\Delta \mathbf{M}_1$ 标准差的表达式为

$$\sigma[\text{vec}(\Delta \mathbf{M}_1)] = \sqrt{\text{diag}(\mathbf{S}^T \mathbf{S})} r_1, \quad (17)$$

式中: diag 运算表示对矩阵只保留主对角线上的元

素。(17)式表明, \mathbf{M} 每一个元素误差的标准差均只与误差源参数 r_1 线性相关,而线性系数的分布则只与测量方案有关。

4.2 波片的随机角度误差分析

对于系统误差,除了对正向过程和逆向过程相应的傅里叶系数表达式进行分析外,还可直接对比正向和逆向过程相应的光强方程组,即将(3)式写为 $(\mathbf{C} + \Delta \mathbf{C}) \text{vec}(\mathbf{M}) = \mathbf{I}' = \mathbf{C} \text{vec}(\mathbf{M} + \Delta \mathbf{M})$, (18) 式中:系统误差源首先传递到灵敏度系数矩阵误差 $\Delta \mathbf{C}$ 中,再引起穆勒矩阵误差 $\Delta \mathbf{M}$ 。 $\Delta \mathbf{C}$ 到 $\Delta \mathbf{M}$ 的传递关系为

$$\text{vec}(\Delta \mathbf{M}) = (\mathbf{S} \Delta \mathbf{C}) \text{vec}(\mathbf{M}). \quad (19)$$

与基于傅里叶系数匹配法所得的公式相比, $\mathbf{S} \Delta \mathbf{C}$ 包含了误差源的参数和对 \mathbf{M} 的线性变换。虽然傅里叶系数匹配法在分析影响 \mathbf{C} 的系统误差源时非常直观,但该方法无法分析影响 \mathbf{C} 的随机误差源。这是因为:随机误差源产生的影响无法以解析的形式代入傅里叶级数表示的光强曲线中。如果采用传递矩阵法, $\mathbf{S} \Delta \mathbf{C}$ 与影响 \mathbf{C} 的误差(如方位角误差)的关系式极为复杂。对于随机方位角误差等特殊误差,可将这种影响 \mathbf{C} 的随机误差源等效转化为影响 \mathbf{I} 的误差源,并得到近似的统计模型。

改变(19)式变量的结合顺序,可得

$$\text{vec}(\Delta \mathbf{M}) = \mathbf{S}[\Delta \mathbf{C} \text{vec}(\mathbf{M})] = \mathbf{S} \Delta \mathbf{I}_{\text{eq}}. \quad (20)$$

如果 $\Delta \mathbf{C}$ 与 $\text{vec}(\mathbf{M})$ 的乘积 $\Delta \mathbf{I}_{\text{eq}}$ 期望为 0,且方差不随 \mathbf{M} 变化的固定值,则 $\Delta \mathbf{I}_{\text{eq}}$ 可等效成传感器噪声。为证明随机方位角误差近似满足上述条件,令 $s_{31} = \sin(2\Delta\theta_R)$ 和 $s_{32} = \sin(2\Delta\theta_L)$ 分别代表两个 1/4 波片 Q_1 和 Q_2 方位角的误差参数,将表 3 中第 4 列傅里叶系数表达式中的 s_3 替换为 s_{31} 和 s_{32} 的形式,对于矩阵 $\Delta \mathbf{C}$ 中以 θ 为变量的任意一行向量 $\Delta \mathbf{K}$, $\Delta \mathbf{K}$ 与 $\text{vec}(\mathbf{M})$ 的乘积可以表示为

