

分数阶涡旋光束在远场的衍射特性

刘曼*, 张美娜

齐鲁工业大学(山东省科学院)电子信息工程学院, 山东 济南 250353

摘要 模拟分析了分数阶拉盖尔-高斯涡旋光束在远场形成的光强和相位分布,探讨了拓扑荷从分数到整数变化时光束特性的演化过程。光强分布图中出现了两个大小和形状不同的环状光斑,较大的环状光斑上有形状规则的亮斑,环状光斑所围区域内暗斑呈椭圆状,亮斑和暗斑的数量都与入射光的拓扑荷有关。

关键词 物理光学; 成像系统; 衍射

中图分类号 O436 **文献标识码** A

doi: 10.3788/AOS201939.0726001

Diffraction Properties of Fractional-Order Vortex Beams in Far Field

Liu Man*, Zhang Meina

School of Electronic and Information Engineering, Qilu University of Technology (Shandong Academy of Sciences), Jinan, Shandong 250353, China

Abstract The intensity and phase distributions of a Laguerre-Gaussian vortex beam possessing fractional topological charge are simulated in the far-field, and the evolution of these optical properties is discussed when the topological charge changes from fraction to integer. We find that there are two rings with different sizes and shapes in the intensity distribution maps. The brighter petal-like spots occur on the larger rings. There are ellipse-like dark spots with low-intensity in the circumscribed area of the rings. The number of bright spots and dark spots is related to the topological charge of the incident vortex beam.

Key words physical optics; imaging systems; diffraction

OCIS codes 260.1960; 110.6150; 050.1970

1 引 言

光学涡旋是一种含有相位奇异点的特殊光场^[1],奇异点处光场振幅为零,该点相位不能确定,所以光学涡旋又称相位涡旋。如果涡旋周围的相位围绕光束中心按顺时针方向递增,则拓扑荷 l 取负值,否则,拓扑荷 l 取正值^[1]。近年来,光学涡旋受到科学界的广泛关注,并在量子光学信息处理^[2]、自由空间光通信^[3]、微操纵^[4]和超高分辨率显微镜^[5]等诸多领域的应用中取得了突破性进展^[6-8]。

2004年, Berry^[9]首次从理论角度给出了整数和分数阶涡旋光束在空间的传输特性,并且得出了分数拓扑荷每超过半整数时,涡旋光束中心就有一个新涡旋产生的结论。随后, Leach等^[10]和 Lee等^[11]通过实验分析了分数阶涡旋光束的传输特性,证实了 Berry的结论。最近,分数阶光学涡

旋和涡旋光束在光子纠缠和量子信息处理等领域引起了人们的广泛关注^[12-13]。分数阶涡旋光束横向光强分布图的亮环上有径向开口,并在开口处有低强度间隙出现,这种低强度的径向开口明显阻碍了微粒的旋转,成为囚禁和释放微粒的渠道^[14-15]。因此,探测和分析分数阶涡旋光束在远场的衍射特性具有重要意义^[16]。据我们所知,已有文献大都是讨论分数阶涡旋光束衍射光斑径向开口大小与拓扑荷值小数部分大小的关系,对涡旋光束远场衍射光场零值线、光轴附近相位涡旋分布与拓扑荷的关系讨论较少。

本文根据夫琅禾费衍射理论,主要研究了分数阶拉盖尔-高斯(LG)涡旋光束在夫琅禾费衍射区的光强、相位和零值线的分布特性及中心区域相位涡旋位置的分布,并对这些特性与入射涡旋光束拓扑荷之间的关系进行了详细分析。

收稿日期: 2019-02-01; **修回日期:** 2019-02-27; **录用日期:** 2019-03-22

基金项目: 国家自然科学基金(11404179)、山东省自然科学基金(ZR2018LA013)

* **E-mail:** lium@qlu.edu.cn

2 理论分析

拉盖尔-高斯光束是最典型的标量涡旋光束,在 $z=0$ 的入射平面上任一点光场复振幅可以写为

$$E_0(r, \theta) = \left(\frac{r}{w}\right)^{|l|} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \exp(il\theta), \quad (1)$$

式中: w 为光斑半径; l 为拉盖尔-高斯光束的拓扑荷; (r, θ) 为入射面上的极坐标。拉盖尔-高斯光束传输到夫琅禾费衍射平面上的光场复振幅为

$$\begin{aligned} E(\rho, \varphi, z) = & C \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} E_0(r, \theta) \cdot \\ & \exp[-i2\pi r \rho \cos(\theta - \varphi)] r dr d\theta = \\ & C(-i)^{|l|} \exp(il\varphi) \frac{2\pi}{w^{|l|}} \int_0^{\infty} r^{|l|+1} \cdot \\ & \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) J_{|l|}(2\pi\rho r) dr, \end{aligned} \quad (2)$$

