

平面微透镜阵列的叠栅放大理论和实验研究

张睿, 曹从军*

西安理工大学印刷包装与数字媒体学院, 陕西 西安 710048

摘要 平面微透镜阵列与匹配的微图案阵列叠合时,会产生叠栅效应,在微透镜阵列立体防伪技术和高精度测量方面具有潜在的应用价值。基于游标叠栅效应原理建立了叠栅图案的放大倍数和方向与微图案阵列层、平面微透镜阵列层矢量之间的关系式,即叠栅图案相对于微图案的放大倍数约等于微透镜阵列周期矢量与平面微透镜阵列、微图案阵列周期矢量差的比值,该公式能够预测微图案映射的位置和大小。采用孔径边长为 0.3 mm、周期为 0.315 mm 的方形孔径平面微透镜阵列与不同周期、角度的微图案贴合进行验证,叠栅图案的位置、大小的实验结果与理论预测一致。

关键词 光学器件;平面微透镜阵列;叠栅图案;周期;放大倍率

中图分类号 O436

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201939.0823001

Theoretical and Experimental Study on Moiré Magnification of Planar Micro-Lens Array

Zhang Rui, Cao Congjun*

Faculty of Printing and Packaging Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an, Shaanxi 710048, China

Abstract The moiré effect, which can expand attractive application in the stereoscopic anti-counterfeiting technology and high-precision measurement of the micro-lens array, will occur when the planar micro-lens array is overlapped with the matching micro-pattern array. The relationship between the magnification factor and the direction of the moiré pattern and the vectors of the micro-pattern array layer and the planar micro-lens array layer is obtained based on the principle of the vernier moiré effect. Consequently, the magnification of the moiré pattern relative to the micro-pattern array is found to be approximately equal to the ratio of the periodic vector of the micro-lens array to the difference of periodic vectors of the planar micro-lens array and the micro-pattern array. The formula can predict the position and size of the micro-pattern mapping. For verification, the square aperture planar micro-lens array with an aperture side length of 0.3 mm and a period of 0.315 mm is applied to the micro patterns with different periods and angles. The experimental results of the location and size of the moiré patterns are consistent with the theoretical predictions.

Key words optical devices; planar micro-lens array; moiré patterns; period; magnification

OCIS codes 230.3990; 120.4120; 350.3950

1 引 言

叠栅条纹是 18 世纪法国研究员莫尔首先发现的一种光学现象,其在高精度测量、图像处理、信号细分和立体防伪等领域均得到广泛应用^[1-3]。基于微透镜阵列的叠栅放大就是将微透镜阵列以合适角度放置于微图案阵列上方,观察者会观察到叠栅条纹的放大和动态变化^[4-5]。

目前,已经有很多方法来探索叠栅的放大规律,

例如阴影成像法^[6]、序数方程法^[7]、游标叠栅效应法^[8]、光谱轨迹法^[9]和傅里叶变换法^[10]等。1994 年, Hutley 等^[8]研究了四边形排列的微透镜与微图案阵列合成的叠栅图案放大,构建了放大系数和方向的数学模型。1998 年, Kamal 等^[11]研究讨论了直立和倒置叠栅条纹放大的条件。1998, Amidror 等^[12]基于傅里叶的方法,将叠栅条纹描述为两个光栅各自光谱的卷积。2014 年,殷贵坤等^[13]将方形孔径平面微透镜阵列元和对应的微图案阵列元之间的间隔视为两

收稿日期: 2019-01-17; 修回日期: 2019-03-29; 录用日期: 2019-05-05

基金项目: 广东省科技厅产学研重大合作项目(2012A090300009)

* E-mail: caocongjun@xaut.edu.cn

个二维的栅线簇,并建立了方形孔径平面微透镜阵列的放大理论模型。2017年,Zheng等^[14]将傅里叶变换和光谱方法相结合,研究一种平面微透镜阵列基于传递矩阵的叠栅放大理论模型。

