

# 基于加权总差分最小化的中子稀疏投影 计算机断层重建方法

林强<sup>1</sup>, 杨民<sup>1\*</sup>, 唐彬<sup>2</sup>, 刘斌<sup>2</sup>, 霍合勇<sup>2</sup>, 刘家伟<sup>1</sup>

<sup>1</sup>北京航空航天大学机械工程及自动化学院, 北京 100191;

<sup>2</sup>中国工程物理研究院核物理与化学研究所, 四川 绵阳 621900

**摘要** 为提升高噪声稀疏角度投影条件下中子计算机断层扫描(CT)质量, 提出同时迭代重建方法(SIRT)与加权总差分最小化(WTDM)相结合的迭代重建方法(SIRT-WTDM)。在有无噪声情况下比较代数重建算法、联合代数重建算法及同时迭代重建算法的重建图像, 证明了 SIRT 迭代重建具有较高的图像重建精度与较强的抗噪声性能, 因此将 SIRT 作为高噪声中子投影图像 CT 迭代重建算法的保真项。考虑到对图像梯度稀疏性与连续性的约束, 中子 CT 迭代重建方法的正则化约束项采用 WTDM 方法。由 Shepp-Logan 模体与真实冷中子层析扫描数据验证可知, 在极端稀疏角度投影条件下, SIRT-WTDM 可获得较好的重建效果。

**关键词** 成像系统; 中子计算机断层成像; 加权总差分最小化; 稀疏角度投影; 噪声抑制

中图分类号 TP391.4

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201939.0711003

## Neutron Computed Tomography Reconstruction Method Using Sparse Projections Based on Weighted Total Difference Minimization

Lin Qiang<sup>1</sup>, Yang Min<sup>1\*</sup>, Tang Bin<sup>2</sup>, Liu Bin<sup>2</sup>, Huo Heyong<sup>2</sup>, Liu Jiawei<sup>1</sup>

<sup>1</sup> School of Mechanical Engineering and Automation, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China;

<sup>2</sup> Institute of Nuclear Physics and Chemistry, China Academy of Engineering Physics, Mianyang, Sichuan 621900, China

**Abstract** Aiming at improving the quality of the neutron computed tomography (CT) reconstructed from high noise and sparse angle projection data, an iterative reconstruction method (SIRT-WTDM) combined the simultaneous iterative reconstruction technique (SIRT) and weighted total difference minimization (WTDM) is successfully proposed. The reconstructed images obtained by algebraic reconstruction technique, simultaneous algebraic reconstruction technique, and SIRT are compared with or without the random noise in the projections, from which the SIRT method is proved to have higher reconstruction accuracy and stronger anti-noise ability. Therefore, the SIRT method is adopted as the fidelity term of the neutron CT iterative reconstruction method with high-noise projections. Considering the constraint to the sparsity and the continuity of the image gradient, the WTDM method is adopted as the regularization term of the neutron CT iterative reconstruction method. Under the condition of extreme sparse angle projections, the SIRT-WTDM can obtain the better reconstruction images, which has been proved by the Shepp-Logan simulated data and cold neutron CT scanning data.

**Key words** imaging systems; neutron computed tomography; weighted total difference minimization; sparse angle projections; noise suppression

**OCIS codes** 110.6960; 100.3010; 100.2000

## 1 引言

近年来,中子成像作为一项重要的无损检测技

术,在航空航天、材料学、核物理学、地质学、生物医学、电子、考古等领域的无损检测中发挥着越来越重要的作用<sup>[1-4]</sup>。由于低中子产额、低转换效率、高随

收稿日期: 2018-11-23; 修回日期: 2019-02-17; 录用日期: 2019-03-27

基金项目: 国家自然科学基金(U1730116,11675012)、核安全项目(41426020401)

\* E-mail: minyang.ndt@buaa.edu.cn

机噪声水平等因素的影响,在工程实践中为了得到满足工程检测需求的理想重建图像,最直接有效的措施是降低探测器帧频(等同于增大积分时间)和增大扫描投影幅数,但是其直接后果是导致扫描时间成倍增加,这在工程中难以接受。另外,长时间的中子辐射会进一步加大样品被活化的风险。