式中: (ρ, φ, z) 为观察面上的极坐标; $C = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z}$ 。

$\exp\left(i\frac{k}{2z}\rho^2\right)$; $J_{|l|}$ 为第一类 $|l|$ 阶贝塞尔函数。利用积分恒等式^[17]

$$\int_0^{\infty} x^{\nu+1} \exp(-ax^2) J_{\nu}(\beta x) dx = \frac{\beta^{\nu}}{(2a)^{\nu+1}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{4a}\right), \quad (3)$$

式中: α 和 β 为系数, (2) 式变为

$$E(\rho, \varphi, z) = C(-i)^{|l|} \cdot \exp(il\varphi) \frac{(\pi\rho w^2)^{|l|+1} \exp(-\pi^2\rho^2 w^2)}{\rho w^{|l|}}. \quad (4)$$

当 $|l|$ 为分数时, $\exp(il\varphi)$ 项可以展开为傅里叶级数形式^[6]:

$$\exp(il\varphi) = \frac{\exp(i\pi l) \sin(\pi l)}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(in\varphi)}{l-n}, \quad (5)$$

式中: n 为整数。将(5)式代入(4)式得

$$\begin{aligned} E(\rho, \varphi, z) = & \frac{\exp[i(kz + \pi l)]}{i\lambda z \pi \rho w^{|l|}} \exp\left(i\frac{k}{2z}\rho^2\right) \cdot \\ & \exp(-\pi^2\rho^2 w^2) \sin(\pi l) \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[(-i)^{|n|} \cdot \right. \\ & \left. \frac{\exp(in\varphi) (\pi\rho w^2)^{|n|+1}}{l-n} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

(6) 式含有 $\exp\left(i\frac{k}{2z}\rho^2\right) \exp(-\pi^2\rho^2 w^2)$ 项, 说明涡旋光束的远场衍射图轮廓仍然呈高斯分布。(6) 式中的求和符号表明, 分数阶拉盖尔-高斯光束的远场衍射图样包含所有整数阶涡旋光束的叠加, 同时可以看出, 光轴上没有涡旋, l 与 n 的差值使涡旋点的距

离在有限范围内先增大而后慢慢变小。(6) 式还可以用实部 Re 和虚部 Im 表示为

$$E(\rho, \varphi, z) = \text{Re}[E(\rho, \varphi, z)] + i\text{Im}[E(\rho, \varphi, z)]. \quad (7)$$

利用离散傅里叶变换计算 l 取不同值时拉盖尔-高斯光束在夫琅禾费衍射面上光强 $|E(\rho, \varphi, z)|^2$ 、相位和零值线 $\text{Re}[E(\rho, \varphi, z)]=0$ 、 $\text{Im}[E(\rho, \varphi, z)]=0$ 及中心区域相位涡旋的分布。为计算方便, 入射面和接收面分别位于透镜的前焦面和后焦面上, 拉盖尔-高斯光束的光斑大小参数取 $w=25.0 \mu\text{m}$, 同时设定透镜的焦距 $f=25 \text{ cm}$, $\lambda=0.6328 \mu\text{m}$, 观察面的范围为 $1.6 \text{ cm} \times 1.6 \text{ cm}$, φ 的取值范围为 $(-\pi, \pi)$ 。

3 结果分析

3.1 涡旋光束的远场衍射光强分布特性

图 1 为拓扑荷为半整数时拉盖尔-高斯光束在夫琅禾费衍射平面上的光强分布, 用 32 个灰度等级来显示。在计算过程中, 光强值取任意单位。图中虚线圆和椭圆分别标记了圆形亮斑和椭圆形暗斑。

从图 1(a)~(e) 不难看出, 随着拓扑荷的增大, 大的亮环下面有一个长轴在水平方向的椭圆形暗斑, 如虚线椭圆所示。当拓扑荷 $l=+0.5$ 时, 图中有一个光强值较大的瓣状亮斑。当拓扑荷 $l=+1.5$ 时, 图中有两个光强值较大的瓣状亮斑, 这两个亮斑组成一个形状不规则、亮度不均匀的亮环, 在亮环中间有一个圆形暗斑。当拓扑荷 $l=+2.5$ 时, 在上部的两个瓣状亮斑中间出现了一个圆形亮斑(如虚线圆所示), 三者彼此相连, 围成一个亮环, 亮环中间有两个关于 y 轴对称分布的径向花瓣状暗斑。当拓扑荷 $l=+3.5$ 时, 图上部的两个瓣状亮斑中间出现了两个圆形亮斑, 这四个亮斑首尾相连, 仍然围成环状, 环中径向花瓣状暗斑增加到三个。当拓扑荷 $l=+4.5$ 时, 图上部的两个瓣状亮斑中间是三个圆形亮斑, 这五个亮斑围成环状光斑, 其内有四个径向花瓣状暗斑。