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{K} \text{vec}(\Delta \mathbf{M}) = & -\frac{T_1 s_{31}}{8} (2m_{14} + m_{24}) + \frac{T_3 s_{32}}{8} (2m_{41} + m_{42}) - \frac{T_6 (s_{31} + s_{32})}{8} m_{44} + \frac{T_9 (s_{31} - s_{32})}{8} m_{44} + \\ & \frac{T_{10} s_{31}}{8} (2m_{13} + m_{23}) - \frac{T_{11} s_{31}}{8} (2m_{12} + m_{22}) + \frac{T_{12} s_{32}}{8} (2m_{31} + m_{32}) - \frac{T_{13} s_{32}}{8} (2m_{21} + m_{22}) + \\ & T_{14} \left[\frac{s_{31}}{16} (m_{23} + m_{32}) + \frac{s_{32}}{16} (m_{23} + m_{32}) \right] + T_{15} \left[-\frac{s_{31}}{16} (m_{22} - m_{33}) - \frac{s_{32}}{16} (m_{22} - m_{33}) \right] + \\ & T_{16} \left[\frac{s_{31}}{16} (m_{23} - m_{32}) - \frac{s_{32}}{16} (m_{23} - m_{32}) \right] + T_{17} \left[-\frac{s_{31}}{16} (m_{22} + m_{33}) + \frac{s_{32}}{16} (m_{22} + m_{33}) \right] + \\ & T_{18} \left(-\frac{s_{31} m_{24}}{16} - \frac{s_{32} m_{24}}{8} \right) + T_{19} \left(-\frac{s_{31} m_{34}}{16} - \frac{s_{32} m_{34}}{8} \right) + T_{20} \left(-\frac{s_{31} m_{24}}{16} + \frac{s_{32} m_{24}}{8} \right) + \\ & T_{21} \left(\frac{s_{31} m_{34}}{16} - \frac{s_{32} m_{34}}{8} \right) + T_{22} \left(\frac{s_{31} m_{42}}{8} + \frac{s_{32} m_{42}}{16} \right) + T_{23} \left(\frac{s_{31} m_{43}}{8} + \frac{s_{32} m_{43}}{16} \right) + T_{24} \left(-\frac{s_{31} m_{42}}{8} + \frac{s_{32} m_{42}}{16} \right), \end{aligned} \quad (21)$$

式中： $T_1 \sim T_{24}$ 为表 3 中 1~24 项三角函数基，其自变量为 θ ，并含参数 k 。由于 ΔC 由含不同角度 θ 的 ΔK 的表达式组成，因此可将 K 与 $\text{vec}(M)$ 的乘积视作随机变量。在求这一乘积的方差时，将 $T_1 \sim T_{24}$ 看作协方差为 0，方差均为 1/2 的随机变量，对各项系数中的穆勒矩阵元素取平方。此时，各穆勒矩阵元素的交叉项可忽略，且在无消偏下所有元素的平方和为 $4m_{112}$ 。

$$\text{令 } r_2 = \sin[\sigma(\Delta\theta_R)] \approx s_{31}/2 = s_{32}/2, \text{ 则} \\ \sigma[\Delta K \text{vec}(M)] \approx m_{11} r_2. \quad (22)$$

(22) 式说明， ΔC 与 $\text{vec}(M)$ 的乘积 ΔI_{eq} 可以等效成期望为 0、标准差为 $m_{11} r_2$ 的光强噪声。结合 (17) 式，在波片随机方位角误差 θ_R 的影响下，穆勒矩阵误差 $\Delta M_{q-\theta_R}$ 的标准差近似为

$$\sigma[\text{vec}(\Delta M_{q-\theta_R})] \approx \sqrt{\text{diag}(S^T S)} m_{11} r_2. \quad (23)$$

表 4 偏振元件角度配置方案

Table 4 Angle configuration of polarization element

Configuration	Angle of P ₁ $\theta_1/(\circ)$	Angle of Q ₁ $\phi_1/(\circ)$	Angle of Q ₂ $\phi_2/(\circ)$	Angle of P ₂ $\theta_2/(\circ)$
1×144×1	0	0, 1.25, 2.5, ..., 178.75	$6\phi_1$	0

