

磁光调制方位传递系统中螺线管近轴区磁场影响分析

杨志勇*, 许友安, 蔡伟, 邢俊晖, 张志利

火箭军工程大学兵器发射理论与技术国家重点学科实验室, 陕西 西安 710025

摘要 磁光调制方位传递系统中, 交变电流驱动内置磁光材料的螺线管磁场至关重要, 直接关系到方位信息的传递精度。研究了交变电流驱动的螺线管内磁场对方位信息传递精度的影响。首先, 利用麦克斯韦方程构建空心螺线管电磁场模型, 分析驱动信号频率对磁场的影响; 然后结合安培环路定律建立内置磁光材料的螺线管内部磁场模型; 最后分析无松弛极化介质、松弛极化介质、驱动信号频率等对系统方位传递精度的影响。结果表明: 驱动信号频率是影响系统方位传递精度的重要因素, 且方位传递误差存在规律性; 无松弛极化介质与松弛极化介质对系统方位传递精度的影响程度相当。该结果为研究磁光调制方位传递系统的方位传递精度与系统优化设计提供了参考。

关键词 光学器件; 磁光调制; 方位传递; 螺线管; 近轴区磁场

中图分类号 O441

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201939.0723004

Effect Analysis of Solenoid Paraxial Magnetic Field in Azimuth Transfer System Based on Magneto-Optical Modulation

Yang Zhiyong*, Xu Youan, Cai Wei, Xing Junhui, Zhang Zhili

Armament Launch Theory and Technology Key Discipline Laboratory of PRC, Rocket Force University of Engineering, Xi'an, Shaanxi 710025, China

Abstract In the azimuth transfer system based on magneto-optical modulation, the magnetic field of a magneto-optic material based built-in solenoid driven by alternating current is very important and directly related to the azimuth transmission accuracy. This paper presents the effect of the solenoid paraxial magnetic field driven by alternating current on the azimuth transmission accuracy. First, an electromagnetic field model of a hollow solenoid is constructed using the Maxwell equation, and the influence of the driving signal frequency on the magnetic field is analyzed. Then, a magnetic field model of the built-in solenoid based on magneto-optic material is established according to the ampere loop law. Finally, the effects of a non-relaxation polarization medium, a relaxation polarization medium, and driving signal frequency on the azimuth transmission accuracy are analyzed. The results demonstrate that the driving signal frequency is an important factor affecting the system azimuth transmission accuracy, and the error of the azimuth transmission is regular. The effects of the non-relaxation and relaxation polarization media on the system azimuth transmission accuracy are similar. We expect that these results will provide a reference for further analysis on azimuth transmission accuracy and system optimization design.

Key words optical devices; magneto-optical modulation; azimuth transmission; solenoid; paraxial magnetic field

OCIS codes 230.3810; 230.2240; 160.3820

1 引 言

基于磁光调制的方位传递技术, 是指利用光的偏振和磁光调制中的法拉第效应测量位于不同水平面上的上下两台无机械连接的设备之间的水平方位角, 然后通过控制系统使两台设备方位同步, 最终达

到精确对准的目的^[1]。其技术核心是基于马吕斯定律的磁光调制技术, 本质是利用法拉第效应对携带方位信息的线偏振光信号进行调制、解调, 从而提高方位传递精度。在磁光调制过程中, 交变电流信号驱动螺线管产生磁场, 进而使偏振光的偏振面发生偏转, 产生法拉第旋转, 实现对偏振光信号的调制,

收稿日期: 2018-09-12; 修回日期: 2018-12-06; 录用日期: 2019-02-25

基金项目: 国家自然科学基金(61505254)

* E-mail: yangzhiyong121@126.com

因此交变电流驱动螺线管产生的磁场对方位信息的传递精度至关重要,但是目前关于此方面的研究很少。因此本文重点利用麦克斯韦方程分析交变电流驱动下螺线管的磁场分布,尤其是与方位传递精度密切相关的螺线管内近轴区的磁场分布,进而阐明近轴区磁场对系统方位传递精度的影响。

当前关于螺线管磁场分析的文献多数关注螺线管磁场的整体分布特点及其实际应用,可概括为以下两方面:1)采用不同的方法分析实际应用中螺线管的磁场分布及特性,如中国聚变工程实验堆中心螺线管模型线圈磁场及电磁载荷计算、高超声速飞行器磁控分析、磁过滤弯管和喇叭形螺线管内磁场分析、方波信号驱动的螺线管磁场分析等^[2-9];2)通过螺线管磁场分析进行系统优化设计,如线圈型电磁发射器磁场构型的设计与分析、中国加速器驱动系统超导螺线管优化设计、磁力提升装置样机中螺线管磁场分析及优化、电感测微仪传感器线圈磁场分析与优化设计等^[10-14]。由此可见,虽然关于螺线管磁场分析的文献很多,但是聚焦交变电流信号驱动的螺线管近轴区磁场分析的文献很少,经查询仅文献^[15]对交变电流驱动的螺线管整体磁场进行了简要分析,目前没有文献详细阐述磁光调制方位传递系统中磁场对方位传递精度的影响。

本文以基于磁光调制的方位传递系统为对象,

首先利用麦克斯韦方程构建了交变电流驱动的空心螺线管电磁场模型,初步分析了驱动信号频率对磁场的影响;然后在空心螺线管模型基础上,结合安培环路定律建立了内置磁光材料的螺线管内部磁场模型;最后,分析了无松弛极化介质、松弛极化介质、驱动信号频率等对磁感应强度幅值、相移的影响,并进一步阐述了磁场变化对方位传递精度的影响。

2 基于磁光调制的方位传递系统

图1为基于磁光调制的方位传递系统原理图,系统由上仪器、下仪器两部分组成。上仪器中激光器发出的激光,经过起偏器成为线偏振光,当线偏振光通过调制器(通电螺线管)中的磁光材料时,在正弦信号驱动产生的同频交变磁场作用下,发生法拉第效应,光波偏振面发生偏转,实现偏振光信号的调制。调制后的线偏振光携带上下仪器之间的方位信息,并传输到下仪器的检偏器、聚光镜、光电转换部分。下仪器中信号检测与处理系统对光电转换后的信号进行处理,并结合上仪器中向下传输的调制信号,提取出与方位信息对应的电信号,从而利用相关算法计算得到上下仪器之间的方位信息;经过处理后的方位信息还可以控制下仪器内部步进电机的转动,从而带动下仪器转动,完成上下仪器之间的方位同步。

