

Lieb 晶格相对格点强度对异相八极光束传输的影响

章晓伟, 覃亚丽*, 任宏亮, 薛林林

浙江工业大学信息工程学院光纤通信与信息工程研究所, 浙江 杭州 310023

摘要 以最小周期单元包含 5 个格点的新型 Lieb 晶格(Lieb-5)为平台,将 Lieb-5 晶格的格点根据其空间位置分成中心格点和边缘格点,用光束传输法研究具有不同强度值的两组格点对异相八极光束传输的影响。仿真结果表明:无论是采用格点入射还是非格点入射,当中心格点的强度小于边缘格点的强度(两组格点强度为 2:3)时,光束在传输过程中始终保持八峰形状,呈现出强局域性;否则,光束在传播过程中无法始终保持八峰结构,入射格点之间的能量随着传播距离的增加而呈周期性地相互耦合,呈现出一种弱局域性;原因是 Lieb-5 晶格特有的拓扑结构产生的几何阻挫性能抑制了光束的离散衍射,若晶格的束缚性、光束的衍射效应和异相光束的相互作用达到平衡,则能保持八峰结构,否则光束不能始终保持八峰结构。

关键词 非线性光学; Lieb 晶格; 光束传输法; 异相八极光束

中图分类号 O437

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201939.0819001

Effect of Relative Lattice Intensity of Lieb Lattice on Propagation of Out-of-Phase Octupole Beam

Zhang Xiaowei, Qin Yali*, Ren Hongliang, Xue Linlin

Institute of Optical-Fiber Communication and Information Engineering, College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou, Zhejiang 310023, China

Abstract In the present study, a novel Lieb lattice with five points (hereinafter referred to as the Lieb-5 lattice) in the minimum periodic unit is used as a platform. The sites of Lieb-5 lattices are classified into two categories according to their spatial positions, namely, the center and edge lattices. Using the beam-propagation method, we investigate the effects of different intensities of two sets of lattices on out-of-phase octupole-beam propagation. The ratio of the intensities of the two lattice categories is 2:3; further, according to simulation results for either an on-site or off-site incident, when the intensity of the center lattice is less than that of the edge lattice, as in this case, an eight-peak shape with strong localization is maintained during beam propagation. Otherwise, the beam barely maintains the shape of the eight peaks in the propagation process. The energy between the incident lattices is periodically coupled with the increase of propagation distance, presenting weak localization, because the geometric frustration of the Lieb-5 lattice caused by its unique topological structure inhibits the discrete diffraction of light beams. If the binding property of the lattices, diffraction of the beam, and interaction of the out-of-phase beam stay in balance, the eight-peak structure can be maintained; otherwise, the beam cannot always maintain the eight-peak structure.

Key words nonlinear optics; Lieb lattice; beam propagation method; out-of-phase octupole beam

OCIS codes 190.4400; 260.2160; 190.6135

1 引 言

光局域一直是人们关注的热点。要使光束在传输时保持局域,除了使用无衍射光束^[1]外,还可以利

用光子晶格。在光子晶格中实现光局域有许多方法,如:对光子晶格添加无序结构^[2]、利用非线性调制^[3]、制造缺陷^[4]。此外,还有另一种实现光局域的方法:依靠具有平带的光子晶格自身的几何拓扑结

收稿日期: 2019-02-21; 修回日期: 2019-03-25; 录用日期: 2019-04-01

基金项目: 国家自然科学基金(61675184,61275124)

* E-mail: ylqin@zjut.edu.cn

构实现光局域。1989年, Lieb^[5]利用多带哈伯德模型对铁磁材料进行研究时发现了具有完全平坦能带的空间周期结构, Lieb晶格^[6-8]就是其中之一。对二维晶体中拓扑平坦能带的研究有助于实现拓扑绝缘体^[9]和理解分数量子霍尔效应^[10-11]等概念。平带可实现光局域和无衍射, 平带系统可以应用在图像传输领域。由于平带模的线性叠加态仍具有局域特性, 因此通过平带模的线性叠加可以实现图像的无衍射传输^[12]。2015年, Mukherjee等^[6]利用激光直写技术制作了Lieb晶格, 并在实验中观测到了光子Lieb晶格的平带模。2016年, Xia等^[12]将两种不同周期的四方晶格进行叠加, 在自散焦非线性介质中通过光诱导产生了Lieb晶格, 实现了简单图像在Lieb晶格中的无衍射传输。2017年, Wan等^[13]提出一种光力学Lieb晶格, 研究了光子和声子的平带特性。通常所说的Lieb晶格的最小周期单元包含3个格点, Zhang等^[14]提出了一类新型的Lieb晶格: Lieb-5晶格和Lieb-7晶格, 其最小周期单元分别包含5个格点和7个格点, 并且通过数值仿真研究了Lieb-5晶格和Lieb-7晶格中的平带模分布。

光诱导光子晶格中的高阶模孤子^[15-17]得到了持续研究。高阶模孤子是指强度有两个或两个以上峰值的孤子, 可作为承载大量信息的“波包”实现空分复用, 其中研究得较多的是偶极孤子和四极孤子^[18-23]。2008年, Efremidis^[24]在非线性介质中研究了各阶孤子的形成条件以及边界值对孤子的影响。同年, Meng等^[25]研究了单模介质波导中高阶孤子的演化。2004年, Yang等^[20]研究了偶极孤子和四极孤子。2016年, 杨斌等^[26]研究了光诱导方形晶格中的偶极孤子。2017年, 覃亚丽等^[27]对自聚焦光诱导四方晶格中的四极孤子进行了研究。2018年, Du等^[28]对高阶孤子的非线性动力学进行了数值仿真。