文献[5]指出,采用稀疏角度投影计算机断层扫描(CT)技术可有效解决扫描时间过长和样品辐照活化问题,并使得投影数减少、投影噪声增加。如何利用较少的投影数据重建出理想的断层图像是CT领域的研究热点之一。常用的CT重建算法一般可分为解析重建算法和迭代重建算法两类。解析重建算法的思想清晰、计算速度快,已广泛应用于各类商业CT系统,是应用最广的重建算法,但其对投影数据要求较高,如投影数目必须足够多,以满足Shannon/Nyquist采样定理且投影角度序列必须在 $0^\circ\sim 180^\circ$ (或 $0^\circ\sim 360^\circ$ )范围内均匀分布等。国际上采用的标准中子CT模式通常在 $0^\circ\sim 180^\circ$ (或 $0^\circ\sim 360^\circ$ )范围内以较小的角度间隔均匀采集数百个甚至数千个投影。迭代重建算法需要反复迭代,计算量庞大,执行速度缓慢一直成为限制其发展的重要原因。随着计算机硬件技术的快速发展及各种加速技术的出现,迭代重建算法逐渐成为研究热点。与解析重建算法相比,迭代重建算法要求的投影数据变少,在每次迭代重建的基础上可加入不同的先验知识和约束条件,因而迭代重建算法的适用范围更广泛。

稀疏角度投影下图像重建主要采用迭代重建算法[6],如迭代滤波反投影算法[7]、代数重建算法(ART)[8]、同时迭代重建算法(SIRT)[9]及介于两者之间的联合代数重建算法(SART)[10]等。ART、SIRT及SART均采用迭代更新的策略更新重建图像,相比于解析重建算法,迭代重建算法可设置不同的迭代次数与重建参数,以完成对重建图像的多次校正,并提高图像的重建精度。3种迭代重建算法的主要区别为:ART采取ray-by-ray的更新模式,每次仅更新一条射线穿过的像素,图像更新频率最快,因此图像重建收敛速度最快;SART采取view-by-view的更新模式,每次更新每个投影角度下所有射线经过的像素点;SIRT采用point-by-point的更新模式,每个图像点的更新均需计算所有投影角度下射线对当前点的贡献值,并由所有经过该点的射线贡献值取平均获得,因而重建质量最好。

随着压缩感知理论的发展,基于总变分(TV)的代数迭代重建理论在稀疏角度投影重建方面具有巨

大的潜力[11-12],Rudin等[13]提出了非线性总变分降噪模型,将总变分作为正则约束,并用于图像降噪,在降噪的同时较好地保留图像边缘和细节信息。Sidky等[14-15]提出了TVM-POCS(total variation minimization-projection onto convex sets)和ASD-POCS(adaptive steepest descent-projection onto convex sets)算法,并在稀疏投影重建中取得了良好的效果。张海娇等[16]针对能谱CT重建,利用不同能量通道下重建图像具有结构相似性,提出一种基于结构先验的加权非局部全变分(NLTV)重建算法,该方法在复杂模型和高噪声模型的能谱重建方面具有明显优势。余维等[17-18]针对总差分最小化(TDM)理论研究了加权总差分最小化(WTDM)重建算法,该方法在不完备数据重建中具有良好的效果。

本文针对冷中子稀疏角度CT扫描投影数据量较少与随机噪声严重的特征,讨论冷中子断层成像质量提升问题,对比ART、SART和SIRT在有无噪声情况下的重建图像质量,选取得到的最优迭代重建方法;考虑图像梯度的稀疏性与连续性约束,将加权总差分测度引入到中子稀疏角度投影下的CT重建,有效保护了图像边缘不同方向的梯度信息。模拟数据与真实冷中子稀疏角度投影数据验证了SIRT-WTDM重建算法在高噪声稀疏角度投影下中子CT重建效果。