本文以游标叠栅效应原理^[8]为基础,通过微图案阵列和微透镜阵列的方向、几何布局和周期,来计算合成的叠栅图案的位置和大小。

2 基本原理

基于游标叠栅效应原理^[8],透镜的作用就是对微图案阵列进行采样,并用焦点处与微图案阵列相关的信息填充透镜的孔径。如果透镜阵列与微图案阵列间距完全相同,且孔径对准,所有透镜将观察到对应微图案的相同区域,这就对应于一个“散开”的边缘,即无穷大。当两个阵列的周期略有不同时,则每个透镜将观察到在其下方的微图案上相邻的区域,并在其上方观察到建立的微图案采样图像。当透镜阵列与微图案阵列相差一个周期时(对应一个叠栅条纹),采样过程将再次开始。

假设在第 n 个微透镜时,透镜阵列与微图案阵列相差一个周期,因此

$$na = (n + 1)b, \quad (1)$$

$$n = \frac{b}{a - b} = \frac{a}{\Delta}, \quad (2)$$

式中: a 为微透镜阵列周期; b 为微图案阵列周期; n 为叠栅图案相对于微图案的放大倍率; $a \approx b, \Delta = a - b$,叠栅图案相对于微图案的放大倍率为 a/Δ 。

由此可见,放大倍数随着阵列间距趋于零而趋于无穷大,而无限放大相当于一个散开的叠栅条纹。

当透镜阵列和微图案阵列具有相同的间距,且一个阵列相对于另一个阵列旋转时,也会出现叠栅条纹。如果转向角为 θ ,周期为 a ,则每个阵列在另一个阵列轴上的投影周期为 $a \cos \theta$ 。周期差为

$$\Delta = (1 - \cos \theta)a. \quad (3)$$

放大倍率约为

$$\frac{a}{\Delta} = \frac{1}{1 - \cos \theta}. \quad (4)$$

3 二维平面微透镜阵列叠栅放大理论分析

如图 1 所示,假设平面微透镜阵列、微图案阵列和叠栅图案周期用原始向量 $[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]$ 、 $[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]$ 和 $[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2]$ 表示。其中 \mathbf{r}_1 为平面微透镜阵列的横向周期矢量; \mathbf{r}_2 为平面微透镜阵列的纵向周期矢量; \mathbf{b}_1 为微图案阵列的横向周期矢量; \mathbf{b}_2 为微图案阵列的纵向周期矢量。由图 1 可知,在笛卡尔坐标系中,平面微透镜阵列和微图案阵列在 e_x, e_y 方向的周期

可表示为 $\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \cos \theta & \mathbf{r}_2 \cos(\theta + \beta) \\ \mathbf{r}_1 \sin \theta & \mathbf{r}_2 \sin(\theta + \beta) \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \cos \alpha \\ 0 & \mathbf{b}_2 \sin \alpha \end{bmatrix}$,根据游标叠栅效应原理,叠栅图案相对于微图案的放大倍数约等于微透镜阵列周期矢量与平面微透镜阵列和微图案阵列周期矢量差的比值,即

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 \cos \gamma & \mathbf{m}_2 \cos(\gamma + \varphi) \\ \mathbf{m}_1 \sin \gamma & \mathbf{m}_2 \sin(\gamma + \varphi) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \cos \alpha \\ 0 & \mathbf{b}_2 \sin \alpha \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \cos \theta & \mathbf{r}_2 \cos(\theta + \beta) \\ \mathbf{r}_1 \sin \theta & \mathbf{r}_2 \sin(\theta + \beta) \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \cos \alpha \\ 0 & \mathbf{b}_2 \sin \alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \cos \theta & \mathbf{r}_2 \cos(\theta + \beta) \\ \mathbf{r}_1 \sin \theta & \mathbf{r}_2 \sin(\theta + \beta) \end{bmatrix} \right\}^{-1}, \quad (5)$$