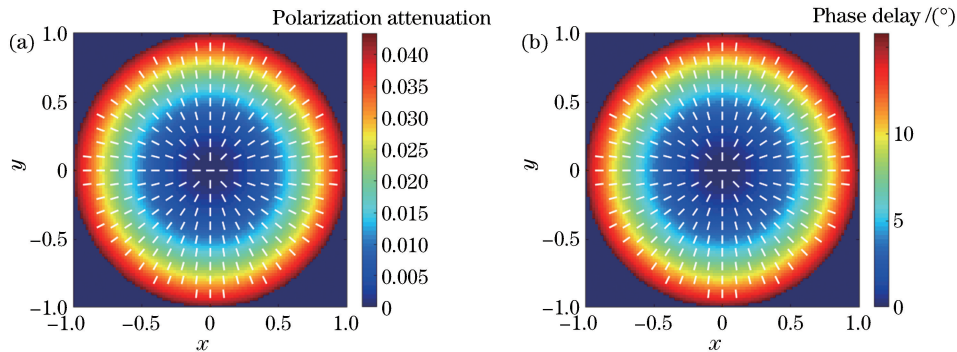


图 2 原始琼斯光瞳。(a)偏振衰减；(b)相位延迟

Fig. 2 Original Jones pupil. (a) Polarization attenuation; (b) phase delay

基于这种光轴旋转对称的穆勒光瞳，在径向可以对 D 和 R 幅度范围内的所有值进行验证，在切向可以对 D 和 R 的所有光轴方向进行验证。另外，根据 D 和 R 幅度的 RMS 值，该穆勒光瞳属于小像差光瞳，在所有光瞳点上穆勒矩阵主对角线的元素均接近 1，且远大于其他元素。

5.2 系统误差简化模型的仿真实证

将测得的穆勒光瞳与原始光瞳相减，得到穆勒光瞳误差的仿真值，并按 (10)~(13) 式计算相应光瞳点穆勒矩阵误差的预测值，两者相减得到预测误差。对于任意穆勒矩阵元素的预测误差 Δm_{ij} ，在整个光瞳上统计其均值与方差。各类系统误差源的统计结果如图 3~5 所示，偏振片方位角误差和波片方

5 仿真实证

5.1 仿真条件

为验证 (12)~(15) 式表示的简化系统误差模型，以及 (17)、(23) 式表示的简化随机误差模型的正确性，设定一个原始的被测穆勒光瞳，按表 1 分别设置各类误差源的参数，并按表 4 设置各偏振元件的方位角。首先，进行误差正向传递过程的仿真，并根据所得的受误差源影响的一组光强值在理想元件情况下求解测得的穆勒光瞳。

被测穆勒光瞳由一个琼斯光瞳转换而来，该琼斯光瞳提取自一个 1.35NA 的光刻投影物镜设计的中心视场点^[15]，其偏振衰减(D)和相位延迟(R)的分布如图 2 所示。图中 D 幅度的均方根(RMS)为 0.025，R 幅度的 RMS 为 0.05π ^[15]。

表 4 偏振元件角度配置方案

Table 4 Angle configuration of polarization element

Configuration	Angle of P ₁ $\theta_1/(\circ)$	Angle of Q ₁ $\phi_1/(\circ)$	Angle of Q ₂ $\phi_2/(\circ)$	Angle of P ₂ $\theta_2/(\circ)$
1×144×1	0	0, 1.25, 2.5, ..., 178.75	$6\phi_1$	0