## 2 SIRT 迭代重建算法

在迭代重建算法中,待重建图像被离散化为 $M$ 个像素点的图像,每个像素点的值为 $u_{j'}$ ( $j'=1,2,\dots,M$ ),探测器单元记录的投影数据为 $N$ ,投影值记为 $p_{i'}$ ( $i'=1,2,\dots,N$ ),其中 $i'$ 和 $j'$ 为序号。当一束单能射线穿过物质时,其强度呈指数规律衰减,遵循朗伯-比尔(Lambert-Beer)定律。通过探测器对射线强度进行定量测量可得[19]

$$p = \int \mu(x, y) dL = -\ln(I/I_0), \quad (1)$$

式中: $I$ 为探测器单元接收到的衰减后射线辐射强度; $I_0$ 为探测器单元接收到的衰减前射线辐射强度; $p$ 为物质衰减系数函数 $\mu(x, y)$ 在积分路径 $L$ 上的积分值。SIRT迭代重建方法的方程为

$$u_{j'}^{(k+1)} = u_{j'}^{(k)} + \lambda^{(k)} \frac{\sum_{i'=1}^N \left( a_{i'j'} \frac{p_{i'} - \sum_{m'=1}^M a_{i'm'} u_{m'}}{\sum_{m'=1}^M a_{i'm'}} \right)}{\sum_{i'=1}^N a_{i'j'}}, \quad (2)$$

式中： $u_{j'}$ 为待重建图像的像素值； $k$ 为SIRT算法迭代次数； $a_{i'j'}$ 为系统矩阵元，是重建像素 $j'$ 对第 $i'$ 条射线投影值 $p_{i'}$ 的贡献度； $\lambda$ 为松弛因子( $0 < \lambda < 2$ )； $m'$ 为重建图像像素序号。在本文算法中，将每一条射线束看作一条无限窄的直线，射线 $i'$ 穿过重建像素 $j'$ 的长度定义为 $a_{i'j'}$ ，因此 $0 \leq a_{i'j'} \leq \sqrt{2}$  ( $1 \leq i' \leq N, 1 \leq j' \leq M$ )。

针对Shepp-Logan模型<sup>[20]</sup>，设计了平行束CT模拟程序，在 $0^\circ \sim 180^\circ$ 范围内均匀采集Shepp-Logan模型360幅投影，验证ART、SART及SIRT的重建效果。ART、SART与SIRT的投影数据访问顺序默认为顺序访问，即按照CT扫描的实际顺序，从第一个投影顺序访问至最后一个投影。当松

弛因子 $\lambda = 1.5$ 、迭代次数为300时各个算法的重建图像如图1所示。受中子源强度、探测器转换效率、辐射本底、信号噪声和记录系统随机噪声等因素影响，中子照相与CT的信噪比较低，比X射线图像信噪比低1~2个数量级。因此，中子CT重建算法应具有较强的抗噪声性能，以获取更多的重建图像细节信息。为验证ART、SART及SIRT的抗噪声特征，在Shepp-Logan模型的归一化投影正弦图中加入平均值为0、标准差为0.01的高斯噪声，迭代重建参数保持不变，最终重建图像如图2所示。由图2可知，SIRT的重建图像与标准Shepp-Logan模拟模体的总体差距非常小，且像素灰度值更加平稳，具有较高的稳定性。