多极孤子可用于对信息的空分复用, 从而提高

信道容量。因此, 本文通过数值仿真研究Lieb-5晶格中格点的相对强度对异相八极光束传输的影响。根据Lieb-5晶格基本单元中的5个格点的空间位置将其分为两组(一组为1个中心格点, 另一组为4个边缘格点), 通过调节这两组格点的相对强度比, 研究光束在Lieb-5晶格中的传输现象, 以及异相八极光束在Lieb-5晶格中的无衍射传输。

2 基本原理

2.1 理论模型

光诱导光子晶格是一种由紧间隔排列的波导阵列组成的光子学微结构, 是研究光在周期结构中传播行为的较理想的研究平台^[29]。异相八极光束在晶格中的传输满足非线性薛定谔方程^[26,30], 即

$$i \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\Gamma}{1 + I_L + |U|^2} U = 0, \quad (1)$$

式中: U 为入射光场的归一化慢变包络; I_L 为Lieb-5晶格的强度分布(用晶体背景光进行归一化); Γ 为外加电压系数; x 和 y 为横向坐标; z 为传播距离。本文实验平台的非线性介质为铌酸锶钡(SBN)晶体, 仿真数据取自实验光路系统。横向坐标 x 和 y 由入射光束的宽度 x_0 进行归一化, 传播距离 z 由光束的衍射长度 $k_0 n_e x_0^2$ 进行归一化, 其中 k_0 为波数, n_e 为非寻常光(e光)在SBN晶体中的折射率。取 $x_0 = 14 \mu\text{m}$, $n_e = 2.33$, $k_0 = 2\pi/\lambda_0$, 其中半导体激光器的波长 $\lambda_0 = 532 \text{ nm}$, 传输一个 z 单位距离相当于实际传输了 5.73 mm 。外加电压系数 $\Gamma = k_0 n_e^4 \gamma_{33} E_0 x_0^2 / 2$, 其中 E_0 为外加电场强度, SBN晶体电光系数 $\gamma_{33} = 235 \text{ pm/V}$ 。

2.2 Lieb-5晶格

Lieb晶格可以由两种周期不同的四方晶格叠加得到(周期之比为2:1)^[5], 类似地, 本文研究的Lieb-5可以用两种周期之比为3:1四方晶格进行叠加, 再通过自散焦非线性光诱导形成。本文中Lieb-5晶格可以描述为

$$I_L(X, Y) = \begin{cases} I_A \sin^2 3(X - iD) \sin^2 3(Y - jD), & iD \leq X < (i + 1/3)D, jD \leq Y < (j + 1/3)D \\ I_B \sin^2 3(X - iD) \sin^2 3(Y - jD), & iD \leq X < (i + 1/3)D, (j + 1/3)D \leq Y < (j + 2/3)D \\ I_B \sin^2 3(X - iD) \sin^2 3(Y - jD), & iD \leq X < (i + 1/3)D, (j + 2/3)D \leq Y < (j + 1)D \\ I_B \sin^2 3(X - iD) \sin^2 3(Y - jD), & (i + 1/3)D \leq X < (i + 2/3)D, jD \leq Y < (j + 1/3)D \\ I_B \sin^2 3(X - iD) \sin^2 3(Y - jD), & (i + 2/3)D \leq X < (i + 1)D, jD \leq Y < (j + 1/3)D \\ 0, & \text{others,} \end{cases} \quad (2)$$

式中: X 和 Y 为横向纵向坐标; D 为晶格周期; $i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$; I_A 和 I_B 分别为中心格点 A 和边缘格点 B 对应的晶格强度。

把 Lieb-5 晶格基本单元中的格点分为两组: 中心格点 A 和边缘格点 B , 如图 1(a) 所示。图 1(b) 所示为 Lieb-5 晶格的强度分布, 白色方框中为 Lieb-5 晶格的最小周期单元。光子晶格空间分布的周期性使其在动量空间中存在带隙结构, 在三种情

况 ($I_A < I_B$, $I_A = I_B$, $I_A > I_B$) 下计算 Lieb-5 晶格的布洛赫带, 带隙结构分布如图 2 所示, 其中 k_x 、 k_y 、 β 分别为 x 、 y 、 z 方向的波矢分量。在紧束缚近似^[31]和适当的晶格周期条件下, Lieb-5 晶格的第二带和第四带是完全平坦的。根据实验光路系统的 Lieb-5 晶格的分布情况, 计算时需要考虑次邻近格点之间的耦合作用, 因此平带略微下凹, 并没有呈现完美的平坦态。