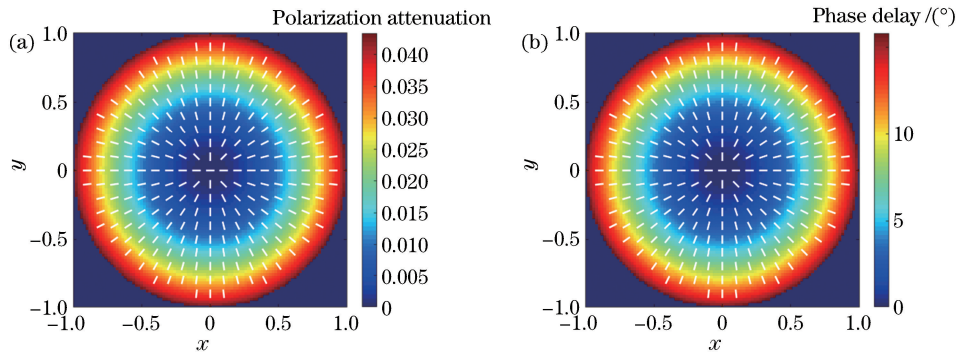


图 2 原始琼斯光瞳。(a)偏振衰减；(b)相位延迟

Fig. 2 Original Jones pupil. (a) Polarization attenuation; (b) phase delay

位角误差的分布规律与之相同，不再画出。

由于在推导波片相位延迟误差的影响时，各项傅里叶系数均可严格匹配，仅使用了一阶近似条件，故简化模型预测误差的平均值和标准差均在 10^{-6} 量级。

对于其余三类系统误差，由于各项傅里叶系数无法严格匹配，因此简化模型预测误差的平均值在 10^{-5} 量级，标准差在 10^{-6} 数量级，而且仍以行数或列数含 4 的元素的预测误差的标准差较大。从 4 类不可忽略的系统误差源对应的预测误差的数量级和分布可以看出，所提简化模型的精度较高，能够满足误差分析的需求。

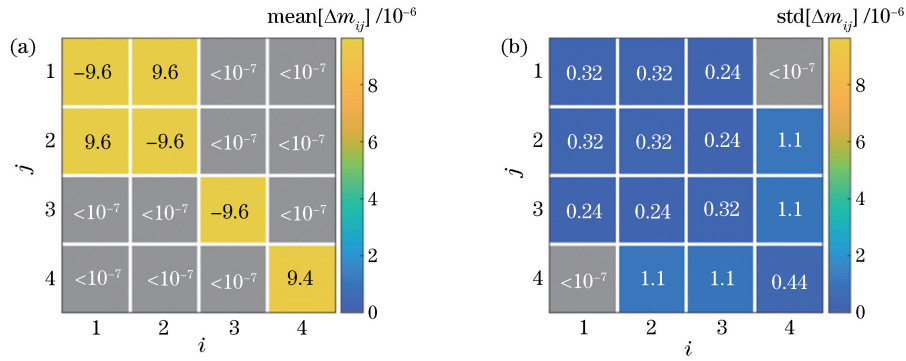


图 3 波片相位延迟误差模型的预测误差统计值。(a)平均值;(b)标准差

Fig. 3 Statistics of prediction errors by using model of delay error of retarder. (a) Mean value; (b) standard deviation

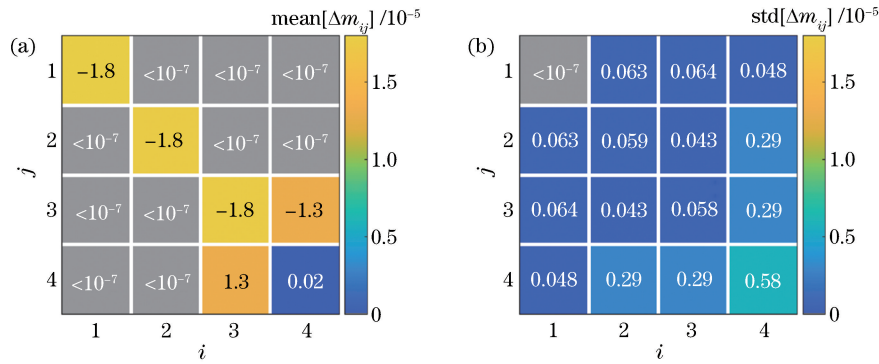


图 4 波片偏振衰减误差模型的预测误差统计值。(a)平均值;(b)标准差

Fig. 4 Statistics of prediction errors by using model of polarization attenuation error of retarder.