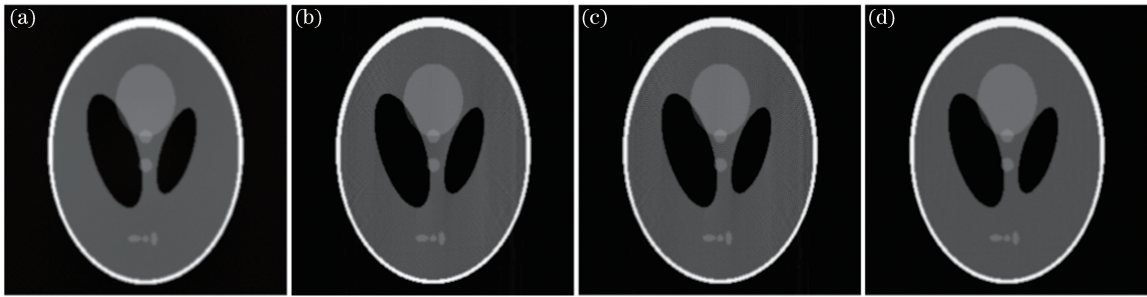


图1 Shepp-Logan重建图像。(a)理想图像；(b)ART算法；(c)SART算法；(d)SIRT算法

Fig. 1 Reconstructed images of Shepp-Logan. (a) Ideal image; (b) ART algorithm; (c) SART algorithm; (d) SIRT algorithm

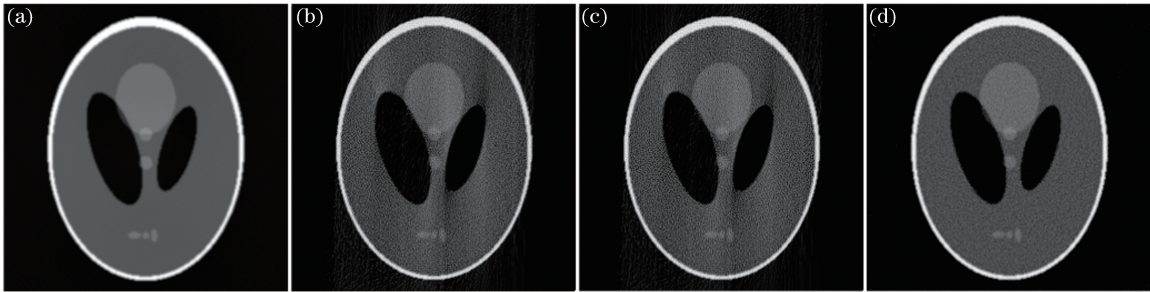


图2 含噪声投影数据下Shepp-Logan重建图像。(a)理想图像；(b)ART算法；(c)SART算法；(d)SIRT算法

Fig. 2 Reconstructed images of Shepp-Logan using noisy projections. (a) Ideal image; (b) ART algorithm; (c) SART algorithm; (d) SIRT algorithm

为定量描述有无噪声情况下3种重建方法的重建图像质量，采用均方误差(MSE)与峰值信噪比(PSNR)来衡量图像的重建质量。MSE与PSNR的数学表达式分别为

$$f_{\text{MSE}} = \frac{1}{m \cdot n} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \| u(i, j) - \hat{u}(i, j) \|^2, \quad (3)$$

$$f_{\text{PSNR}} = 20 \cdot \lg \left( \frac{M_1}{\sqrt{f_{\text{MSE}}}} \right), \quad (4)$$

式中： $m$ 和 $n$ 为图像的尺寸； $i$ 和 $j$ 分别为图像的横、纵坐标； $u$ 为重建后图像； $\hat{u}$ 为理论图像。MSE可衡量两张图像之间的平均像素差距，MSE越小，表示重建图像与真实图像的像素灰度差距越小，重建质量越高。PSNR为信号最大可能功率与影响它的表示精度的破坏性噪声功率的比值， $M_1$ 为图像像素的最大取值，对于16位图像， $M_1 = 65535$ ，同理对于8位图像， $M_1 = 255$ 。PSNR越大，表示图像的失真越小。在有无噪声的情况下，ART、SART及

SIRT 重建图像 MSE 与 PSNR 指标如表 1 所示。在有噪声情况下 SIRT 的 MSE 均为最小,且 PSNR 均为最大,可以证明 SIRT 在有噪声的情况下重建质量最高。此外,比较了 ART、SART 及 SIRT 3 种方法在含随机噪声时相比于无噪声时重

建图像 MSE、PSNR 的上升率与下降率。如表 1 所示,在有噪声情况下,SIRT 的 MSE 与 PSNR 的上升率与下降率分别为 6.52% 和 0.36%,均为 3 种方法中的最小值,因此证明 SIRT 比 ART 与 SART 具有较好的抗噪声性能。