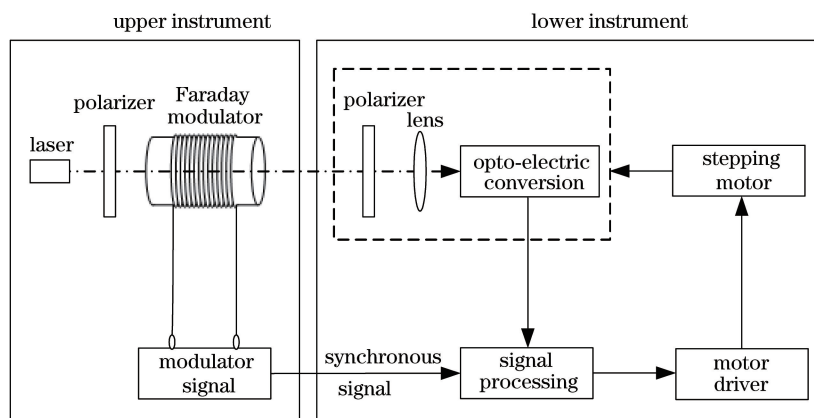


图1 基于磁光调制的方位传递系统原理

Fig. 1 Principle of azimuth transmission system based on magneto-optical modulation

3 空心螺线管近轴区电磁场模型

3.1 基本模型

设细导线密绕而成的单层螺线管半径为 a , 长度为 $2b$, 匝数为 N , 驱动电流为 I , 线圈密度为 $n = N/(2b)$ 。以螺线管中心为原点, 中轴线为 z 轴, 建立圆柱坐标系 (r, φ, z) , 如图2所示。 z 轴正方向

与线圈电流流动方向满足右手定则, 由于线圈密绕, 将线电流等效为面电流处理。

螺线管线圈驱动电流为交变电流 $I_s = I_m \exp(-i\omega t)$, 即幅值为 I_m 、频率为 ω 的正弦信号。螺线管为轴对称结构, 内部不存在周向磁场、轴向电场和径向电场。此时, 螺线管内部的磁感应强度和电场强度可分别表示为

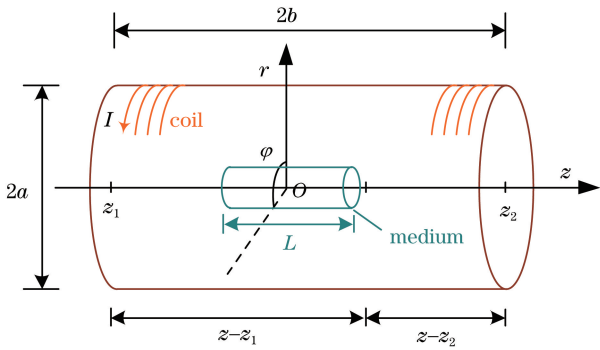


图 2 螺线管线圈示意图

Fig. 2 Schematic of solenoid coil

$$\begin{cases} \mathbf{B}(r, z, t) = B_r(r, z, t)\mathbf{r} + B_z(r, z, t)\mathbf{z} \\ \mathbf{E}(r, z, t) = E_\varphi(r, z, t)\boldsymbol{\varphi} \end{cases}, \quad (1)$$

式中： $\mathbf{r}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{z}$ 分别为径向、周向及轴向的方向矢量； \mathbf{B}, \mathbf{E} 分别代表螺线管的磁感应强度和电场强度； B_r, B_z 分别为径向和轴向磁感应强度； E_φ 为周向电场强度； z 代表中轴线坐标； r 表示径向到轴线的距离； t 为时间变量。

麦克斯韦方程描述的空间时变电磁场关系如下

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

式中： ∇ 为哈密顿算子； \mathbf{J} 为电流密度； ρ 为电荷密度； $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ 为电位移矢量， ϵ_0 为真空介电常数； \mathbf{H} 为磁场强度； $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ ， μ_0 为真空磁导率。

在螺线管内部 ($r < a$) 区域， $\mathbf{J} = \mathbf{0}, \rho = 0$ ，将(1)式代入(2)式，得到螺线管电磁场关系式为

$$\frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = -i\omega B_r, \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r} = i\omega B_z, \quad (4)$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = -i\omega\mu_0\epsilon_0 E_\varphi, \quad (5)$$

根据(3)~(5)式，理论上能够求得电磁场全空间的解。

对基于磁光调制的方位传递系统而言，磁光材料放置在螺线管内部轴线上，偏振光信号经过磁光材料时光波偏振面才能发生偏转，因此重点关注螺线管内部磁光材料区域内的磁场分布，简称近轴区电磁场(如无特殊说明，后面讨论均为近轴区磁场)。

由于螺线管的轴对称性，且考虑到磁场光材料的尺寸较小，且放置在螺线管轴线上，因此在分析近

轴区磁场时可忽略径向磁感应强度 B_r ，结合(4)式和(5)式得到

$$r^2 \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} + r \frac{\partial B_z}{\partial r} + k_0^2 r^2 B_z = 0, \quad (6)$$

$$r^2 \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial r^2} + r \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} + (k_0^2 r^2 - 1)E_\varphi = 0, \quad (7)$$

(6)式、(7)式即为求解交变电流驱动螺线管近轴区电磁场的基本模型。其中 $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \omega/c$ 为真空中的波数， c 为真空中的光速。

3.2 空心螺线管近轴区电磁场

求解(6)式得到螺线管内部轴向磁感应强度 B_z 的通解为

$$B_z(r) = AJ_0(k_0 r) + CN_0(k_0 r), \quad (8)$$

式中： A, C 为待求积分常数； $J_0(k_0 r)$ 是第一类零阶贝塞尔函数； $N_0(k_0 r)$ 是第二类零阶贝塞尔函数。

考虑到 $B_z(\omega \rightarrow 0) = AJ_0(k_0 r \rightarrow 0) + CN_0(k_0 r \rightarrow 0) = B_0$ ，而 $J_0(k_0 r \rightarrow 0) = 1, N_0(k_0 r \rightarrow 0) \rightarrow -\infty$ ，因此 $A = B_0, C = 0$ ，于是

$$B_z(r, t) = B_0 J_0(k_0 r) \cdot \exp(-i\omega t), \quad (9)$$

式中： B_0 为直流信号激励时螺线管内部磁感应强度幅值。

同理，由(7)式解得螺线管内部周向电场强度为

$$E_\varphi(r) = A' J_1(k_0 r) + C' N_1(k_0 r), \quad (10)$$

式中： A', C' 为待求积分常数。同样取 $\omega \rightarrow 0$ ，此时 $J_1(k_0 r \rightarrow 0) = 0, N_1(k_0 r \rightarrow 0) \rightarrow -\infty$ ，因此 $C' = 0$ 。系数 A' 的值由以下关系式确定：

$$\mathbf{E} = \frac{i}{\omega\mu\epsilon} \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{i}{\omega\mu\epsilon} \frac{dB}{dr} \mathbf{e}_\varphi, \quad (11)$$