(a) Mean value; (b) standard deviation

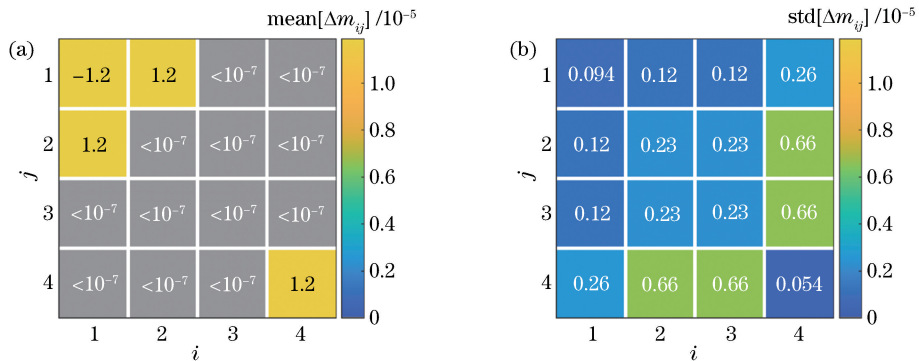


图 5 波片方位角误差模型的预测误差统计值。(a)平均值;(b)标准差

Fig. 5 Statistics of prediction errors by using model of azimuthal-angle error of retarder.

(a) Mean value; (b) standard deviation

5.3 随机误差简化模型的仿真验证

对于两种随机误差源,图 6 给出了两者分别引起的穆勒矩阵误差标准差在整个光瞳上的统计值,这里采用标准差来表示误差分布的不均匀性。可以看出,图像传感器的噪声引起的穆勒矩阵误差与原始穆勒矩阵无关;波片随机方位角误差引起的穆勒矩阵误差在整个光瞳范围内的不均匀性(标准差)在 10^{-5} 数量级,说明这一误差与原始穆勒矩阵关系不大。

(22)式将波片随机方位角误差造成的影响近似等效为光强形式的噪声,并给出了噪声方差的表达式。为验证这一表达式对一定范围内的方位角误差 $\Delta\theta$ 均成立,图 7 给出了原始和预测的光强误差的标准差随 $\Delta\theta$ 的变化关系,这里所用的穆勒矩阵为单位矩阵。由于原始光强误差的标准差来自于 144 次光强仿真统计值,因此这一标准差上下波动。但是,在 $0\sim 0.5^\circ$ 的范围内,波动的中心位置与(22)式预测的相一致,验证了该式的正确性。

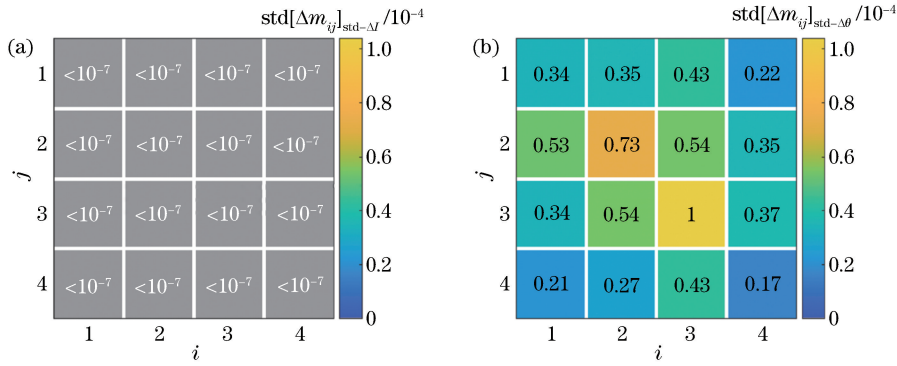


图 6 两种随机误差引起的穆勒矩阵误差分布的统计值。(a)图像传感器噪声;(b)随机方位角误差
Fig. 6 Statistics of error distribution of Mueller matrix caused by two kinds of random error sources.