表 1 Shepp-Logan 重建图像 MSE 和 PSNR

Table 1 MSE and PSNR of reconstructed images of Shepp-Logan

Method	Without noise in the projections		With noise in the projections		Image quality reduction rate	
	MSE	PSNR /dB	MSE	PSNR /dB	Increasing rate of MSE /%	Reduction rate of PSNR /%
ART	0.0047	71.4516	0.0078	69.1832	65.96	3.17
SART	0.0047	71.4208	0.0077	69.2508	63.83	3.04
SIRT	0.0046	71.5167	0.0049	71.2571	6.52	0.36

### 3 稀疏角度投影 SIRT 图像重建

采用稀疏角度投影 CT 扫描时,采集得到的投影数据量不能满足 Shannon/Nyquist 采样定理,滤波反投影重建算法(FBP)的重建图像会出现欠采样条状伪影。随着投影数据量的减少,重建图像中伪影情况大幅度加剧。图 3 所示为  $0^{\circ}\sim 180^{\circ}$  范围内稀疏程度不同的投影条件下 Shepp-Logan 模型的 FBP 以及 SIRT 重建结果。对比图 3,在投影数据比较完备的条件下(180 幅投影),采用 FBP 与 SIRT 均能精确地

恢复图像的轮廓信息。当投影幅数为 20 幅时,FBP 与 SIRT 重建图像中像素灰度值出现不符合实际模型的不连续性,像素灰度分布不均匀,图像细节信息大量丢失,视觉品质大幅降低,相比较而言,SIRT 的重建图像中没有出现明显条状伪影,总体图像重建质量略优于 FBP。为此,本研究将基于加权总差分最小化的正则化约束加入到稀疏角度投影 SIRT 重建中,在每次 SIRT 迭代重建后,均采用加权总差分最小化的方法对图像各个方向的梯度进行最小化约束,以得到稀疏投影角度下最优 CT 重建质量。

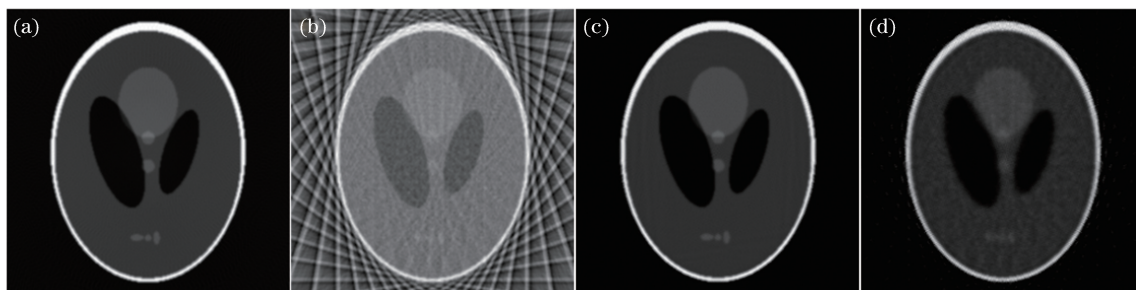


图 3 不同稀疏角度投影 FBP 与 SIRT 重建图像。(a) 180 幅投影 FBP 重建图像;(b) 20 幅投影 FBP 重建图像;(c) 180 幅投影 SIRT 重建图像;(d) 20 幅投影 SIRT 重建图像

Fig. 3 Reconstructed images obtained by FBP and SIRT with different sparse angle projections. (a) FBP reconstructed image with 180 projections; (b) FBP reconstructed image with 20 projections; (c) SIRT reconstructed image with 180 projections; (d) SIRT reconstructed image with 20 projections

### 4 基于加权总差分最小化的 SIRT 图像重建

基于总差分最小化<sup>[21]</sup>约束的代数重建算法针对角度稀疏型 CT 重建问题取得了很好的效果。然而总差分正则化仅考虑了图像梯度的稀疏性,对物体边缘结构信息的保护稍显不足。余维等<sup>[17-18]</sup>研究了基于加权总差分最小化的代数重建算法。加权总