式中： μ 为介质的磁导率； \mathbf{e}_φ 为电场周向上的单位矢量。由(9)、(10)、(11)式得到 $A' = icA$ ，因此螺线管内部周向电场强度表达式为

$$E_\varphi(r, t) = icB_0 J_1(k_0 r) \cdot \exp(-i\omega t). \quad (12)$$

由空心螺线管内部磁感应强度表达式(9)和电场强度表达式(12)可见，空心螺线管内部近轴区电磁场与驱动信号频率密切相关，且驱动信号频率以及测量点到轴线的距离 r 均影响磁感应强度的幅值。电场强度幅值和磁感应强度幅值与驱动信号频率的关系如图 3 所示，其中图 3(a)为磁感应强度幅值与驱动信号频率的关系图，图 3(b)为电场强度幅值与驱动信号频率的关系图，且同一图中两条曲线分别表示距离螺线管轴线 1 cm 和 2 cm 时磁感应强度幅值随驱动信号频率的变化情况。

由图 3(a)可见，当驱动信号频率小于 100 MHz 时，磁感应强度幅值几乎没有变化，这是由于低频交

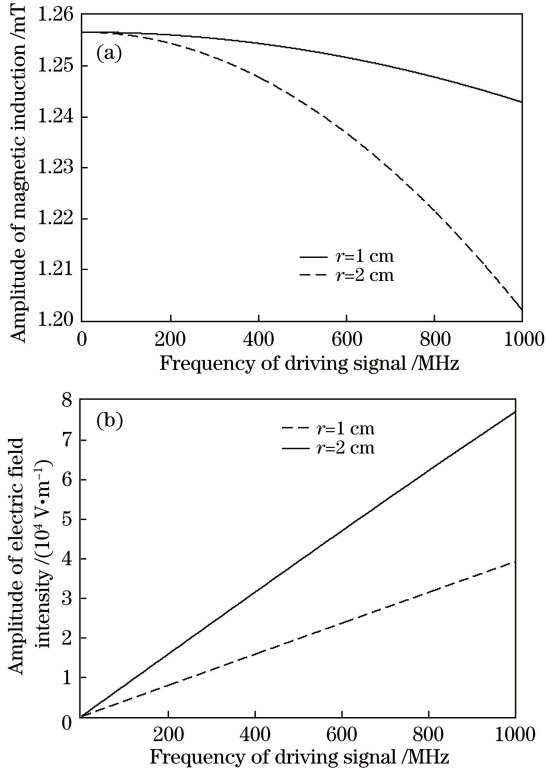


图3 磁感应强度幅值、电场强度幅值随频率变化。

(a) 磁感应强度幅值变化情况;(b) 电场强度幅值变化情况

Fig. 3 Variations of magnetic induction and electric field intensity amplitudes with frequency. (a) Variation of magnetic induction amplitude; (b) variation of electric field intensity amplitude

变电场激发的附加磁场十分微弱;而驱动信号频率较高时,磁感应强度幅值衰减明显,这是高频交流电场激发的磁场作用所致,此时不能忽略附加磁场。由同一图中两条曲线对比可见,随着驱动信号频率的增加,磁感应强度幅值均会衰减,但是距离螺线管轴线越远($r=2\text{ cm}$),磁感应强度幅值衰减越快,说明距离轴线越近,磁场越不易受到驱动信号频率变化的影响。

由图3(b)可见,两条曲线均从零开始呈递增趋势,说明交变磁场激发了感生电场。与磁场的变化规律类似,远离轴线位置的电场变化更快,说明越靠近螺线管轴线位置,电磁场稳定性越好。

4 内置无松弛极化介质的螺线管近轴区磁场分析

介质在外场作用下发生相对位移形成偶极子的过程称为极化。通常电介质只存在电子位移极化和原子极化,但是对于极性电介质而言,由于极化建立时间相对较长,称为松弛极化。因松弛极化特性与

交流信号频率有关,一定程度上会影响磁场及方位传递精度,故此处分别讨论非松弛极化介质和松弛极化介质对磁场的影响。

4.1 磁场模型

在外电场作用下,无松弛极化介质内部极化强度 \mathbf{P} 和电位移矢量 \mathbf{D} 以及电场强度 \mathbf{E} 的关系为

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = (1 + \alpha_e) \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (13)$$

式中: ϵ 为介质的介电常数; ϵ_r 为介质的相对介电常数; α_e 为介质的极化率。将(13)式代入到(2)式中,经过上述类似推导,得到介质中磁感应强度的表达式为

$$B = B_z(r, t) = B_0 J_0(kr) \cdot \exp(-i\omega t), \quad (14)$$

式中: $k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$ 为光在介质中的波数。

由于介质的存在,介质内部的电场会有所变化,根据交变电磁场相互激发原理,介质外部的磁场也会产生相应的变化。此时,螺线管内部的磁感应强度可分为两部分

$$B_{zr}(r, t) = B_0 J_0(kr) \cdot \exp(-i\omega t), r < R, \quad (15)$$

$$B_{zo}(r, t) = A J_0(k_0 r) \cdot \exp(-i\omega t), R < r < a, \quad (16)$$

式中: B_{zr} 为介质内部的磁感应强度; B_{zo} 为介质外部的感应强度; R 为介质的半径; a 为螺线管半径。

图4为介质剖面图, L 为介质的长度, R 为介质的半径。在介质与空气的分界处取一微矩形方框 $\Delta l \times \Delta h$, 该闭合回路内分别包含介质内磁场和介质外磁场。此时,忽略径向磁感应强度 B_r , 由安培环路定律得

$$\oint_l B dl = \Delta l [B_{zr}(R) - B_{zo}(R)] = \mu_0 \sum_S I, \quad (17)$$

式中: l 和 S 分别代表积分路径以及该路径包围的面积; I 指积分路径内包含的电流。显然, $I=0$ 导致

$$B_{zr}(R) - B_{zo}(R) = 0. \quad (18)$$

由(15)、(16)、(18)式解得 $A = B_0 \cdot J_0(kR) / J_0(k_0 R)$ 。于是得到螺线管内的磁感应强度为

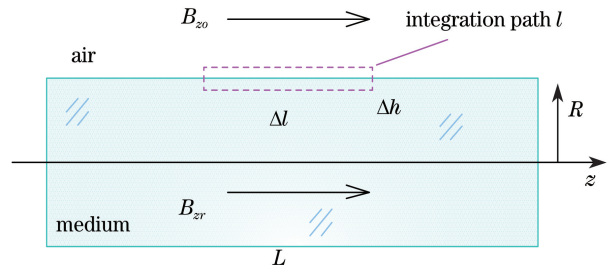


图4 介质剖面示意图

Fig. 4 Diagram of medium section

$$B_z(r, t) = \begin{cases} B_0 J_0(kr) \cdot \exp(-i\omega t) & (r < R) \\ B_0 \frac{J_0(kR)}{J_0(k_0 R)} J_0(k_0 r) \cdot \exp(-i\omega t) & (R < r < a) \end{cases} \quad (19)$$

由(19)式可见,无论是介质内部还是介质外部磁场,均是驱动信号同频率的正弦信号。由于 $J_0(x)$ 在初始段为减函数, k 与频率相关,故磁感应强度幅值会随着驱动信号频率的增加而有规律地衰减,同时磁场在径向的分布也不均匀,会呈相似的衰减特性。由于螺线管磁场的边缘效应对轴线附近的磁场影响很小,这里忽略边缘效应。