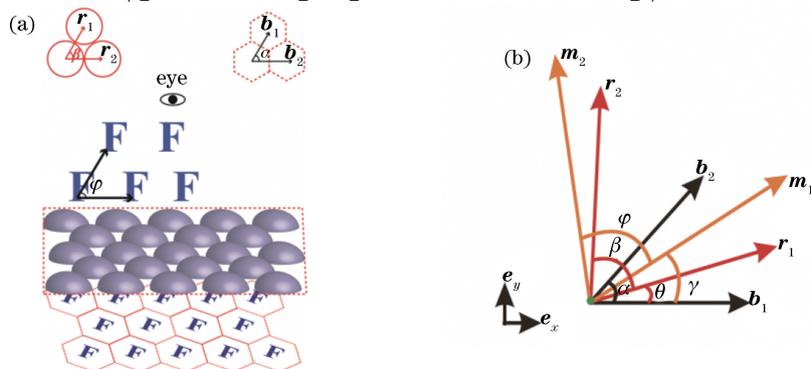


图 1 平面微透镜阵列叠栅放大示意图^[14]。(a)二维图像叠栅放大示意图;(b)各变量定义图
Fig. 1 Schematic of moiré magnification with planar micro-lens array^[14]. (a) Schematic of two-dimensional image moiré magnification; (b) definition diagram of each variable

式中:平面微透镜阵列矢量 \mathbf{r}_1 、 \mathbf{r}_2 之间的夹角为 β ; θ 为旋转角; α 为微图案矢量 \mathbf{b}_1 、 \mathbf{b}_2 之间的夹角; φ 为叠栅图案阵列矢量 \mathbf{m}_1 、 \mathbf{m}_2 之间的夹角; γ 为叠栅图

案阵列转向角。

根据(5)式可得

$$K_1 = \frac{|\mathbf{m}_1|}{|\mathbf{b}_1|} = \frac{|\mathbf{r}_1| \sqrt{|\mathbf{r}_2|^2 \sin^2 \beta + |\mathbf{b}_2|^2 \sin^2 \alpha - 2 |\mathbf{r}_2| |\mathbf{b}_2| \sin \alpha \sin \beta \cos \theta}}{||\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_2| \sin \beta + |\mathbf{b}_1| |\mathbf{b}_2| \sin \alpha + |\mathbf{r}_1| |\mathbf{b}_2| \sin(\theta - \alpha) - |\mathbf{b}_1| |\mathbf{r}_2| \sin(\theta + \beta)|}, \quad (6)$$

$$K_2 = \frac{|\mathbf{m}_2|}{|\mathbf{b}_2|} = \frac{\mathbf{r}_2 \sqrt{|\mathbf{r}_1|^2 \sin^2 \beta + |\mathbf{b}_1|^2 \sin^2 \alpha - 2 |\mathbf{r}_1| |\mathbf{b}_1| \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha - \beta - \theta)}}{||\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_2| \sin \beta + |\mathbf{b}_1| |\mathbf{b}_2| \sin \alpha + |\mathbf{r}_1| |\mathbf{b}_2| \sin(\theta - \alpha) - |\mathbf{b}_1| |\mathbf{r}_2| \sin(\theta + \beta)|}, \quad (7)$$

$$\cos \gamma = \frac{|\mathbf{b}_2| \sin \alpha \cos \theta - |\mathbf{r}_2| \sin \beta}{\sqrt{|\mathbf{r}_2|^2 \sin^2 \beta + |\mathbf{b}_2|^2 \sin^2 \alpha - 2 |\mathbf{r}_2| |\mathbf{b}_2| \sin \alpha \sin \beta \cos \theta}}, \quad (8)$$

$$\sin \gamma = \frac{|\mathbf{b}_2| \sin \alpha \sin \theta}{\sqrt{|\mathbf{r}_2|^2 \sin^2 \beta + |\mathbf{b}_2|^2 \sin^2 \alpha - 2 |\mathbf{r}_2| |\mathbf{b}_2| \sin \alpha \sin \beta \cos \theta}}, \quad (9)$$