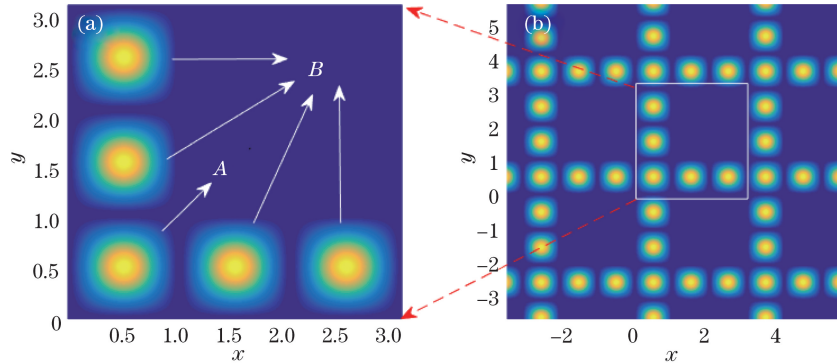


图 1 Lieb-5 晶格的 (a) 基本单元与 (b) 强度分布

Fig. 1 (a) Unit cell and (b) intensity profile of Lieb-5 lattices

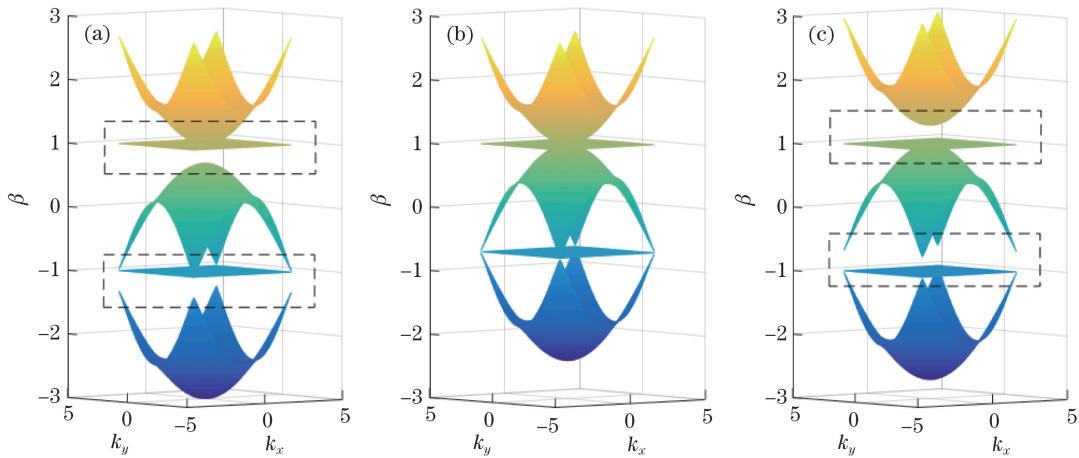


图 2 不同 $I_A:I_B$ 下 Lieb-5 晶格的布洛赫带。(a) $I_A:I_B = 2:3$; (b) $I_A:I_B = 2:2$; (c) $I_A:I_B = 3:2$

Fig. 2 Lieb-5 lattice Bloch bands at different ratios of $I_A:I_B$. (a) $I_A:I_B = 2:3$; (b) $I_A:I_B = 2:2$; (c) $I_A:I_B = 3:2$

由图 2(a)~(c) 可知, 通过调整中心格点和边缘格点的相对强度比, Lieb-5 晶格平带的位置会有所改变 (如黑色虚线方框内所示), 带隙会打开, 说明改变两组格点的相对强度能改变布洛赫带结构, 进而能控制 Lieb-5 晶格的平带在布洛赫带结构中的相对位置。

2.3 八极光束

使用异相八极光束, 光束的强度截面上存在 8 个峰, 相邻峰之间的相位差为 π 。输入的 8 束异相

高斯光束的数学模型为 $U(x, y) = U_0 \sum_{n=1}^8 (-1)^n Z_n$,

其中: U_0 为光束的最大振幅, 实验平台晶格光与探测光的强度之比为 8:1, 因此取 $U_0 = 3$; n 为高斯光束的数量; $Z_n = \exp\{-[(x+a_n)^2 + (y+b_n)^2]/\sigma^2\}$, a_n 和 b_n 为单束高斯光入射位置, σ 为光束宽度, 基于单束高斯光束宽度可与格点大小 (光诱导的光子晶格半径大小) 比拟的原则, 取 $\sigma = 0.3$ 。

采用格点入射和非格点入射两种方式研究异相八极光束在 Lieb-5 晶格中的传输情况。图 3(a) 和图 3(e) 中白色圆圈中的格点为光束的入射位置, 图 3(a) 所示为异相八极光束从以 A 格点为中心的 8 个 B 格点入射, 称为格点入射, 图 3(e) 中异相八