对比图 1(a)~(e) 与图 1(f)~(j) 发现, 每幅图中的光强分布都关于 y 轴对称。当拓扑荷整数部分的绝对值为偶数时, 在 y 轴正(负)方向有圆形亮斑出现。当拓扑荷的值互为相反数时, 光强图分布关于 x 轴对称, 即拓扑荷为正值时涡旋光束衍射图样的亮斑分布, 相对于拓扑荷为负值时发生了 180° 旋转, 所以根据衍射图中亮斑的分布特征, 不仅可以确定涡旋光束半整数拓扑荷的正负, 还可以确定半

整数拓扑荷的大小。从图 1 还可以看出,当拓扑荷等于半整数时,随着拓扑荷的增大,瓣状亮斑的面积和光强值都逐渐增大,并且瓣状亮斑上(下)方的弧状光斑轮廓越来越清晰,亮斑的个数和其围成的环状暗区中花瓣状暗斑的个数也都逐渐增多。图 1(a)~(e)与图 1(f)~(j)中光斑的分布范围分别随

着分数拓扑荷绝对值的增加而增大。

为观察瓣状亮斑和椭圆状暗斑的形成过程,图 2 分别给出了拓扑荷 l 为 2.1~3.0、间隔为 0.1 的拉盖尔-高斯光束在夫琅禾费衍射平面上的光强分布,其中 $l=3.0$ 是为了与分数阶涡旋光束的光强分布进行比较而给出的。

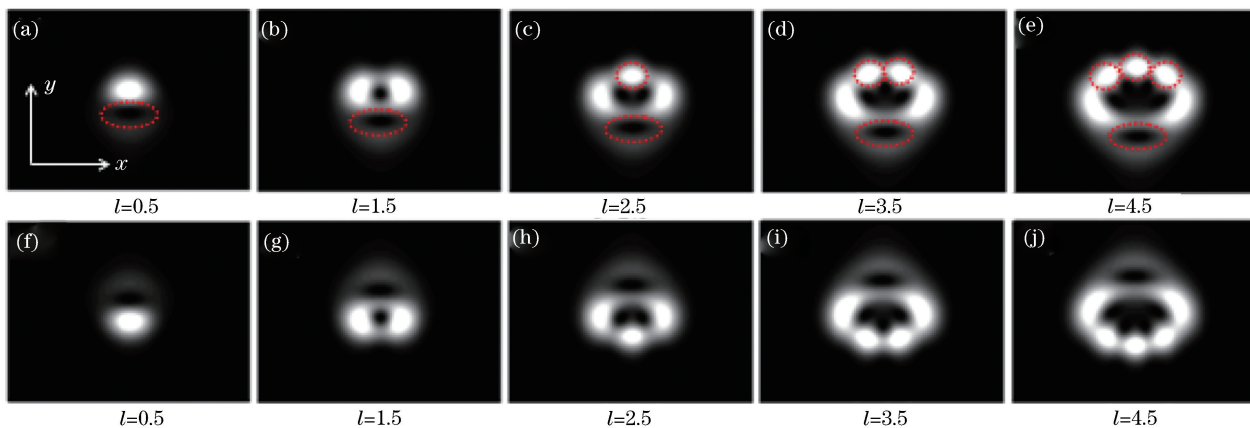


图 1 拓扑荷取半整数时拉盖尔-高斯光束在夫琅禾费衍射区的光强分布

Fig. 1 Intensity patterns of LG beams for half-integer topological charges at Fraunhofer diffraction plane