$$\cos(\gamma + \varphi) = \frac{|\mathbf{b}_1| \sin \alpha \cos(\theta + \beta) - |\mathbf{r}_1| \cos \alpha \sin \beta}{\sqrt{|\mathbf{r}_1|^2 \sin^2 \beta + |\mathbf{b}_1|^2 \sin^2 \alpha - 2 |\mathbf{r}_1| |\mathbf{b}_1| \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha - \beta - \theta)}}, \quad (10)$$

$$\sin(\gamma + \varphi) = \frac{|\mathbf{b}_1| \sin \alpha \sin(\theta + \beta) - |\mathbf{r}_1| \sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{|\mathbf{r}_1|^2 \sin^2 \beta + |\mathbf{b}_1|^2 \sin^2 \alpha - 2 |\mathbf{r}_1| |\mathbf{b}_1| \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha - \beta - \theta)}}, \quad (11)$$

式中: K_1 为叠栅图案阵列矢量 \mathbf{m}_1 与其对应微图案阵列矢量 \mathbf{b}_1 的长度比; K_2 为叠栅图案阵列矢量 \mathbf{m}_2 与其对应微图案阵列矢量 \mathbf{b}_2 的长度比。

4 实验分析

采用孔径边长为 0.3 mm, 近邻方形孔中间距为 0.315 mm 的方形孔径平面微透镜阵列 ($|\mathbf{r}_1| = |\mathbf{r}_2| = 0.315$ mm, $\beta = 90^\circ$) 与不同周期的微图案相贴合, 观察叠栅图案的显示效果, 计算叠栅图案的放大倍率和转向角的理论值与实验值。

研究微图案横纵周期作相同变化时, 平面微透镜阵列对不同周期微图案阵列的放大效果。因此制作周期不同的微图案阵列, 微图案单元为边长为

127 μm 的正方形, $\alpha = 90^\circ$, 实验结果如图 2 所示。其中, 图 2(a) 为微图案横纵周期作相同变化时, 叠栅图案的显示效果图, 从左到右, 从上到下微图案阵列周期依次为 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324 μm 。其中, 由于微图案阵列周期为 313 μm 时, 叠栅图案放大倍率为无穷大, 所以图中未列出微图案阵列周期为 313 μm 时, 叠栅图案放大倍率的理论值与实验值)。

研究微图案横纵周期相同且不变时, 平面微透镜阵列在不同角度下对微图案阵列的放大效果和叠栅图案的偏转角度。因此制作的微图案阵列 $|\mathbf{b}_1| = |\mathbf{b}_2| = 0.310$ mm, $\alpha = 90^\circ$, 微图案单元为边长为

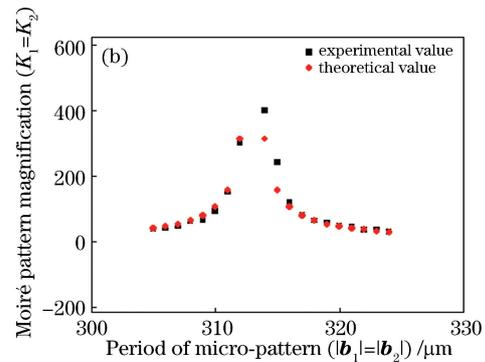
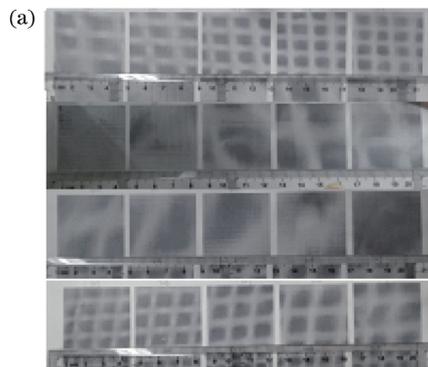