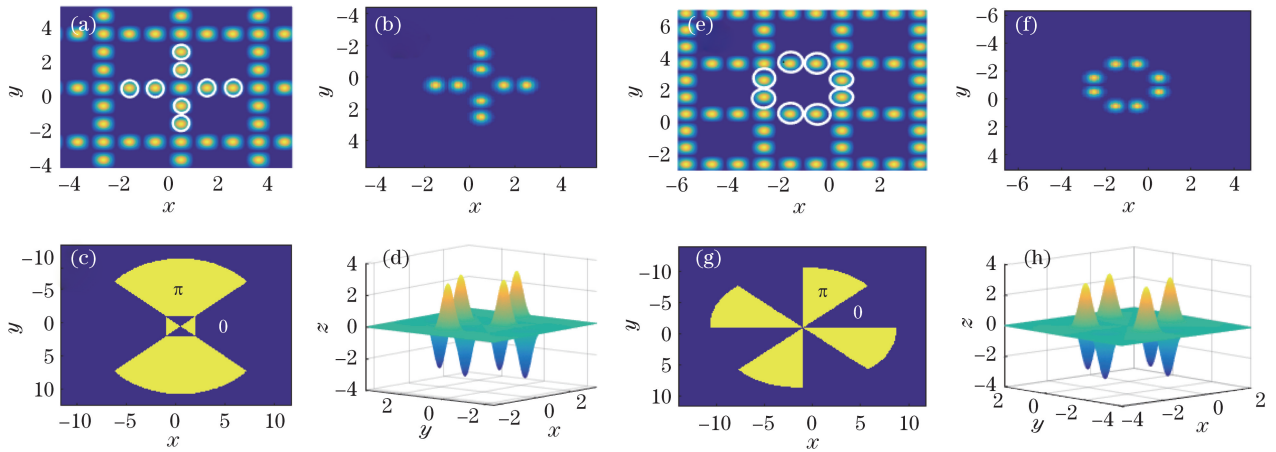


图 3 异相八极光束。(a)格点入射异相八极光束的格点位置;(b)格点入射异相八极光束的二维强度图;(c)格点入射异相八极光束对应的相位图;(d)格点入射异相八极光束的三维强度图;(e)非格点入射异相八极光束的格点位置;(f)非格点入射异相八极光束的二维强度图;(g)非格点入射异相八极光束对应的相位图;(h)非格点入射异相八极光束的三维强度图

Fig. 3 Out-of-phase octupole beams. (a) Lattice position of on-site incident out-of-phase octupole beam ; (b) two-dimensional intensity profile of on-site incident out-of-phase octupole beam; (c) beam phase pattern of on-site incident out-of-phase octupole beam; (d) three-dimensional intensity profile of on-site incident out-of-phase octupole beam; (e) lattice position of off-site incident out-of-phase octupole beam; (f) two-dimensional intensity profile of off-site incident out-of-phase octupole beam; (g) beam phase pattern of off-site incident out-of-phase octupole beam; (h) three-dimensional intensity profile of off-site incident out-of-phase octupole beam

极光束的中心没有位于晶格点上,称为非格点入射。图 3(c)和图 3(g)所示为入射光束对应的相位图,相邻波峰异相,相位差为 π 。

3 数值仿真结果与分析

利用光束传输法仿真异相八极光束的演化过程,光束在 Lieb-5 晶格中共传输 9.6 个单位,每隔 2.4 个单位取一个光束强度的截面图。以下分别讨论在格点入射和非格点入射情况下,Lieb-5 晶格中两组格点的相对格点强度对异相八极光束传输的影响。

3.1 格点入射

格点入射时,对应计算带隙结构的相对格点强度比,同样考虑 $I_A = I_B$ 、 $I_A < I_B$ 和 $I_A > I_B$ 3 种情况。先设定 A 格点的强度与 B 格点的强度相等 ($I_A = I_B$),两组格点的相对强度为 $I_A : I_B = 2 : 2$,光束传播如图 4(a0)~(a4)所示。由图 4(a1)可知,当光束传输 2.4 个单位时,左上角 4 个入射格点(白色圆圈所示)上的大部分能量保持局域,右下角 4 个入射格点上的能量不能被很好地局域在入射位置,部分能量逐渐耦合到外侧的 A 格点(红色圆圈所示)上,光束峰值强度由 2.45 下降到 1.97,如图 5(a)所

示。由图 4(a2)可知,当传输到 4.8 个单位时,衍射到外侧 A 格点上的部分光束能量又回到入射的 B 格点上,随着传播距离增加,光束能量继续转移到入射的 B 格点上,峰值强度回升至 2.38。但在传播 9.6 个单位后,光束又会衍射到外侧格点上。这种情况下,入射光束既没有被完全局域,也没有发生离散衍射,而是呈现出一种弱局域性,即在传输过程中,能量在几个邻近的格点之间周期性相互耦合,光束不能被很好地局域在入射格点上,峰值强度在 1.94~2.63 之间变化。

设定 B 格点的强度大于 A 格点的强度 ($I_A < I_B$),两组格点的强度为 $I_A : I_B = 2 : 3$,光束传播如图 4(b0)~(b4)所示,由图 4(b0)~(b4)可知,当两组格点的强度为 $I_A : I_B = 2 : 3$ 时,随着传播距离增加,光束除了发生较小的衍射外,基本保持入射时的形状,大部分能量被局域在入射格点上,表现出强局域性。 $I_A : I_B = 2 : 3$ 时的光束的峰值强度如图 5(b)所示,可以看出,随着传播距离增加,光束的峰值强度仅在 2.16~2.27 小范围内变化,八极光束传输呈现出八极孤子的性质。