当偏振光通过磁光材料时,会在外加正弦交变磁场的作用下产生法拉第效应,偏转角度可表示为

$$\theta = VBL, \quad (20)$$

式中: θ 指偏振面的旋转角度; B 为磁感应强度幅值; L 为磁光介质的长度; V 为介质材料的维尔德常数;定义 $m_h = 2VBL$ 为调制度,单位为rad。

对方位传递系统中磁光调制后的信号进行隔直、滤波处理,得到交流信号 u_A ,经分析发现 u_A 中始终存在两个横坐标不变的极值点 u_{A1} 、 u_{A2} ,采集这两个极值点并作“差除和”运算,得到

$$\frac{u_{A1} - u_{A2}}{u_{A1} + u_{A2}} = \frac{J_1(m_h) \sin(2\alpha)}{J_2(m_h) \cos(2\alpha)}, \quad (21)$$

进而得到系统方位角测量模型

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{J_2(m_h)}{J_1(m_h)} \cdot \frac{u_{A1} - u_{A2}}{u_{A1} + u_{A2}} \right]. \quad (22)$$

由上述分析可见,当磁感应强度幅值发生变化时,即使其余参数不变,磁感应强度幅值也会影响调制度,进而影响方位传递精度。

4.2 磁场特性及其影响分析

设定参数:驱动信号幅值 $I_m = 1$ A,线圈密度 $n = 1000$,螺线管半径 $a = 3.5$ cm,半长 $b = 5.5$ cm,螺线管内介质半径 $R = 0.5$ cm,相对介电常数 $\epsilon_r = 4.1$,相对磁导率 $\mu_r = 1$,空气的介电常数和磁导率均为1。

分别选取 $r = 0.4R$ 、 $4.0R$ 两个点位,介质内外、不同位置磁感应强度幅值与驱动信号频率之间的关系如图5所示。图5中虚线表示介质内部 $r = 0.4R$ 处的磁感应强度幅值,实线表示无介质时 $r = 0.4R$ 处的磁感应强度幅值, \circ 线表示介质外部 $r = 4R$ 处的磁感应强度幅值, $+$ 线表示无介质时 $r = 4R$ 处的磁感应强度幅值。

由图5可见,无论是 $r = 0.4R$ 还是 $r = 4.0R$,随着驱动信号频率增加,磁感应强度幅值向下衰减;驱动信号频率一定时,径向距离越大,磁感应强度幅值

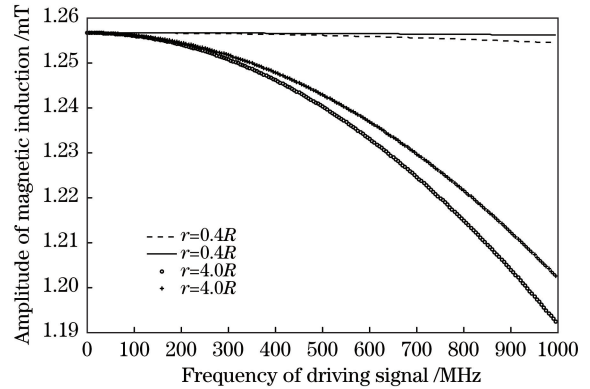


图5 磁感应强度幅值随驱动信号频率变化图

Fig. 5 Variation of magnetic induction amplitude with frequency of driving signal

衰减越明显;且实线均位于虚线上方,说明磁感应强度幅值随频率的衰减情况还与是否存在介质相关。螺线管内存在介质时,磁感应强度幅值衰减更快,这是介质的相对介电常数大于空气介电常数所致,在电磁场相互激发过程中,电场在介质内极化后强度得到加强,而后反作用于上一级磁场,起到了削弱总磁场的作用。

当螺线管内部存在介质时,随着驱动信号频率增加,磁感应强度幅值逐渐衰减,从而影响方位传递精度。设定入射光波长为632.8 nm,磁光材料的维尔德常数为 $-134.0 \text{ rad} \cdot \text{T}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$,磁光材料长度为3 cm,方位角为 1° ,此时,驱动信号频率变化引起的方位传递误差如图6(a)所示;方位角在 $0 \sim 360^\circ$ 范围内变化时,驱动信号频率变化引起的方位传递误差如图6(b)所示。

由图6(a)可见:驱动信号频率低于100 MHz时,方位传递误差较小;随着驱动信号频率增加,方位传递误差越来越大。由图6(b)可知,当方位角在 $0 \sim 360^\circ$ 范围内变化时,方位传递误差存在周期性,且总体而言,驱动信号频率越高,方位传递误差越大。

分别选择驱动信号频率 $f = 100$ MHz、500 MHz两种情况,螺线管内磁感应强度幅值在径向方向上的分布如图7所示。图7中 \square 线、实线、虚线分别表示驱动信号频率 $f = 100$ MHz的情况下,存在介质时螺线管内部、外部的磁感应强度幅值以及不存在介质时的磁感应强度幅值; \star 线、 \diamond 线、点画线分别表示驱动信号频率 $f = 500$ MHz情况

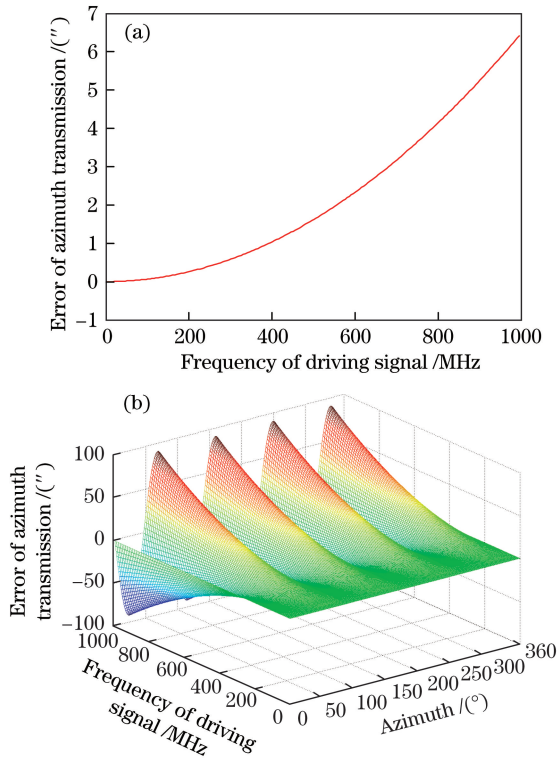


图 6 驱动信号频率变化对方位传递精度的影响
Fig. 6 Effect of driving signal frequency on azimuth transmission accuracy

下,存在介质时螺线管内部、外部磁场以及不存在介质时的磁感应强度幅值。由磁感应强度幅值变化趋势可见:低频情况下,随着径向距离 r 增大,磁感应强度幅值几乎没有变化,可近似认为磁场是均匀分布的;高频情况下,随着径向距离 r 增大,磁感应强度幅值衰减越来越明显,说明高频驱动信号是造成径向磁感应强度分布不均匀的主要因素。