图 2 微图案周期作相同变化时, 叠栅图案的实验图。(a) 叠栅图案显示效果图; (b) 叠栅图案放大倍率理论值与实验值的对比图
Fig. 2 Experimental results of moiré pattern when period of micro-pattern changes in the same way. (a) Moiré pattern display effect; (b) comparison between theoretical and experimental values of moiré pattern magnification factor

127 μm 的正方形,实验结果如图 3 所示。其中,图 3(a)为微透镜转向角 θ 变化时,叠栅图案的显示效果图,从左到右、从上到下微透镜转向角 θ 依次为

14°,13°,12°,11°,10°,9°,8°,7°,6°,5°,4°,3°,2°,1°,0°,−1°,−2°,−3°,−4°,−5°,−6°,−7°,−8°,−9°,−10°,−11°,−12°。

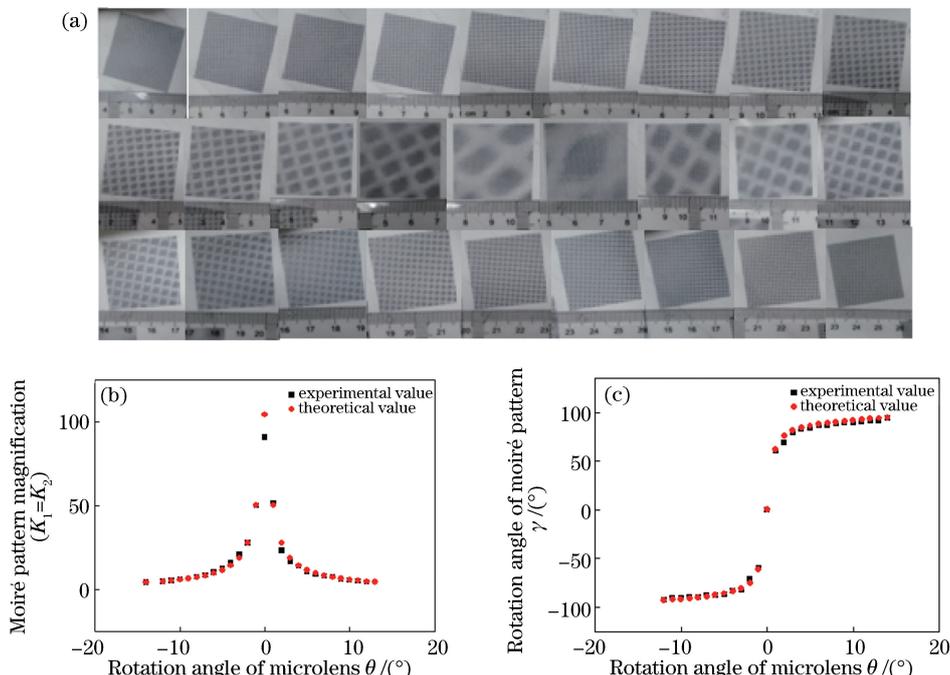


图 3 微透镜转向角 θ 变化时,叠栅图案的实验图 ($|\mathbf{b}_1|=|\mathbf{b}_2|$)。(a)叠栅图案显示效果图;(b)叠栅图案放大倍率理论与实验值的对比图;(c)叠栅图案转向角 γ 理论与实验值的对比图

Fig. 3 Experimental results of moiré pattern when rotation angle of micro-lens θ changes ($|\mathbf{b}_1|=|\mathbf{b}_2|$). (a) Moiré pattern display effect; (b) comparison between theoretical and experimental values of moiré pattern magnification factor; (c) comparison between theoretical and experimental values of rotation angle γ of moiré pattern