设定 A 格点的强度大于 B 格点的强度 ($I_A > I_B$),两组格点的强度为 $I_A : I_B = 3 : 2$,光束传

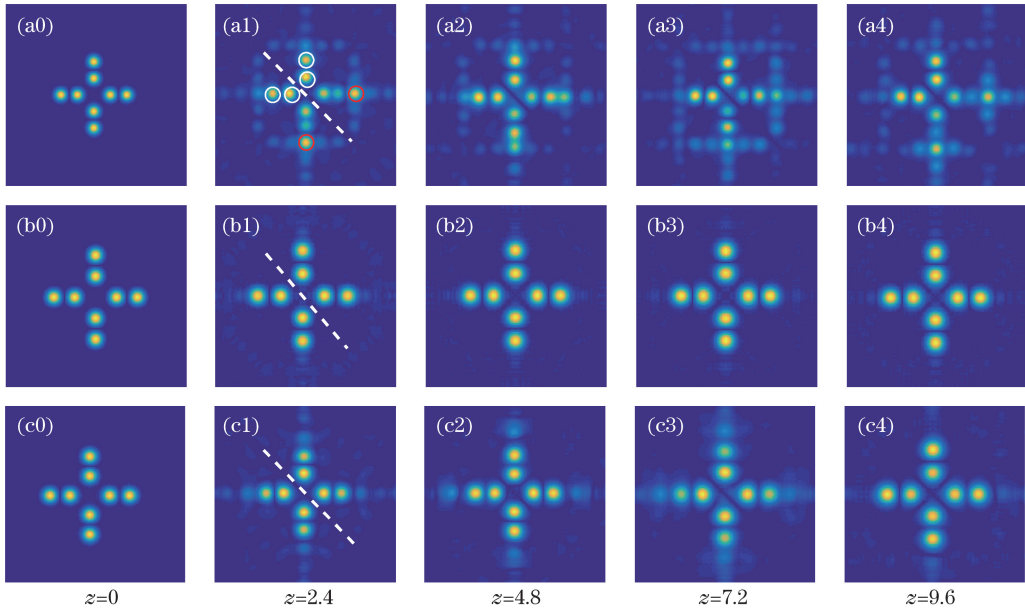


图 4 格点入射时, 光束在不同 $I_A:I_B$ 下的传播。(a) $I_A:I_B=2:2$; (b) $I_A:I_B=2:3$; (c) $I_A:I_B=3:2$

Fig. 4 On-site incident beam propagation patterns at different ratios of $I_A:I_B$.

(a) $I_A:I_B=2:2$; (b) $I_A:I_B=2:3$; (c) $I_A:I_B=3:2$

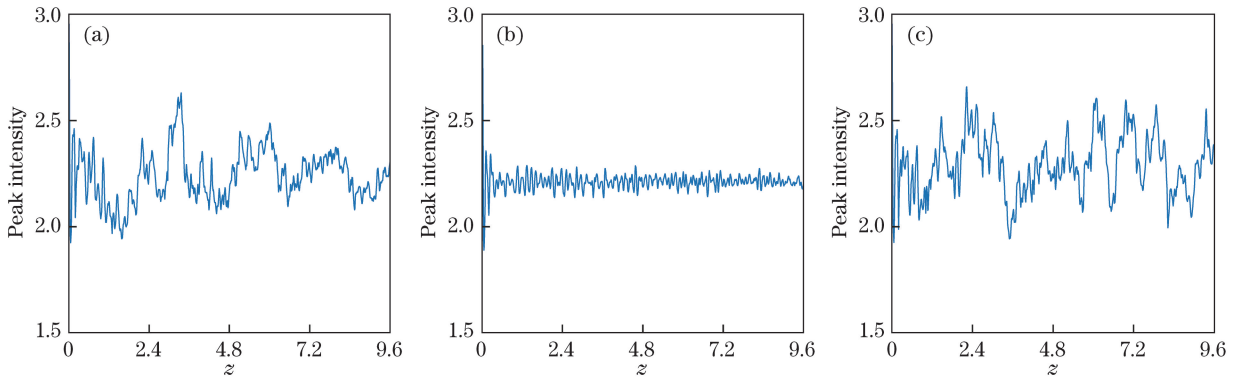


图 5 不同 $I_A:I_B$ 下光束的峰值强度。(a) $I_A:I_B=2:2$; (b) $I_A:I_B=2:3$; (c) $I_A:I_B=3:2$

Fig. 5 Beam peak intensity patterns at different ratios of $I_A:I_B$. (a) $I_A:I_B=2:2$; (b) $I_A:I_B=2:3$; (c) $I_A:I_B=3:2$

播如图 4(c0)~(c4)所示。由图 4(c1)可知,当光束传输 2.4 个距离后,大部分能量耦合至内侧的 4 个 B 格点,八极光束呈会聚成四极光束的趋势,导致内侧 B 格点上的能量增大。 $I_A:I_B=3:2$ 时光束的峰值强度如图 5(c)所示,可以观察到,在传输 2.4 个单位后,峰值强度上升到 2.65。由图 4(c2)可知,当光束传输 4.8 个距离后,光束又恢复到入射时的 8 个 B 格点,峰值强度几乎回落到刚入射时的大小。在传输到 7.2 个单位时,光束会聚到内侧的 4 个 B 格点上,峰值强度增大到 2.67。继续传输到 9.6 个单位后,光束又耦合到入射时的格点上,峰值强度也随之下降。在这种情况下,入射光束在四极光束和八极光束之间周期性变换,峰值强度波动较大,在 1.96~2.67 之间变化,在传播过程中呈现出类“呼吸”式的演化。

另外,从图 4(a0)~(c4)中还可以看到一个有趣的现象:在传输过程中,无论光束是否被局域在入射格点上,光强的分布总是关于图中的白色虚线(二、四象限的斜对角线)呈轴对称。

3.2 非格点入射

非格点入射时与格点入射相同,讨论 $I_A=I_B$ 、 $I_A<I_B$ 和 $I_A>I_B$ 这 3 种情况。设定 A 格点的强度与 B 格点的强度相等($I_A=I_B$),两组格点强度为 $I_A:I_B=2:2$,光束传播如图 6(a0)~(a4)所示。由图 6(a1)可知,在传输 2.4 个单位后,光束基本保持入射时的八峰形状,峰值强度也没有太大变化,如图 7(a)所示。当传输 4.8 个单位后,有 4 个入射格点(白色圆圈所示)上的大部分能量被局域,其他 4 个入射格点上的大部分能量耦合到邻近的格点