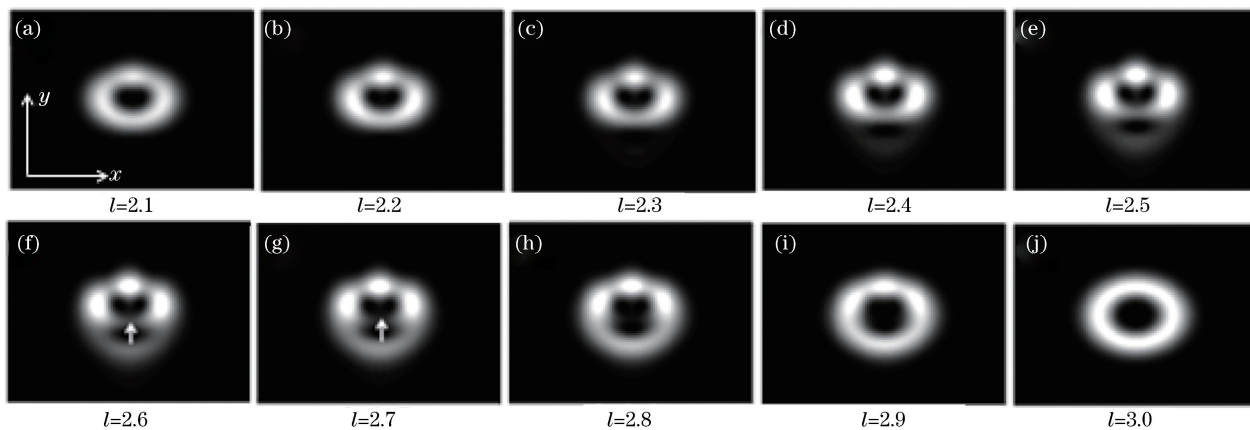


图 2 拓扑荷 l 为 2.1~3.0、间隔为 0.1 的拉盖尔-高斯光束在夫琅禾费衍射区的光强分布

Fig. 2 Intensity patterns of LG beams at Fraunhofer diffraction plane for non-integer topological charges varying from 2.1 to 3.0 with steps of 0.1

从图 2 容易看出,当拓扑荷 $l=2.1$ 时,环状光斑上部的的光强分布不均匀,但亮环下半部分的光强仍然呈均匀分布,亮环围成的黑暗区域在上部隐约有凹陷。当拓扑荷 $l=2.2$ 时,环状光斑上部隐约出现了一个亮斑,环上光强分布仍不均匀,中心处黑暗区域在上部的凹陷较明显。当拓扑荷 $l=2.3$ 时,上述现象更加明显,但环状光斑下部变细,亮环上的光强分布明显不均匀,环状光斑围成的暗区为两个椭圆状暗区。当拓扑荷 $l=2.4$ 时,环状光斑上部的圆形亮斑边界较之前更为清晰,两侧各出现一个瓣状亮斑,光强分布更加不均匀,环形光斑围成的黑暗区

域中隐约出现了两个椭圆形暗斑,其下端重合呈花瓣状分布。在环状光斑下方,出现了一段模糊的弧状光斑。当拓扑荷 $l=2.5$ 时,暗斑和亮斑的轮廓相对清晰,图下部的弧状光斑轮廓也较为清晰,与上部的环状光斑相连,围成一个小亮环,其内是一个主轴在水平方向的椭圆状暗斑。当拓扑荷 $l=2.6$ 时,环状光斑强度增大,白色箭头所指位置处的光强相对 $l=2.5$ 时有所减弱。当拓扑荷 $l=2.7$ 时,环状光斑中间隐约断开,如白色箭头所示,使得上部和下部的黑暗区域连在一起,同时下部弧状光斑的光强增大。当拓扑荷 $l=2.8$ 时,上部环状光斑和下部弧状光斑

融为一体,形成一个较大的亮环,其围成的中间黑暗区域的面积变大,瓣状亮斑和圆形亮斑轮廓不明显,环下部的光强分布较均匀,但环上部的光强分布仍然不均匀。上部的黑暗区域内仍能看到两个径向椭圆状暗斑。当拓扑荷 $l=2.9$ 时,亮环上的瓣状亮斑和圆形亮斑的边界变得模糊,环上光强分布较为均匀,衍射光斑的轮廓接近于圆形,中间黑暗区域的光强也较为均匀,径向暗斑几乎消失。

3.2 涡旋光束的远场相位分布特性

图 3 所示为拓扑荷 $2.1 \leq l \leq 5.0$ 时,拉盖尔-高斯光束在夫琅禾费衍射面上的横向相位分布。图 3 使用 8 分度的灰度显示变化区间 $(-\pi, \pi]$ 内的相位分布,所以从每个相位涡旋点辐射出 8 条等相线,将相位涡旋周围的相位分成 8 个区域,每条等相线代表区间内的一个相位值,相邻等相线的相位差为 $\pi/4$,其中黑色区域对应的相位值最小,白色区域对应的相位值最大。图 3 中正负相位涡旋分别用白色和黑色实心圆点表示,每一行从左到右给出了拓扑