研究微图案横纵周期单独变化时,平面微透镜阵列对不同周期的微图案阵列的放大效果。制作不同周期的微图案阵列,微图案单元为边长 127 μm 的正方形, $\alpha=90^\circ$,实验结果如图 4 所示。其中,图 4(a)为微图案横向周期 $|\mathbf{b}_1|=305 \mu\text{m}$ 、纵向周期 $|\mathbf{b}_2|$ 变化时,叠栅图案的显示效果图,从左到右、从上到下微图案阵列周期依次为 317,319,321,323,325,327,329,331,333 μm 。图 4(b)为微图案纵向周期 $|\mathbf{b}_2|=297 \mu\text{m}$ 、横向周期变化 $|\mathbf{b}_1|$ 时,叠栅图案的显示效果图,从左到右、从上到下微图案阵列周期依次为 321,323,325,327,329,331,333,335,337 μm 。

研究微图案横纵周期不同时,平面微透镜阵列在不同角度下对微图案阵列的放大效果和叠栅图案的偏转角度。因此制作微图案阵列 $|\mathbf{b}_1|=0.333 \text{ mm}$ 、 $|\mathbf{b}_2|=0.297 \text{ mm}$ 、 $\alpha=90^\circ$,微图案单元为边长 127 μm 的正方形,实验结果如图 5 所示。其中,图 5(a)为微透镜转向角 θ 变化时叠栅图案的显示效果图,从左到右、从上到下微依次为 7°,6°,5°,

4°,3°,2°,1°,0°,−1°,−2°,−3°,−4°,−5°,−6°,−7°。其中,由于微透镜转向角 θ 为−3°和 3°时,由于叠栅图案放大倍率太大,在 5 cm×5 cm 的测试文件中无法获得一个完整的叠栅图案,无法进行测量,所以图 5(b)、(c)、(d)中未列出微透镜转向角 θ 为−3°和 3°时,叠栅图案放大倍率转向角 γ 和转向角与跨距角之和 $\gamma+\psi$ 的理论值与实验值。

由图 2~5 可知,建立二维叠栅图案放大关系式的理论值与实验值基本相同,且误差较小,证明此理论分析的正确性与合理性。

5 结 论

基于游标叠栅效应原理建立了二维平面微透镜阵列叠栅放大的关系式,且叠栅图案相对于微图案的放大倍数约等于微透镜阵列周期矢量与平面微透镜阵列、微图案阵列周期矢量差的比值。该关系式可根据平面微透镜阵列和微图案的方向、几何布局和周期计算合成叠栅图案的位置和大小。经实验验证,发现叠栅图案方向和大小的实验值和理论值