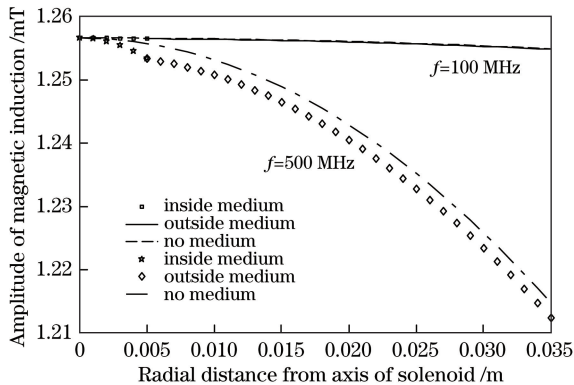


图 7 螺线管内轴向磁感应强度幅值的径向分布图
Fig. 7 Radial distribution of solenoid axial magnetic induction amplitude

由图 7 中曲线对比可见:低频情况下磁感应强度幅度曲线近似重合,几乎没有区别;而高频情况下,无介质时磁感应强度幅值略高于有介质时的磁

感应强度幅值。观察高频情况下磁场曲线发现,随着径向距离 r 的增加,初始阶段磁感应强度幅值衰减速率较快,这是介质内部相对介电常数较大,从而使得波矢 k 较大引起的;介质外部磁场的衰减速率与空心螺线管磁场的衰减速率几乎一致,但在幅值上略小于空心时的情形。由上述分析可见,高频信号驱动时,螺线管内部介质会影响介质外的磁场。

同样设定入射光波长为 632.8 nm,磁光材料维尔德常数为 $-134.0 \text{ rad} \cdot \text{T}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$,磁光材料长度为 3 cm,方位角为 1° ,驱动信号频率为 100 MHz 时,径向距离变化引起的方位传递误差如图 8(a)所示,驱动信号频率分别为 100 MHz、500 MHz 时,径向距离变化引起的方位传递误差对比情况如图 8(b)所示,方位角在 $0 \sim 360^\circ$ 范围内变化,且驱动信号频率分别为 100 MHz、500 MHz 时,径向距离变化引起的方位传递误差分别如图 8(c)、(d)所示。

由图 8(a)可见,驱动信号频率一定时,随着径向距离增大,方位传递误差逐渐增大,但是由图 8(b)中两条曲线对比可见,驱动信号频率引起的方位传递误差远大于径向距离的影响。由图 8(a)、(b)可见,磁光材料的直径以及所处近轴区范围大小的确定,需要综合考虑方位传递系统总精度、调制信号频率等参数。由图 8(c)、(d)可知,当方位角在 $0 \sim 360^\circ$ 范围内变化时,方位传递误差存在周期性;从图 8(c)、(d)中选择同一点位、同样参数、但驱动信号频率不同情况下的仿真结果进行对比,结果表明,驱动信号频率对方位传递误差的影响明显强于径向距离的影响。

由上述分析可知,驱动信号频率对方位传递精度的影响较大,建议在实际应用中采用低频信号驱动螺线管,这与实验设备驱动信号频率一般选择 1 kHz 左右是相符的。

5 内置松弛极化介质的螺线管近轴区磁场分析

当螺线管内存在松弛极化介质时,需考虑电场频率与松弛时间之间的关系。松弛时间是指介质的电极化强度在外电场变化后由暂态趋于一个定态所需要的时间。电场频率较低时,电场的变化周期大于松弛时间,介质的极化能够跟得上电场变化;随着驱动信号频率增大,电场周期逐渐变短,当电场周期与松弛时间相当时,松弛极化将逐渐滞后于外电场的变化,从而产生相位差。因此螺线管内存在松弛极化介质时,需要考虑相位差

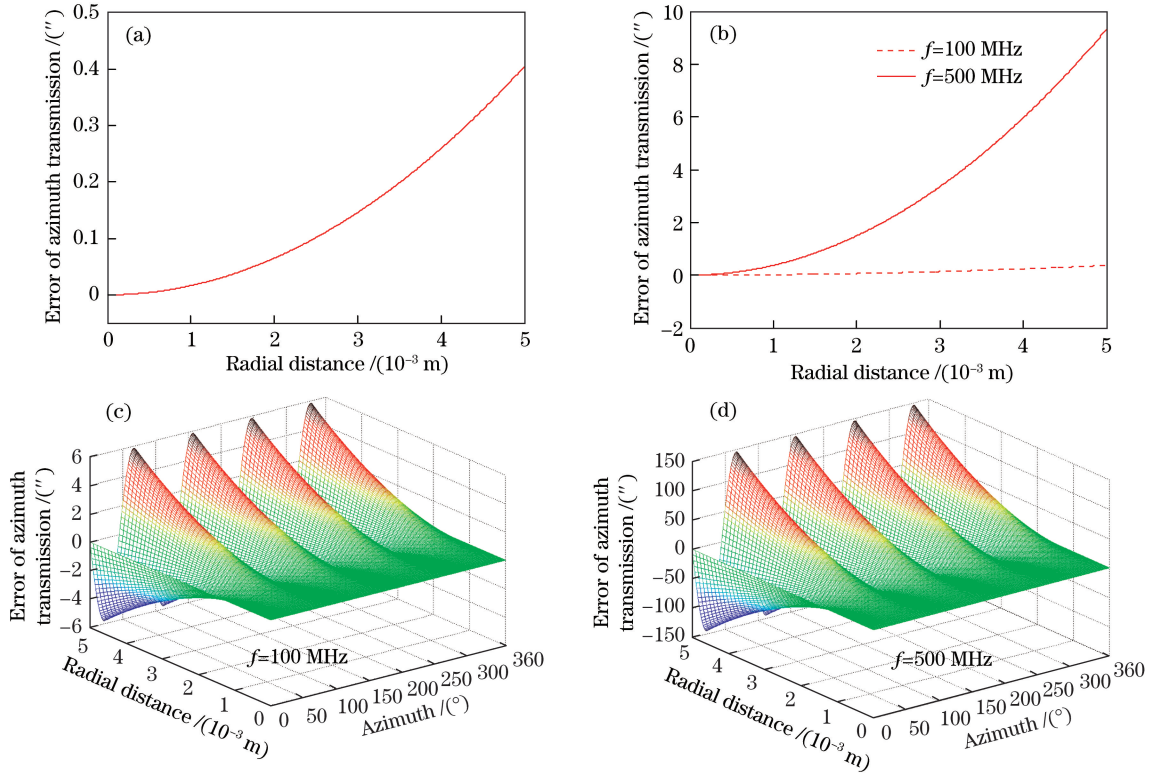


图 8 径向距离变化对方位传递精度的影响

Fig. 8 Effect of radial distance variation on azimuth transmission accuracy

带来的影响。

5.1 磁场模型

以介质和线圈为界将螺线管空间划分为 3 个区域,具体如图 9 所示。图 9 中,域 I($r < R$)为介质内部区域,对应的磁感应强度为 B_{zr}^{in} 、电场强度为 $E_{\varphi r}^{\text{in}}$ 、相移量为 ϕ_i ;域 II($R < r < a$)为介质外、螺线管内的区域,对应的磁感应强度为 B_{z0}^{in} 、电场强度为 $E_{\varphi 0}^{\text{in}}$ 、相移量为 ϕ ;域 III($r > a$)为螺线管外部区域,对应的磁感应强度为 B_{z0}^{out} 、电场为 $E_{\varphi 0}^{\text{out}}$ 、相移量为 ϕ_o 。