(a) Image sensor noise; (b) random azimuthal-angle errors of retarders

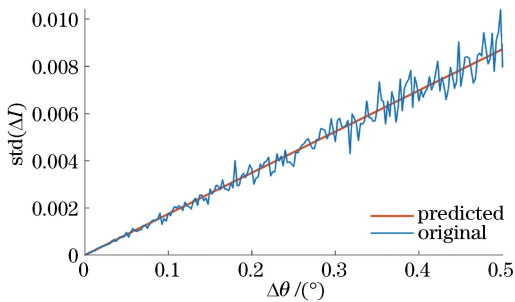


图 7 原始和预测光强误差与波片随机方位角误差的关系
Fig. 7 Relationship between original and predicted intensity errors and random azimuthal-angle error of retarder

将两种随机误差源引起的穆勒矩阵误差(标准差)在整个光瞳范围内取平均,将仿真值与分别按照(17)、(23)式进行计算得到的预测值作对比,分别如图 8 和图 9 所示。

对于图像传感器噪声的影响,由于(17)式基于严格的方差传递公式推导,其预测值与仿真值保持一致;对于波片随机方位角误差的影响,(23)式对非四角元素误差的预测较为准确(误差在 10^{-4} 数量级),但对位于矩阵四个角的元素有不可忽略的误差。

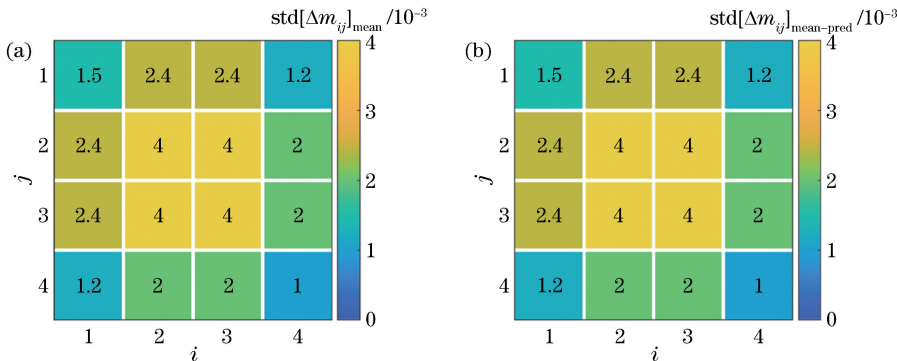


图 8 图像传感器噪声引起的穆勒矩阵误差。(a)原始值;(b)预测值

Fig. 8 Errors of Mueller matrix caused by noise of image sensor. (a) Original values; (b) predicted values

6 结 论

针对穆勒矩阵成像椭偏仪的系统误差源和随机误差源,分别提出了一种基于傅里叶系数近似匹配的简化分析方法和一种基于等效光强噪声的简化模型。采用所提方法和模型全面分析了椭偏仪的 6 种系统误差源和 2 种随机误差源对测得穆勒矩阵的影响,并详细讨论了不同误差源影响的区别与联系。为验证所提简化模型的准确性,对一个典型 1.35NA 光刻投影物镜的穆勒光瞳进行

了含误差源检测仿真。对于 4 种不可忽略的系统误差源产生的影响,简化模型的预测误差在 $10^{-6} \sim 10^{-5}$ 数量级;对于难以从解析角度分析的波片随机方位角误差产生的影响,简化模型的预测误差在 10^{-4} 数量级。所提的两类简化模型,其精度均可满足误差分析和预测的需求,且与同类方法相比具有简单清晰的表达式,适用于穆勒矩阵成像椭偏仪的综合误差评定、误差源指标分解,以及元件误差标定和补偿。