上。由图 6(a3)可知,在传输了 7.2 个单位后,能量被局域到其他 4 个格点(白色圆圈所示)上,图 6(a2)与图 6(a3)形成一种“互补”关系。继续向

前传输至 9.6 个单位时,大部分能量回到入射的 8 个 B 格点上。这种情况与格点入射时类似,呈现出弱局域状态。

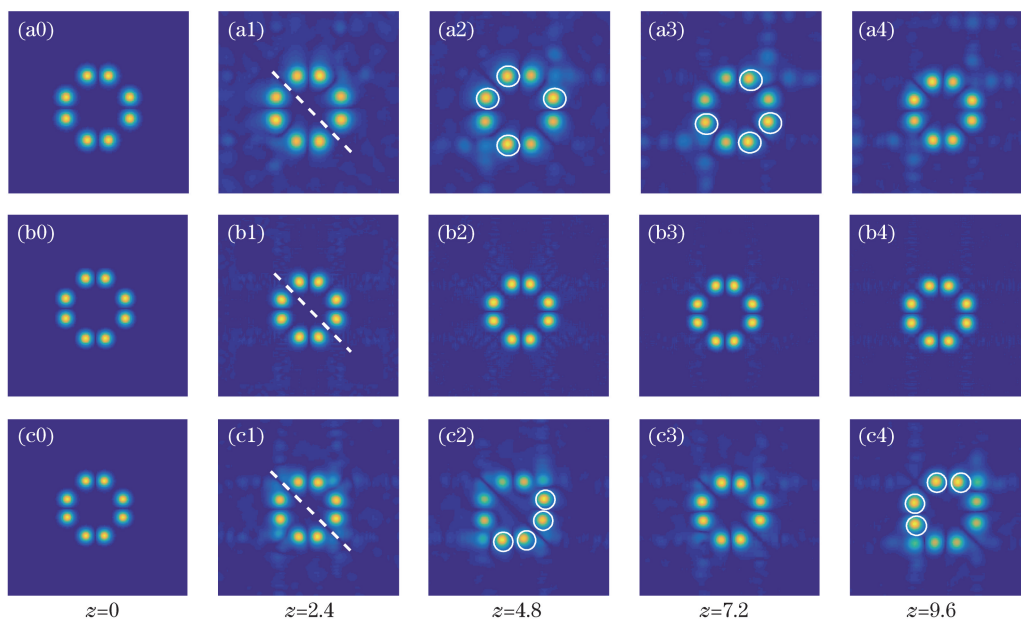


图 6 非格点入射时,光束在不同 $I_A : I_B$ 下的传播。(a) $I_A : I_B = 2 : 2$; (b) $I_A : I_B = 2 : 3$; (c) $I_A : I_B = 3 : 2$

Fig. 6 Off-site incident beam propagation patterns at different ratios of $I_A : I_B$.

(a) $I_A : I_B = 2 : 2$; (b) $I_A : I_B = 2 : 3$; (c) $I_A : I_B = 3 : 2$

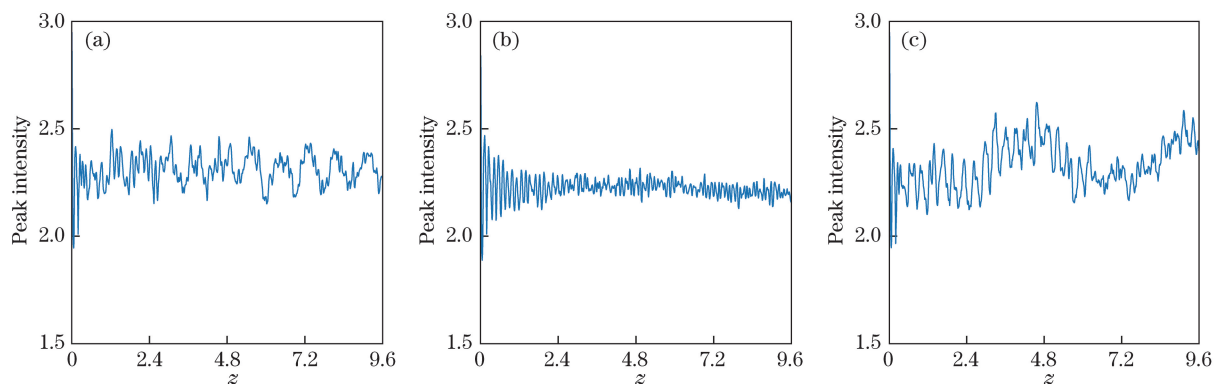


图 7 不同 $I_A : I_B$ 下光束的峰值强度。(a) $I_A : I_B = 2 : 2$; (b) $I_A : I_B = 2 : 3$; (c) $I_A : I_B = 3 : 2$

Fig. 7 Beam peak intensity patterns at different ratios of $I_A : I_B$. (a) $I_A : I_B = 2 : 2$; (b) $I_A : I_B = 2 : 3$; (c) $I_A : I_B = 3 : 2$