荷 $l=m+\epsilon$ (其中: m 分别取 2,3,4; ϵ 分别取 0.1, 0.5,0.9) 到 $l=m+1$ 的相位涡旋结构的演化过程。

从图 3 可以看到,分数阶拉盖尔-高斯光束在夫琅禾费衍射区的横向相位分布与整数阶光束有明显不同。高阶分数阶拉盖尔-高斯光束在夫琅禾费衍射面上的相位涡旋不在光轴上,并且发生了分裂。入射光拓扑荷 $l=m+\epsilon$ 的拉盖尔-高斯光束在夫琅禾费衍射区分裂成 m 个单阶相位涡旋,同时在 y 轴负方向产生一个与中心区域同号的单阶相位涡旋,该涡旋发出的等相线几乎平行于 y 轴。随着拓扑荷的增大,中心区域内单阶相位涡旋的数量逐渐增多,且关于 y 轴对称分布。单阶正负相位涡旋主要分布在图的上半部分,并且每幅图中负相位涡旋比正相位涡旋多 1 个。对比图 1~3 中拓扑荷相同的光强图和相位图可以发现,每一个椭圆状暗斑都对应一个单阶正相位涡旋点。当拓扑荷整数部分 m 为奇数时, y 轴正方向有一对正负相位涡旋对,这种特性可以应用到光学通信中。

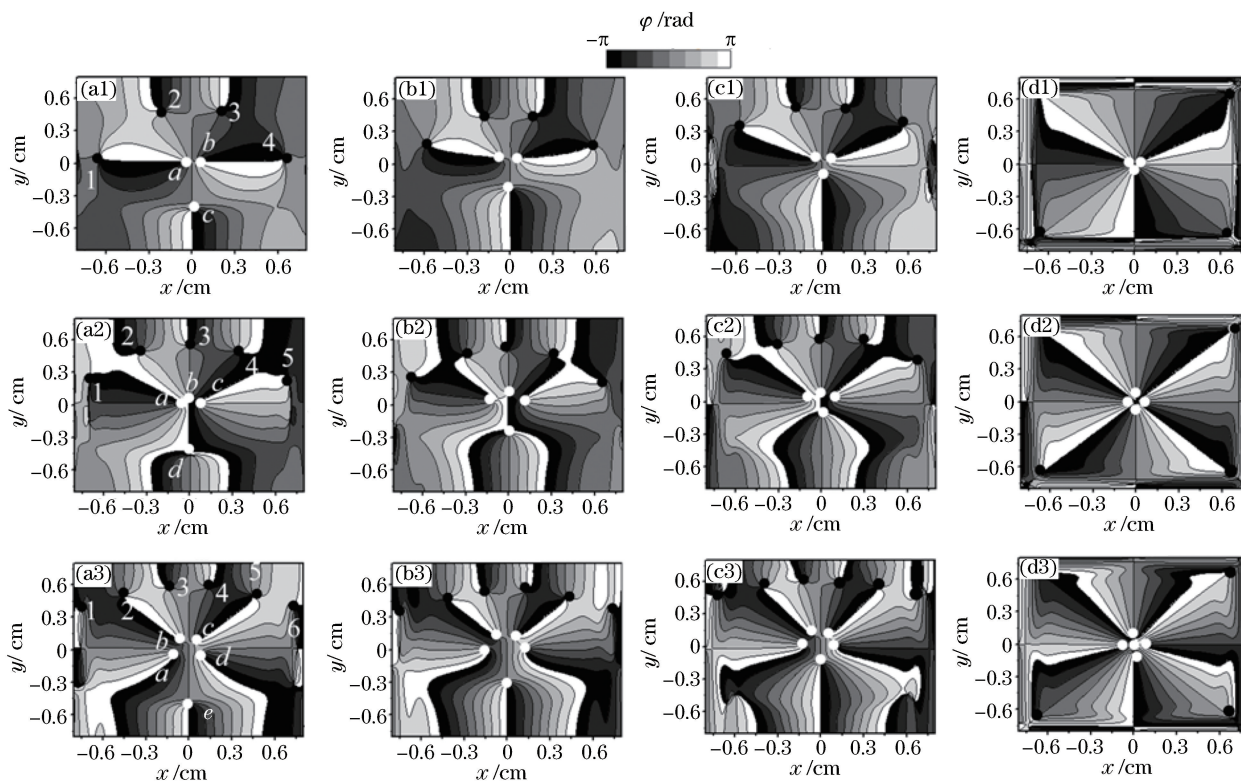


图 3 拓扑荷 $2.1 \leq l \leq 5.0$ 时拉盖尔-高斯光束在夫琅禾费衍射区的相位分布。(a1) $l=2.1$; (b1) $l=2.5$; (c1) $l=2.9$; (d1) $l=3.0$; (a2) $l=3.1$; (b2) $l=3.5$; (c2) $l=3.9$; (d2) $l=4.0$; (a3) $l=4.1$; (b3) $l=4.5$; (c3) $l=4.9$; (d3) $l=5.0$
 Fig. 3 Phase distributions of LG beams at Fraunhofer diffraction plane as topological charge increases from 2.1 to 5.0. (a1) $l=2.1$; (b1) $l=2.5$; (c1) $l=2.9$; (d1) $l=3.0$; (a2) $l=3.1$; (b2) $l=3.5$; (c2) $l=3.9$; (d2) $l=4.0$; (a3) $l=4.1$; (b3) $l=4.5$; (c3) $l=4.9$; (d3) $l=5.0$