电磁场模型构建过程与上述电磁场模型建立过程类似,但是由于介质松弛极化引入了相移量,磁感应强度在表达形式上发生了微小变化,具体表达式为

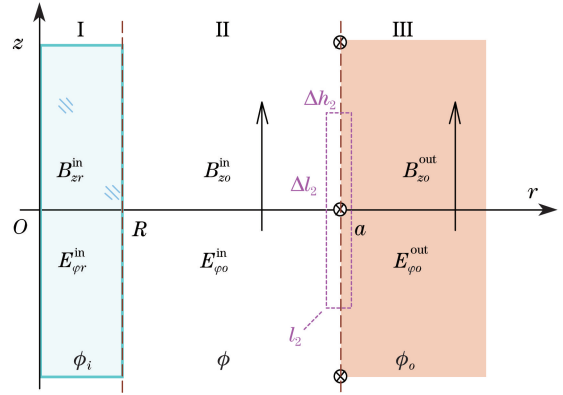


图 9 螺线管电磁场空间区域划分图

Fig. 9 Region division of solenoid electromagnetic field

$$\begin{cases} B_{zr}^{\text{in}}(r, t) = B_0 J_0(kr) \exp[-i(\omega t + \phi_i)] & (r < R) \\ B_{z0}^{\text{in}}(r, t) = A J_0(k_0 r) \exp[-i(\omega t + \phi)] & (R < r < a) \\ B_{z0}^{\text{out}}(r, t) = C H_0^1(k_0 r) \exp[-i(\omega t + \phi_o)] & (r > a) \end{cases} \quad (23)$$

结合(11)式给出的电磁关系,采用前文所述类似方法得到螺线管电场强度的表达式为

$$\begin{cases} E_{\varphi r}^{\text{in}}(r, t) = (i\omega B_0/k) J_1(kr) \exp[-i(\omega t + \phi_i)] & (r < R) \\ E_{\varphi 0}^{\text{in}}(r, t) = (i\omega A/k_0) J_1(k_0 r) \exp[-i(\omega t + \phi)] & (R < r < a) \\ E_{\varphi 0}^{\text{out}}(r, t) = (i\omega C/k_0) H_1^1(k_0 r) \exp[-i(\omega t + \phi_o)] & (r > a) \end{cases} \quad (24)$$

式中: A, C 为待求积分常数; $H_0^1(k_0 r)$ 和 $H_1^1(k_0 r)$ 分别为第一类零阶和一阶 Hankel 函数,满足

$H_\nu^1(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x)$,其中 $J_\nu(x)$ 是第一类 ν 阶贝塞尔函数, $N_\nu(x)$ 是第二类 ν 阶贝塞尔函数; k, k_0

分别为介质内和空气中的波数。

在螺线管线圈边界处($r=a$)取一微矩形框作为闭合积分路径 l_2 ,如图9中的虚线框所示。此时积分路径 l_2 包含的面积内存在线圈电流,由安培环路定律得到

$$\oint_{l_2} B \cdot dl = \Delta l_2 [B_{z0}^{\text{in}}(k_0 a) - B_{z0}^{\text{out}}(k_0 a)] = \mu_0 n I \cdot \Delta l_2, \quad (25)$$

其中,

$$B_{z0}^{\text{in}}(k_0 a) - B_{z0}^{\text{out}}(k_0 a) = \mu_0 n I = B_\infty, \quad (26)$$

式中: n 为线圈密度。

根据介质边界处($r=R$)磁场关系(18)式得到磁场边界条件为

$$\begin{aligned} B_{zr}^{\text{in}}(kR) - B_{zr}^{\text{in}}(k_0 a) &= 0, \\ B_{z0}^{\text{in}}(k_0 a) - B_{z0}^{\text{out}}(k_0 a) &= B_\infty. \end{aligned} \quad (27)$$

引入电磁感应定律

$$\oint_{l'} E dl = - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} dS. \quad (28)$$

式中: l, S 分别为积分路径和路径所围的面积。在螺线管的横截面上,沿着线圈边界选取极窄的环形框($\Delta h' \rightarrow 0$)作为积分路径 l' ,如图10所示。

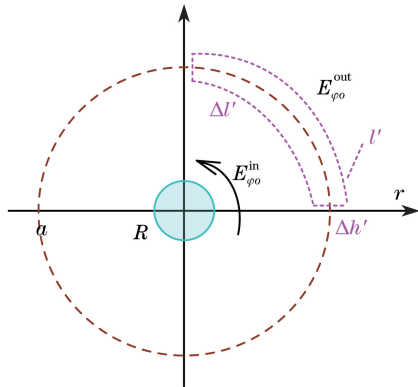


图10 螺线管横截面示意图

Fig. 10 Cross section diagram of solenoid

对该闭合路径应用电磁感应定律

$$\begin{aligned} \oint_{l'} E dl &= [E_{\varphi 0}^{\text{in}}(k_0 a) - E_{\varphi 0}^{\text{out}}(k_0 a)] \Delta l' = \\ &= - \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \Delta l' \cdot \Delta h', \end{aligned} \quad (29)$$

因为式中的 $\partial B / \partial t$ 为有限值,所以右边等式趋于零,得到 $E_{\varphi r}^{\text{in}}(k_0 a) = E_{\varphi 0}^{\text{out}}(k_0 a)$ 。

同理,在介质边界处($r=R$)应用电磁感应定律,能够得到类似结论 $E_{\varphi r}^{\text{in}}(kR) = E_{\varphi 0}^{\text{in}}(k_0 R)$ 。因此电场边界条件可表述为

$$\begin{cases} E_{\varphi r}^{\text{in}}(kR) = E_{\varphi 0}^{\text{in}}(k_0 R) \\ E_{\varphi 0}^{\text{in}}(k_0 a) = E_{\varphi 0}^{\text{out}}(k_0 a) \end{cases} \quad (30)$$