设定 A 格点强度小于 B 格点强度 ($I_A < I_B$), 两组格点的强度为 $I_A : I_B = 2 : 3$, 光束传播如图 6(b0)~(b4)所示。由图 6(b0)~(b4)可知,此时异相八峰光束在 Lieb-5 晶格中的传输情况与格点入射时类似,在传输 9.6 个单位后仍能基本保持入射时的八峰形状。图 7(b)所示为 $I_A : I_B = 2 : 3$ 时光束的峰值强度。由图 7(b)可知,随着传播距离增加,光束的峰值强度在 2.17~2.31 小范围内波动,基本保持稳定,八极光束传输呈现出八极孤子的性质。

设定 A 格点的强度大于 B 格点的强度 ($I_A >$

I_B), 两组格点的强度为 $I_A : I_B = 3 : 2$, 光束传播如图 6(c0)~(c4)所示。由图 6(c1)可知,在传输 2.4 个单位后,光束出现较小的衍射,但基本保持着八峰形状。当光束传输 4.8 个单位后,能量不能很好地被局域在入射的格点上,大部分光束能量会聚到右下角 4 个格点[图 6(c1)中白色圆圈所示]上,峰值强度上升到 2.62。继续传输 7.2 个单位,如图 6(c3)所示,光束又重新耦合到入射的 8 个 B 格点上。图 7(c)所示为 $I_A : I_B = 3 : 2$ 时光束峰值强度,可知,峰值强度也从最大值 2.61 回落到 2.31,光束基本恢复成入射时的八峰形状。随着传播距离增

加,当传输 9.6 个单位后,如图 6(c4)所示,大部分能量会聚到左上角的 4 个格点(白色圆圈所示)上。这与 $I_A:I_B=2:2$ 时的演化过程类似,图 6(c2)和图 6(c4)也呈现出一种“互补”的状态。在这种情况下,除了部分衍射外,光束的能量随着传播距离的增加在 8 个入射格点上周期性地转移。

与格点入射时相同,从图 6(a0)~(c4)中可以看到,在非格点入射情况下,光强的分布也关于图中的白色虚线(二、四象限斜对角线)呈轴对称。

4 结 论

通过数值仿真研究了 Lieb-5 晶格的相对格点强度对异相八极光束传输的影响。仿真结果表明,无论是格点入射还是非格点入射,通过调整 Lieb-5 晶格中心格点和边缘格点的强度,可以控制异相八极光束在 Lieb-5 晶格中的局域性。当中心格点强度小于边缘格点强度(中心格点 A 和边缘格点 B 的相对强度为 2:3)时,光束可以在 Lieb-5 晶格中表现出强局域状态:入射的异相八极光束除了发生较小的衍射外,大部分能量始终被局域在入射格点位置,在传输过程中光束基本保持着八峰形状。这是因为在这种情况下,边缘格点 B 的格点强度大于中心格点 A 的格点强度,所以边缘格点 B 对入射的八极光束具有较强的束缚作用。并且在此时的条件下,晶格点的束缚性、光束的衍射效应和异相光束之间的相互作用达到一种平衡状态,激发了 Lieb-5 晶格的平带模,因此八极光束在传输过程中表现出强局域状态,呈现出八极孤子的性质。当设置中心格点强度大于或等于边缘格点强度时,光束在晶格中的传输呈现出一种弱局域状态:部分入射格点上的光束能量耦合到邻近格点上,随着传播距离增加,光束的能量在邻近的几个格点上周期性地耦合转移。这是由于晶格点的束缚性、光束的衍射效应和异相光束的相互作用在此时没有达到平衡状态,因此导致异相八极光束在 Lieb-5 晶格中传输时不能始终保持八峰形状,同时又由于 Lieb-5 晶格特有的拓扑结构产生的几何阻挫性能抑制了光束的离散衍射效应:相邻两个光波函数在向周围结构扩散时,发生光强的抵消,这种相消干涉使入射光束被局域在特定区域,因此在光束传输过程中,能量仅在邻近的几个晶格点上来回耦合转移,没有离散衍射到更外侧的格点上。

理论上,Lieb-5 晶格的平带模使光束能够无衍射地传输,但是在本文中,根据实验光路系统中

Lieb-5 晶格的分布情况,需要考虑次邻近格点之间的耦合作用,因此导致平带不够完美,不可避免地会出现较小衍射。另外,从光束的演化过程中可以发现,光束的光强分布关于二、四象限的斜对角线呈轴对称,这可能与异相光束的相互作用有关。因此,拟计划在后期的工作中,进一步研究晶格常数对光束在 Lieb-5 晶格中传输的影响,同时深入探讨光束演化出现周期性和斜对角对称性的机理。

参 考 文 献

- [1] Gao Y M, Wen Z R, Zheng L R, *et al.* Complex periodic non-diffracting beams generated by superposition of two identical periodic wave fields[J]. *Optics Communications*, 2017, 389: 123-127.
- [2] Schwartz T, Bartal G, Fishman S, *et al.* Transport and Anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices[J]. *Nature*, 2007, 446 (7131): 52-55.
- [3] Yang J K, Zhang P, Yoshihara M, *et al.* Image transmission using stable solitons of arbitrary shapes in photonic lattices[J]. *Optics Letters*, 2011, 36(5): 772-774.
- [4] Makasyuk I, Chen Z G, Yang J K. Band-gap guidance in optically induced photonic lattices with a negative defect[J]. *Physical Review Letters*, 2006, 96(22): 223903.
- [5] Lieb E H. Two theorems on the Hubbard model[J]. *Physical Review Letters*, 1989, 62 (16/17): 1201-1203.
- [6] Mukherjee S, Spracklen A, Choudhury D, *et al.* Observation of a localized flat-band state in a photonic Lieb lattice[J]. *Physical Review Letters*, 2015, 114(24): 245504.
- [7] Noda K, Inaba K, Yamashita M. Flat-band ferromagnetism in the multilayer Lieb optical lattice[J]. *Physical Review A*, 2014, 90(4): 043624.
- [8] Yang Z H, Wang Y P, Xue Z Y, *et al.* Circuit quantum electrodynamics simulator of flat band physics in a Lieb lattice[J]. *Physical Review A*, 2016, 93(6): 062319.
- [9] Sun K, Gu Z C, Katsura H, *et al.* Nearly flatbands with nontrivial topology[J]. *Physical Review Letters*, 2011, 106(23): 236803.
- [10] Tang E, Mei J W, Wen X G. High-temperature fractional quantum hall states[J]. *Physical Review Letters*, 2011, 106(23): 236802.
- [11] Rechtsman M C, Zeuner J M, Tünnermann A, *et al.* Strain-induced pseudomagnetic field and photonic Landau levels in dielectric structures[J]. *Nature*