从图 3 容易看出,每一行从左到右,随着分数拓扑荷不断增大,中心区域内的 m 个单阶相位涡旋先

逐渐远离中心,而后慢慢向中心靠拢,而位于 y 轴负方向的正相位涡旋一直沿 y 轴向中心移动,直到

拓扑荷 $l=m+1$, 此时, 中心区域有 $m+1$ 个正相位涡旋, 对应一个多阶相位涡旋。在分数阶衍射图的中心区域内, 正相位涡旋个数等于入射光拓扑荷的整数部分, 而每幅图中负相位涡旋比正相位涡旋多 1 个。

从图 3(d1)~(d3)可以看出, 当入射光拓扑荷为整数时, 观察面上中心区域内有 $m+1$ 个分离的单阶相位涡旋, 其数量与入射光的拓扑荷恰好相等。

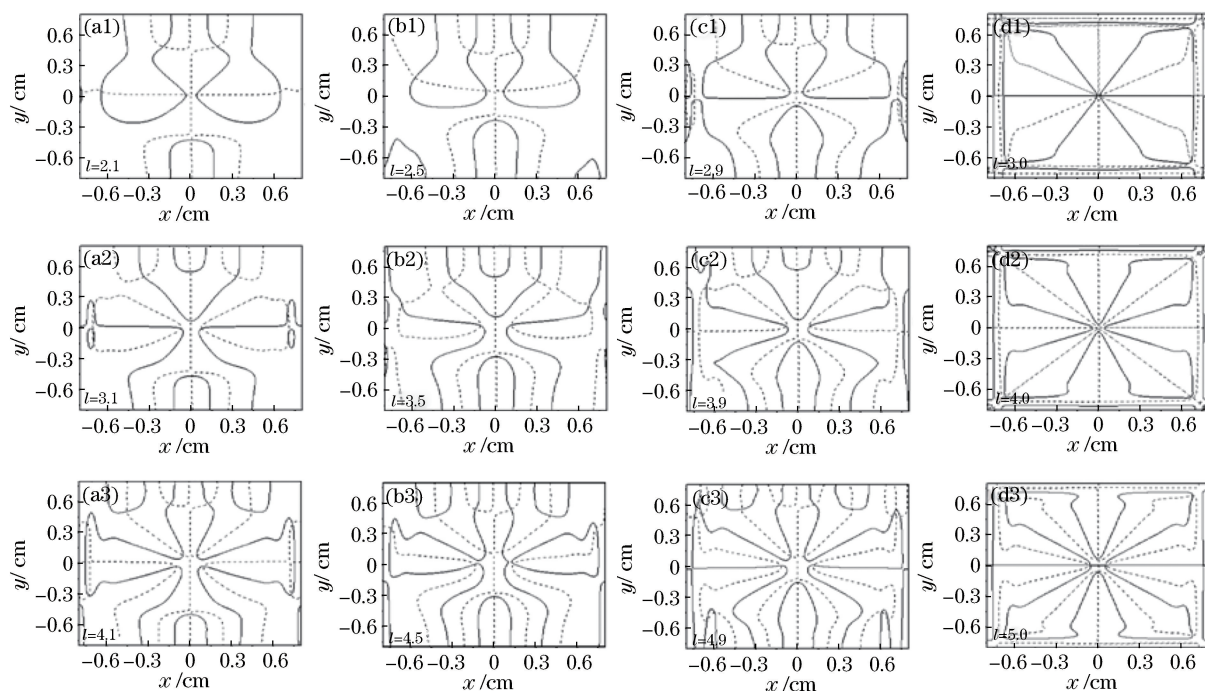


图 4 拓扑荷 $2.1 \leq l \leq 5.0$ 时拉盖尔-高斯光束在夫琅禾费衍射区的零值线分布

Fig. 4 Distributions of zero contour of LG beam real and imaginary parts at Fraunhofer diffraction plane as topological charge increases from 2.1 to 5.0

从图 4 容易看出, 当入射光束的拓扑荷为分数时, 每幅图中的实部零值线都关于 y 轴对称分布, 而虚部零值线只有在拓扑荷整数部分为奇数时才关于 y 轴对称分布。在图的上半区域内, 实部零值线和虚部零值线多为水平方向分布, 而在下半区域内零值线多平行于 y 轴分布。实部零值线和虚部零值线在 y 轴负方向上的交点, 随着入射光拓扑荷的增加而上移, 这种现象与相位图相对应。