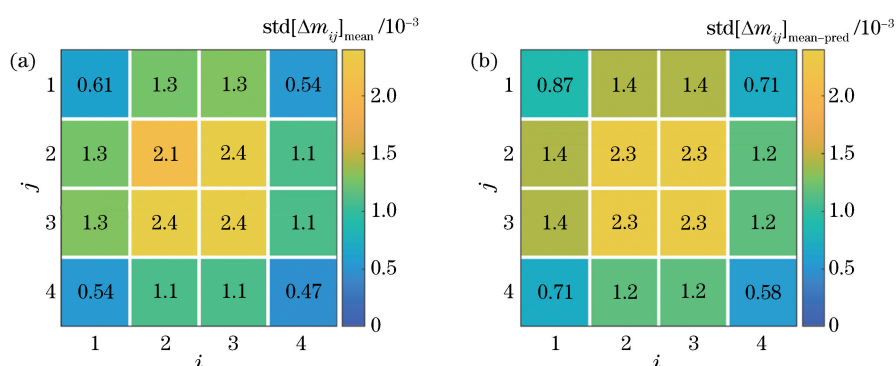


图 9 随机方位角误差引起的穆勒矩阵误差。(a)原始值;(b)预测值

Fig. 9 Errors of Mueller matrix caused by random azimuthal-angle errors of retarders.

(a) Original values; (b) predicted values

参 考 文 献

- [1] Fujii T, Kogo J, Suzuki K, *et al.* Polarization characteristics of state-of-art lithography optics reconstructed from on-body measurement [J]. Proceedings of SPIE, 2008, 6924: 69240Z.
- [2] McGuire J P, Chipman R A. Polarization aberrations in optical systems[J]. Proceedings of SPIE, 1987, 818: 240-257.
- [3] McGuire J P, Chipman R A. Polarization aberrations. 1. Rotationally symmetric optical systems[J]. Applied Optics, 1994, 33(22): 5080-5100.
- [4] Kye J. Polarization aberrations in hyper-numerical-aperture projection printing: a comparison of various representations[J]. Nanolithography, MEMS, and MOEMS, 2006, 5(3): 033001.
- [5] Kye J, McIntyre G, Norihiro Y, *et al.* Polarization aberration analysis in optical lithography systems[J]. Proceedings of SPIE, 2006, 6154: 61540E.
- [6] Totzeck M, Graupner P, Heil T, *et al.* How to describe polarization influence on imaging [J]. Proceedings of SPIE, 2004, 5754: 23-37.
- [7] Pezzaniti J L, Chipman R A. Mueller matrix imaging polarimetry[J]. Optical Engineering, 1995, 34(6): 1558-1568.
- [8] Goldstein D H, Chipman R A. Error analysis of a Mueller matrix polarimeter[J]. Journal of the Optical Society of America A, 1990, 7(4): 693-700.
- [9] Bhattacharyya K, Serrano-García D I, Otani Y. Accuracy enhancement of dual rotating mueller matrix imaging polarimeter by diattenuation and retardance error calibration approach [J]. Optics Communications, 2017, 392: 48-53.
- [10] Nee S M F. Error analysis for Mueller matrix measurement[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2003, 20(8): 1651-1657.
- [11] Savenkov S N, Klimov A S, Oberemok E A. Error in determining Mueller matrix elements and its effect on solution of the inverse problem of polarimetry[J]. Journal of Applied Spectroscopy, 2009, 76(5): 743-751.
- [12] Broch L, En Naciri A, Johann L. Systematic errors for a Mueller matrix dual rotating compensator ellipsometer[J]. Optics Express, 2008, 16(12): 8814-8824.
- [13] Broch L, En Naciri A, Johann L. Second-order systematic errors in Mueller matrix dual rotating compensator ellipsometry[J]. Applied Optics, 2010, 49(17): 3250-3258.
- [14] Anna G, Goudail F. Optimal Mueller matrix estimation in the presence of Poisson shot noise[J]. Optics Express, 2012, 20(19): 21331-21340.
- [15] Meng Z J, Li S K, Wang X Z, *et al.* Jones pupil metrology of lithographic projection lens and its optimal configuration in the presence of error sources [J]. Optics Express, 2019, 27(4): 4629-4647.