- Photonics, 2013, 7(2): 153-158.
- [12] Xia S Q, Hu Y, Song D H, *et al.* Demonstration of flat-band image transmission in optically induced Lieb photonic lattices[J]. Optics Letters, 2016, 41(7): 1435-1438.
- [13] Wan L L, Lü X Y, Gao J H, *et al.* Controllable photon and phonon localization in optomechanical Lieb lattices[J]. Optics Express, 2017, 25(15): 17364-17374.
- [14] Zhang D, Zhang Y Q, Zhong H, *et al.* New edge-centered photonic square lattices with flat bands[J]. Annals of Physics, 2017, 382: 160-169.
- [15] Carmon T, Anastassiou C, Lan S, *et al.* Observation of two-dimensional multimode solitons[J]. Optics Letters, 2000, 25(15): 1113-1115.
- [16] Wang X S, Bezryadina A, Chen Z G, *et al.* Observation of two-dimensional surface solitons[J]. Physical Review Letters, 2007, 98(12): 123903.
- [17] Thornber B, Zhou Y. Numerical simulations of the two-dimensional multimode Richtmyer-Meshkov instability[J]. Physics of Plasmas, 2015, 22(3): 032309.
- [18] He Y J, Wang H Z. (1+1)-dimensional dipole solitons supported by optical lattice[J]. Optics Express, 2006, 14(21): 9832-9837.
- [19] Lebedev M E, Alfimov G L, Malomed B A. Stable dipole solitons and soliton complexes in the nonlinear Schrödinger equation with periodically modulated nonlinearity[J]. Chaos, 2016, 26(7): 073110.
- [20] Yang J K, Makasyuk I, Bezryadina A, *et al.* Dipole solitons in optically induced two-dimensional photonic lattices[J]. Optics Letters, 2004, 29(14): 1662-1664.
- [21] Susanto H, Law K J H, Kevrekidis P G, *et al.* Dipole and quadrupole solitons in optically-induced two-dimensional defocusing photonic lattices[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2008, 237(23): 3123-3134.
- [22] Theocharis G, Weller A, Ronzheimer J P, *et al.* Multiple atomic dark solitons in cigar-shaped Bose-Einstein condensates[J]. Physical Review A, 2010, 81(6): 063604.
- [23] Fleischer J W, Bartal G, Cohen O, *et al.* Observation of vortex-ring “discrete” solitons in 2D photonic lattices[J]. Physical Review Letters, 2004, 92(12): 123904.
- [24] Efremidis N K. Nonlocal lattice solitons in thermal media[J]. Physical Review A, 2008, 77(6): 063824.
- [25] Meng X H, Liu W J, Zhu H W, *et al.* Multi-soliton solutions and a Bäcklund transformation for a generalized variable-coefficient higher-order nonlinear Schrödinger equation with symbolic computation[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2008, 387(1): 97-107.
- [26] Yang B, Qin Y L, Liu X, *et al.* Research on dipole solitons in optically induced lattices[J]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(7): 0719001.
杨斌, 覃亚丽, 刘鲜, 等. 光诱导晶格中偶极孤子的研究[J]. 光学学报, 2016, 36(7): 0719001.
- [27] Qin Y L, Mao S Y, Liu X, *et al.* Evolution of quadrupole solitons in self-focusing photoinduction tetragonal photonic lattices[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2017, 54(11): 111901.
覃亚丽, 毛盛益, 刘鲜, 等. 四极孤子在自聚焦光诱导四方晶格中的动态演化[J]. 激光与光电子学进展, 2017, 54(11): 111901.
- [28] Du Y Q, Shu X W, Zhang H, *et al.* High-order soliton evolution and pulse breaking-recovery in stretched ultrafast fiber lasers[J]. Optics Express, 2018, 26(9): 11685-11693.
- [29] Lyu J, Wen Z R, Han K, *et al.* Nonlinear transmission and pseudospin in two-dimensional octagon and dodecagon photonic lattices[J]. Optical Materials Express, 2018, 8(9): 2713-2721.
- [30] Fleischer J W, Carmon T, Segev M, *et al.* Observation of discrete solitons in optically induced real time waveguide arrays[J]. Physical Review Letters, 2003, 90(2): 023902.
- [31] Vicencio R A, Cantillano C, Morales-Inostroza L, *et al.* Observation of localized states in Lieb photonic lattices[J]. Physical Review Letters, 2015, 114(24): 245503.