从图 4 中每一行可以看出, 随着拓扑荷小数部分逐渐增大, 实部零值线和虚部零值线在 y 轴负方向的交叉点不断向中心移动, 交叉点移动的速度逐渐加快。从左到右, 当拓扑荷的小数部分 $\epsilon \leq 0.9$ 时, 实部零值线和虚部零值线的密度变化不大。当拓扑荷分数部分为 $0.9 \sim 1.0$ 时, 零值线的密度变化较快。当拓扑荷等于整数时, 零值线多为直线, 且关于中心对称分布。每列从上到下, 随着拓扑荷整数

从中心区域的相位涡旋上发出的等相线几乎是直线, 并终止于四个角上的负相位涡旋, 相对于分数阶情况而言, 中心区域的相位分布比较均匀, 并沿逆时针方向呈周期性变化, 周期数与入射光拓扑荷相等。

图 4 所示为与图 3 对应的实部零值线和虚部零值线的叠加图, 其中黑色实线和虚线分别代表实部零值线和虚部零值线, 相位涡旋点位于实部零值线和虚部零值线的交点处。

部分的不断增大, 零值线的密度也越来越大。

为了更清楚地观察中心区域内相位涡旋位置分布及演化情况, 图 5(a)~(c) 分别给出了拓扑荷 $l=2.1 \sim 5.0$ 、间隔为 0.1 的拉盖尔-高斯光束在夫琅禾费衍射面上, 中心区域内正相位涡旋位置随拓扑荷增大的演化过程。

从图 5(a) 可以看出, 中心区域三个相位涡旋分别分布在 Y 型的三个方向上, 上半部分的两个相位涡旋关于 y 轴对称分布。在图 5(a) 中, 沿着箭头 2 的指向, 即随着分数拓扑荷的增大, 单阶相位涡旋的位置逐渐远离原点, 直到拓扑荷 $l=2.5$ 时, 达到离中心最远的位置。随着拓扑荷的继续增大 ($l=2.5 \sim 2.9$), 相位涡旋的位置沿着箭头 3 所指的方向逐渐向中心靠近。与此同时, 在 y 轴负方向上的相位涡旋沿着图中标号为 1 的箭头不断向中心移动。当 $l=3.0$ 时, 原来分离的两个涡旋和 y 轴负方向的

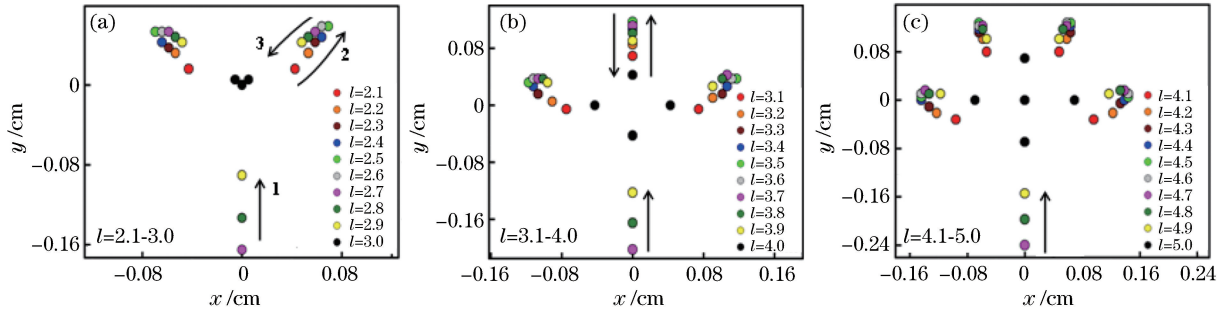


图 5 拓扑荷 $l=2.1\sim 5.0$ 、间隔为 0.1 时拉盖尔-高斯光束中心区域内的涡旋位置

Fig. 5 Trajectories of phase vortices in central region as topological charge increases from 2.1 to 5.0 with steps of 0.1

相位涡旋位于原点处,形成高一阶的新相位涡旋,但在 x 轴上没有相位涡旋。

从图 5(b)和 5(c)可以看出,每一个高阶拓扑荷分别对应 4、5 个独立的相位涡旋。相位涡旋分别分布在 4、5 个方向上,其位置仍然关于 y 轴对称分布。与图 5(a)不同的是,图 5(b)中有 1 个相位涡旋位于 y 轴正方向上。随着分数拓扑荷逐渐增大,相位涡旋位置离原点越来越远,当拓扑荷为半整数时,达到最远的位置。随着拓扑荷的继续增大,相位涡旋位置逐渐向中心靠近。位于 y 轴负方向的相位涡旋仍然沿图中箭头方向向中心移动。