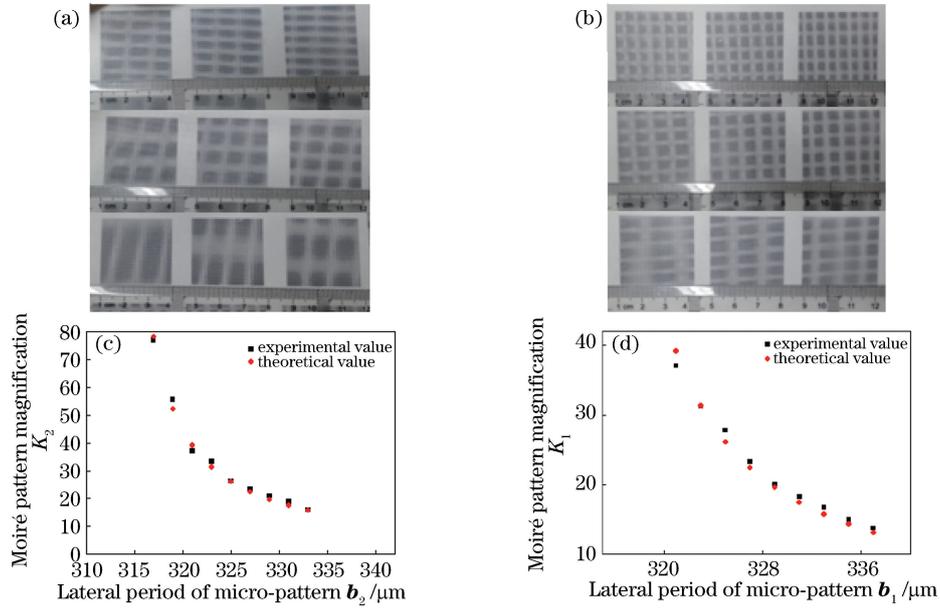


图 4 微图案横、纵周期单独变化时，叠栅图案实验结果。(a)微图案纵向周期 $|b_2|$ 变化时，叠栅图案显示效果图；(b)微图案横向周期 $|b_1|$ 变化时，叠栅图案显示效果图；(c)微图案纵向周期 $|b_2|$ 变化时，叠栅图案放大倍率 K_2 理论值与实验值的对比图；(d)微图案横向周期 $|b_1|$ 变化时，叠栅图案放大倍率 K_1 理论值与实验值的对比图

Fig. 4 Moiré pattern experiment results when the lateral and longitudinal periods of the micro-pattern are changed separately. (a) Moiré pattern display effect when the longitudinal period of micro-pattern $|b_2|$ changes; (b) moiré pattern display effect when the lateral period of micro-pattern $|b_1|$ changes; (c) comparison between theoretical and experimental values of moiré pattern magnification K_2 when the longitudinal period of micro-pattern $|b_2|$ changes; (d) comparison between theoretical and experimental values of moiré pattern magnification K_1 when the lateral period of micro-pattern $|b_1|$ changes

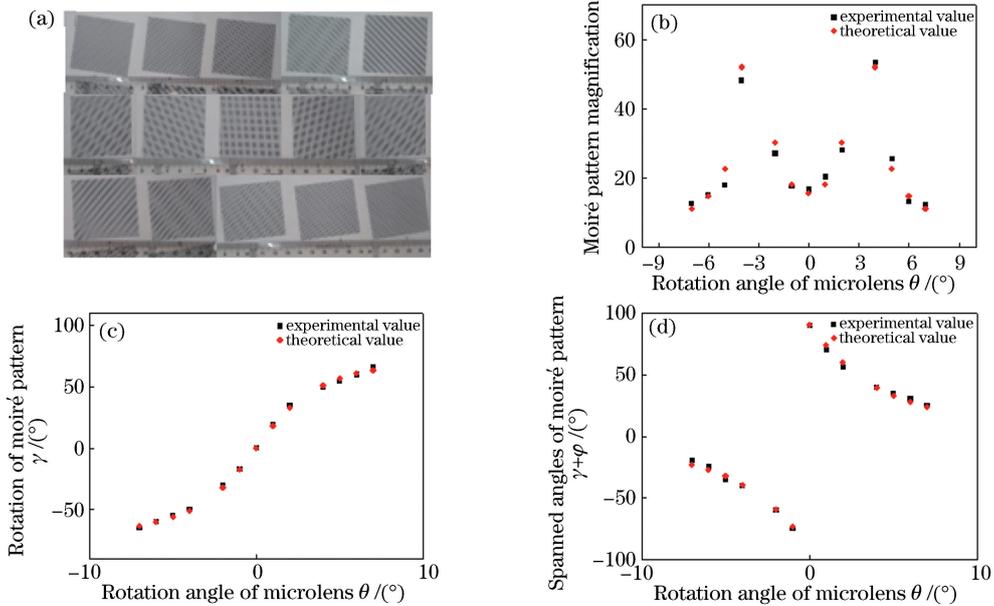


图 5 微透镜转向角 θ 变化时，叠栅图案的实验图 ($|b_1| \neq |b_2|$)。 (a) 叠栅图案显示效果图；(b) 叠栅图案放大倍率 K_1 理论值与实验值的对比图；(c) 叠栅图案转向角 γ 理论值与实验值的对比图；(d) 叠栅图案转向角与跨距角之和 $\gamma+\varphi$ 理论值与实验值对比图