由(27)、(30)式可见,周向电场在螺线管空间内是连续的,而轴向磁场在线圈边界处会发生跃变,其他空间内是连续的。

结合(23)、(24)、(27)和(30)式得到

$$\begin{cases} B_0 J_0(kR) \cdot \exp(-i\phi_i) - A J_0(k_0 R) \cdot \\ \exp(-i\phi) = 0 \\ A J_0(k_0 a) \cdot \exp(-i\phi) - C H_0^1(k_0 a) \cdot \\ \exp(-i\phi_0) = B_\infty \\ k_0 B_0 J_1(kR) \cdot \exp(-i\phi_i) = \\ k A J_1(k_0 R) \cdot \exp(-i\phi) \\ A J_1(k_0 a) \cdot \exp(-i\phi) = \\ C H_1^1(k_0 a) \cdot \exp(-i\phi_0) \end{cases} \quad (31)$$

求解方程组(31)得以下参数:

$$\begin{cases} \phi_0 = \arctan \left[\frac{Q N_0(k_0 a) - P N_1(k_0 a)}{Q J_0(k_0 a) - P J_1(k_0 a)} \right] \\ \delta = \arctan [N_1(k_0 a) / J_1(k_0 a)] \\ \phi_i = \phi_0 - \delta \\ \phi = \arctan \left[\frac{k_0 J_0(k_0 R) J_1(kR)}{k J_0(kR) J_1(k_0 R)} \tan \phi_i \right] \\ A = B_0 \frac{J_0(kR)}{J_0(k_0 R)} \frac{\cos \phi_i}{\cos \phi} \\ C = \frac{J_0(k_0 a)}{J_0(k_0 R)} \frac{\mu_0 n I \cdot \sin \phi_i}{J_0(k_0 R) \sin \delta - N_0(k_0 R) \cos \delta} \end{cases} \quad (32)$$

式中: $P = \frac{J_0(kR)}{J_0(k_0 R)} J_0(k_0 a)$; $Q = \frac{k_0 J_1(kR)}{k J_1(k_0 R)} J_1(k_0 a)$;

J_0, J_1 分别为第一类零阶和一阶贝塞尔函数; N_0, N_1 分别为第二类零阶和一阶贝塞尔函数。

5.2 磁场特性及其影响分析

1) 磁感应强度幅值的频率特性及其影响分析

设定参数: $I_m = 1 \text{ A}$, $n = 1000$, $a = 3.5 \text{ cm}$, $b = 5.5 \text{ cm}$, $R = 0.5 \text{ cm}$, $\epsilon_r = 4.1$, $\mu_r = 1$ 。选取 $r = 0.4R$ 、 $4R$ 两个测试点,不同测试点驱动信号频率对螺线管磁感应强度幅值的影响如图11所示。

图11中实线、•线为螺线管内置松弛极化介质时磁感应强度幅值变化情况,虚线、o线为含无松弛极化介质时的磁感应强度幅值,实线、虚线表示介质内($r = 0.4R$)的磁感应强度幅值,•线、o线表示介质外($r = 4.0R$)的磁感应强度幅值。由图11可见,实线、虚线几乎重合,说明介质是否有松弛极化特性不影响介质内部的磁感应强度幅值,因此同样参数情况下,对于无松弛极化介质和松弛极化介质而言,驱动信号频率变化对方位传递精度的影响程度是相当的。而观察•线、o线发现,随着驱动信号频率增加,

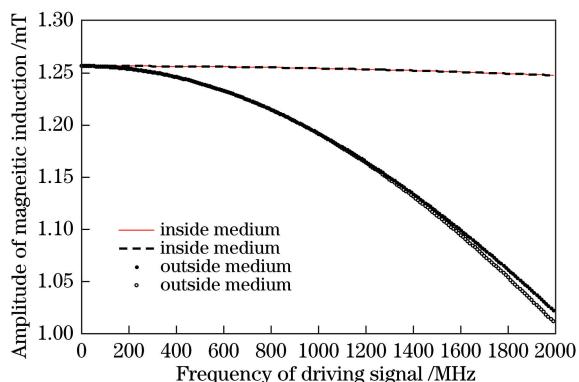


图 11 有松弛极化时磁感应强度的频率特性

Fig. 11 Frequency characteristic of magnetic induction with relaxation polarization

两条曲线渐渐分开,并且驱动信号频率越高两曲线差异越大。由此可见:介质的松弛极化特性影了介质外部的磁场,起到了减缓磁感应强度幅值衰减的作用。

2) 磁场分布特性及其影响分析

仿真参数不变,驱动信号频率分别为 $f = 100 \text{ MHz}$ 、 500 MHz ,磁感应强度幅值在径向上的分布情况如图 12 所示。

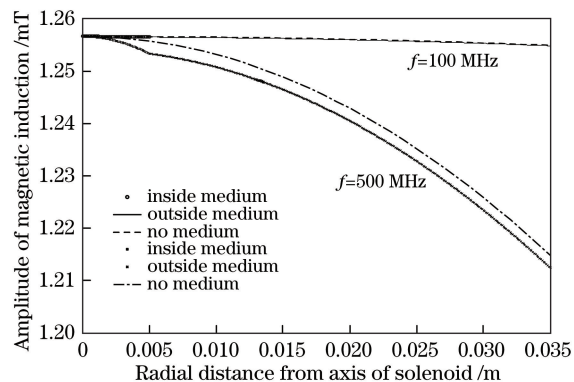


图 12 特定频率下有无松弛极化介质时螺线管内的磁感应强度幅值分布

Fig. 12 Distribution of magnetic induction amplitude in solenoid with or without relaxation medium at specific frequencies

图 12 中,○线、实线、虚线分别表示在驱动信号频率 $f = 100 \text{ MHz}$ 下,存在介质时螺线管内部、外部的磁感应强度幅值以及不存在介质时的磁感应强度幅值;□线、×线、点画线分别表示驱动信号频率 $f = 500 \text{ MHz}$ 下,存在介质时螺线管内部、外部磁感应强度幅值以及不存在介质时的磁感应强度幅值。由图 12 与图 7 对比可见,两图中所有曲线的变化规律基本相同,进一步计算发现参数相同情况下同一点位的磁感应强度幅值亦相当。因此同样参数情

况下,对于螺线管内含无松弛极化介质还是松弛极化介质而言,径向距离变化对方位传递精度的影响程度是相当的。

3) 磁场相移分析及其影响分析

松弛极化介质在极化过程中引入了相移,从而引起了一系列变化。由于高频变化的电场是导致相移的直接因素,同时电场又来源于驱动信号,因此相移与驱动信号密切相关。

采用相同的仿真参数,即: $I_m = 1 \text{ A}$, $n = 1000$, $a = 3.5 \text{ cm}$, $b = 5.5 \text{ cm}$, $R = 0.5 \text{ cm}$, $\epsilon_r = 4.1$, $\mu_r = 1$ 。图 13 是螺线管磁场相移随驱动信号频率的变化情况,由图 13 可见,随着驱动信号频率的增加,相移量逐渐向负的方向变化,并且变化率越来越大。