4 结 论

从理论角度研究了分数阶拉盖尔-高斯光束在夫琅禾费衍射平面上的光强、相位和零值线分布特性,发现光强和相位涡旋分布与拉盖尔-高斯光束的拓扑荷密切相关。当入射光束的拓扑荷为半整数时,根据光强分布图中的光斑特征可有效判断入射光束拓扑荷的正负。同时,根据瓣状暗斑和亮斑的个数也能确定入射光束的拓扑荷。该研究结果可为实验探测涡旋光束的拓扑荷提供理论帮助,并对分析光通信及涡旋光束的传播特性具有一定参考价值。

参 考 文 献

- [1] Allen L, Beijersbergen M W, Spreeuw R J C, *et al.* Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes[J]. *Physical Review A*, 1992, 45(11): 8185-8189.
- [2] Vaziri A, Pan J W, Jennewein T, *et al.* Concentration of higher dimensional entanglement: qutrits of photon orbital angular momentum [J]. *Physical Review Letters*, 2003, 91(22): 227902.
- [3] Wang J, Yang J Y, Fazal I M, *et al.* Terabit free-

space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing [J]. *Nature Photonics*, 2012, 6(7): 488-496.

- [4] Padgett M, Bowman R. Tweezers with a twist [J]. *Nature Photonics*, 2011, 5(6): 343-348.
- [5] Keller J, Schönle A, Hell S W. Efficient fluorescence inhibition patterns for RESOLFT microscopy [J]. *Optics Express*, 2007, 15(6): 3361-3371.
- [6] Zeng J, Chen Y H, Liu X L, *et al.* Research progress on partially coherent vortex beams [J]. *Acta Optica Sinica*, 2019, 39(1): 0126004.
曾军, 陈亚红, 刘显龙, 等. 部分相干涡旋光束研究进展 [J]. *光学学报*, 2019, 39(1): 0126004.
- [7] Fu S Y, Gao C Q. Selective generation of arbitrary vectorial vortex beams [J]. *Acta Optica Sinica*, 2019, 39(1): 0126014.
付时尧, 高春清. 矢量涡旋光束的模式连续可调生成技术 [J]. *光学学报*, 2019, 39(1): 0126014.
- [8] Ke X Z, Xie Y C, Zhang Y. Orbital angular momentum measurement of vortex beam and its performance improvement [J]. *Acta Optica Sinica*, 2019, 39(1): 0126017.
柯熙政, 谢炎辰, 张颖. 涡旋光束轨道角动量检测及其性能改善 [J]. *光学学报*, 2019, 39(1): 0126017.
- [9] Berry M V. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps [J]. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, 2004, 6(2): 259-268.
- [10] Leach J, Yao E, Padgett M J. Observation of the vortex structure of a non-integer vortex beam [J]. *New Journal of Physics*, 2004, 6: 71.
- [11] Lee W M, Yuan X C, Dholakia K. Experimental observation of optical vortex evolution in a Gaussian beam with an embedded fractional phase step [J]. *Optics Communications*, 2004, 239(1/2/3): 129-135.
- [12] Mourka A, Baumgartl J, Shanor C, *et al.* Visualization of the birth of an optical vortex using

- diffraction from a triangular aperture [J]. *Optics Express*, 2011, 19(7): 5760-5771.
- [13] Huang H C, Lin Y T, Shih M F. Measuring the fractional orbital angular momentum of a vortex light beam by cascaded Mach-Zehnder interferometers[J]. *Optics Communications*, 2012, 285(4): 383-388.
- [14] Tao S H, Yuan X C, Lin J, *et al.* Fractional optical vortex beam induced rotation of particles[J]. *Optics Express*, 2005, 13(20): 7726-7731.
- [15] Liu M, Cheng C F, Ren X R. Distribution characteristics of intensity and phase vortices of speckle fields produced by N-pinhole random screens [J]. *Chinese Physics B*, 2015, 24(9): 094202.
- [16] Chen G Y, Chen Y Q, Chen J F, *et al.* Research on the characteristics of fractional vortex beam and experimental analysis [J]. *Study on Optical Communications*, 2017(5): 14-17.
- 陈古运, 陈亚群, 陈建飞, 等. 分数阶涡旋光的特性研究及其实验分析[J]. *光通信研究*, 2017(5): 14-17.
- [17] Jeffrey A, Zwillinger D. *Table of integrals, series, and products*[M]. USA: Academic Press, 2007.