Fig. 5 Experimental results of moiré pattern when rotation angle of micro-lens θ changes ($|b_1| \neq |b_2|$). (a) Moiré pattern display effect; (b) comparison between theoretical and experimental values of moiré pattern magnification factor K_1 ; (c) comparison between theoretical and experimental values of rotation angle γ of moiré pattern; (d) comparison between theoretical and experimental values of sum of rotation angle and spanned angle $\gamma+\varphi$ of moiré pattern

相吻合。该关系式丰富了平面微透镜阵列的理论内容,可直接用于设计不同的裸眼 3D 显示效果,在一定程度上推动了叠栅效应在微透镜阵列立体防伪技术和高精度测量之间的结合应用。

参 考 文 献

- [1] Ri S E, Hayashi S, Ogihara S, *et al.* Accurate full-field optical displacement measurement technique using a digital camera and repeated patterns [J]. *Optics Express*, 2014, 22(8): 9693-9706.
- [2] Trivedi S, Dhanotia J, Prakash S. Measurement of focal length using phase shifted moire deflectometry [J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2013, 51(6): 776-782.
- [3] Wang B Z, Li W J, Peng K, *et al.* Time domain subdivision method for optical grating signal based on time series analysis [J]. *Nanotechnology and Precision Engineering*, 2018, 1(1): 48-53.
王宝珠, 李文娟, 彭凯, 等. 基于时间序列分析的光栅信号时域细分方法 [J]. *纳米技术与精密工程*, 2018, 1(1): 48-53.
- [4] Steenblik R A, Hurt M J, Jordan G R. Micro-optic security and image presentation system: US8111462 [P/OL]. 2012-07-02[2019-01-10]. <https://patents.google.com/patent/US8111462B2/en>.
- [5] Crane T T, Mörck-Hamilton K, Maraschi M, *et al.* A micro-optic film structure that alone or together with a security document or label projects images spatially coordinated with static images and/or other projected images: US8284492 [P/OL]. 2012-10-09 [2019-01-10]. <https://patents.google.com/patent/US8284492B2/en>.
- [6] Post D. Analysis of moire fringe multiplication phenomena[J]. *Applied Optics*, 1967, 6(11): 1938-1942.
- [7] Kong L S, Liu C Y, Zhang Y, *et al.* Progress on removing moiré patterns in parallax autostereoscopic displays[J]. *Chinese Journal of Liquid Crystals and Displays*, 2014, 29(3): 441-449.
孔令胜, 刘春雨, 张元, 等. 视差自由立体显示中莫尔条纹消除的研究进展 [J]. *液晶与显示*, 2014, 29(3): 441-449.
- [8] Hutley M C, Hunt R, Stevens R F, *et al.* The moire magnifier[J]. *Pure and Applied Optics: Journal of the European Optical Society Part A*, 1994, 3(2): 133-142.
- [9] Saveljev V, Kim S K. Theoretical estimation of moire effect using spectral trajectories [J]. *Optics Express*, 2013, 21(2): 1693-1712.
- [10] Patorski K, Yokozeki S, Suzuki T. Moire profile prediction by using Fourier series formalism [J]. *Japanese Journal of Applied Physics*, 1976, 15(3): 443-456.
- [11] Kamal H, Völkel R, Alda J. Properties of moire magnifiers[J]. *Optical Engineering*, 1998, 37(11): 3007-3014.
- [12] Amidror I, Hersch R D. Fourier-based analysis and synthesis of moires in the superposition of geometrically transformed periodic structures [J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1998, 15(5): 1100-1113.
- [13] Yin G K, Zhou S M, Zhang B H. Theoretical and experimental study of two-dimensional moire fringe of square aperture planar microlens array [J]. *Acta Optica Sinica*, 2014, 34(s2): s223002.
殷贵坤, 周素梅, 张宝昊. 方形孔径平面微透镜阵列的二维叠栅条纹理论和实验研究 [J]. *光学学报*, 2014, 34(s2): s223002.
- [14] Zheng W W, Shen S, Gao Y L, *et al.* Design methodology for moire magnifier based on micro-focusing elements [J]. *Optics Express*, 2017, 25(25): 31746-31757.