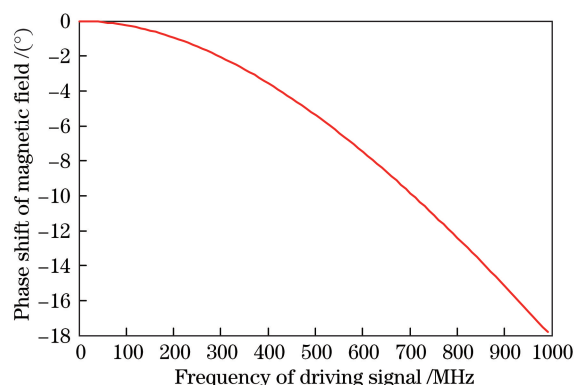


图 13 螺线管磁场相移随驱动信号频率的变化情况

Fig. 13 Variation of magnetic field phase shift in solenoid with frequency of driving signal

磁场相移的变化表现为磁场相位的变化,但没有影响磁感应强度幅值,因此对方位传递精度不产生影响。

6 结 论

利用麦克斯韦方程和安培环路定理研究了正弦波信号驱动下内置磁光材料的螺线管磁场特性,分别构建了空心螺线管、内置磁光材料的螺线管磁场模型,详细分析了无松弛极化介质、松弛极化介质、驱动信号频率对磁场的影响,并进一步阐明了对方位传递精度的影响,得出如下结论:

1) 驱动信号频率是系统方位传递精度的重要影响因素,信号频率越高,磁感应强度幅值衰减越明显,系统方位传递误差越大;当方位角在 $0 \sim 360^\circ$ 范围内变化时,方位传递误差存在周期性。

2) 螺线管内置介质会影响磁场分布,无松弛极化介质与松弛极化介质都会加速介质内磁感应强度幅值衰减;此外,松弛极化介质还会引起磁场相移,

驱动信号频率越高,相移量越大,但不影响系统方位传递精度。因此,无松弛极化介质与松弛极化介质对系统方位传递精度的影响程度是相当的。

参 考 文 献

- [1] Yang Z Y, Cai W, Zhang Z L, *et al.* Effect of magneto-optical material dielectric constant on internal axial magnetic field of solenoid modulated by alternating current[J]. *Acta Optica Sinica*, 2018, 38(4): 0426002.
杨志勇,蔡伟,张志利,等. 交变电流调制下磁光材料介电常数对螺线管内部轴向磁场的影响[J]. *光学学报*, 2018, 38(4): 0426002.
- [2] Peng L, Yang Z H, Hu Q, *et al.* Finite element computation of 2-D magnetic field of solenoid with current[J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2011, 23(8): 2151-2156.
彭澜,杨中海,胡权,等. 通电螺线管2维磁场有限元计算[J]. *强激光与粒子束*, 2011, 23(8): 2151-2156.
- [3] Cai W, Wu F C, Yang Z Y, *et al.* Analysis of solenoid magnetic field based on Maxwell equation [J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2015, 27(12): 123201.
蔡伟,伍樊成,杨志勇,等. 基于麦克斯韦方程的交变电流长螺线管磁场[J]. *强激光与粒子束*, 2015, 27(12): 123201.
- [4] Cai W, Wu F C, Yang Z Y. Magnetic field of long solenoid driven by square wave [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2015, 52(9): 092601.
蔡伟,伍樊成,杨志勇. 方波信号驱动的长螺线管磁场分析[J]. *激光与光电子学进展*, 2015, 52(9): 092601.
- [5] Liang M L, Xue K. Calculation of the magnetic field of the finite solenoid with a rectangular cross section [J]. *Physics and Engineering*, 2018, 28(1): 57-61.
梁麦林,薛凯. 矩形截面有限长螺线管磁场的计算[J]. *物理与工程*, 2018, 28(1): 57-61.
- [6] Liao B, Deng C F, Wu X Y, *et al.* Inner magnetic field distribution of solenoid studied by Matlab[J]. *Journal of Beijing Normal University (Natural Science)*, 2010, 46(6): 688-690.
廖斌,邓春风,吴先映,等. 利用 Matlab 计算螺线管内磁场分布研究[J]. *北京师范大学学报(自然科学版)*, 2010, 46(6): 688-690.
- [7] Fang Y Z, Xu Q M, Zheng J J, *et al.* Investigation on the relation between the length of magnetic core and the giant magnetoimpedance effect of solenoid with FeCo-based magnetic core[J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, 60(12): 127501.
方允樟,许启明,郑金菊,等. FeCo 基磁芯螺线管巨磁阻抗效应与磁芯长度关系的研究[J]. *物理学报*, 2011, 60(12): 127501.
- [8] Li K, Liu W Q. Analysis of the magneto hydrodynamic heat shield system for hypersonic vehicles [J]. *Acta Physica Sinica*, 2016, 65(6): 064701.
李开,刘伟强. 高超声速飞行器磁控热防护系统建模分析[J]. *物理学报*, 2016, 65(6): 064701.
- [9] Ji F, Du S J, Liu X G, *et al.* Magnetic field and electromagnetic load calculation for CFETR central solenoid model coil[J]. *Journal of Hefei University of Technology (Natural Science)*, 2015, 38(6): 788-792.
季峰,杜世俊,刘小刚,等. CFETR 中心螺线管模型线圈磁场及电磁载荷计算[J]. *合肥工业大学学报(自然科学版)*, 2015, 38(6): 788-792.
- [10] Shi Z Y, Liu L L. Improvement of precision for linear inductance micrometer[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2015, 23(1): 191-196.
石照耀,刘吕亮. 线性测微电感的精化[J]. *光学精密工程*, 2015, 23(1): 191-196.
- [11] Zhu Y W, Li H T, Yan Z M, *et al.* Design and analysis for magnetic field configuration of electromagnetic coil launcher[J]. *Acta Armamentarii*, 2011, 32(4): 464-468.
朱英伟,李海涛,严仲明,等. 线圈型电磁发射器磁场构型的设计与分析[J]. *兵工学报*, 2011, 32(4): 464-468.
- [12] Zhao L X, Lü M B, Zhang X, *et al.* Numerical analysis and experimental study of the magnetic lifting device prototype[J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2015, 27(7): 076003.
赵丽霞,吕明邦,张翔,等. 磁力提升装置样机的数值分析与实验研究[J]. *强激光与粒子束*, 2015, 27(7): 076003.
- [13] Wu W, Wang Z J, Wu B M, *et al.* Development of a superconducting solenoid for CADs[J]. *Chinese Physics C*, 2014, 38(1): 017003.
- [14] Li P, Liu Y Z, Wang J L. Port magnetic flux leakage suppression technology for static magnetic system of nuclear magnetic resonance gyroscope[J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2018, 26(1): 56-62.
李攀,刘元正,王继良. 核磁共振陀螺静磁系统端口漏磁抑制技术[J]. *中国惯性技术学报*, 2018, 26(1): 56-62.
- [15] Harmon G S. The high-frequency electric and magnetic fields of a solenoid[J]. *Journal of Applied Physics*, 1991, 69(11): 7400-7405.