差分最小化不仅考虑了图像梯度的稀疏性约束,还考虑了图像梯度的连续性约束,能对图像边缘不同方向的梯度信息进行有效保护。本研究将加权总差分最小化测度作为高噪声压缩采样中子图像迭代重建的正则化约束,进一步研究 WTDM 正则化方法在中子稀疏角度投影重建中的应用。

投影数据迭代重建问题,可以等价于优化问题的求解过程,即

$$u' = \arg \min_u \| Au' - g \|_2^2 + R(u'), \quad (5)$$

式中:  $g$  为实测投影数据;  $u'$  为待重建断层图像;  $A$  为当前扫描模式下对应的系统矩阵;  $\| Au' - g \|_2^2$  为数据保真项, 代表迭代重建过程中断层模拟投影与实测投影之间的误差项;  $R(u')$  为重建图像所要满足的图像先验信息及准则项, 是迭代重建算法的正则项。

加权总差分要实现对图像梯度的稀疏性和连续性的双重约束。对于梯度的稀疏性, 约束任意一个像素点与其邻域内像素点像素保持一致; 对于梯度的连续性, 则需要约束任意一个像素位置与邻域内其他像素点的局部梯度保持一致<sup>[22]</sup>。  $D_h$  和  $D_v$  分别为水平和垂直方向的梯度算子;  $D_{vh}$  和  $D_{hv}$  为对角方向上的梯度算子;  $D_{hh}$  为  $D_h$  沿竖轴方向的导数;  $D_{vv}$  为  $D_v$  沿横轴方向的导数。图 4(a) 为图像任意像素点  $P_{i,j}$  的四邻域示意图, 图 4(b) 为图像任意像素点  $P_{i,j}$  各方向的局部梯度。对图像梯度的约束可等价对各个像素点水平垂直差分和对角差分的联合约束。

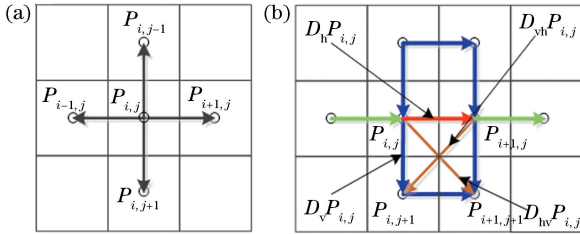


图 4 WTDM 方法在不同方向的差分测度<sup>[17]</sup>。(a) 像素点四邻域示意图; (b) 像素点各方向的局部梯度

Fig. 4 Difference measures of WTDM method in different directions<sup>[17]</sup>. (a) Diagram of four neighbors of pixel point; (b) partial gradients of pixel point in different directions

对局部梯度稀疏性和局部梯度连续性的约束差分可分别表示为

$$TD(P_{i,j})_1 = \| D_h P_{i,j} \|_1 + \| D_v P_{i,j} \|_1, \quad (6)$$

$$TD(P_{i,j})_2 = \| D_{hv} P_{i,j} \|_1 + \| D_{vh} P_{i,j} \|_1 + \| D_{vv} P_{i,j} \|_1 + \| D_{hh} P_{i,j} \|_1, \quad (7)$$

其中

$$\begin{cases} \| D_h P_{i,j} \|_1 = \| P_{i+1,j} - P_{i,j} \| \\ \| D_v P_{i,j} \|_1 = \| P_{i,j+1} - P_{i,j} \| \\ \| D_{vh} P_{i,j} \|_1 = \| P_{i,j+1} - P_{i+1,j} \| \\ \| D_{hv} P_{i,j} \|_1 = \| P_{i+1,j+1} - P_{i,j} \| \end{cases}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \| D_{hh} P_{i,j} \|_1 &= \| P_{i+1,j+1} + P_{i,j} - P_{i+1,j} - \\ &P_{i,j+1} \| = \| D_{vv} P_{i,j} \|_1, \end{aligned} \quad (9)$$

则对局部梯度连续性约束差分可简化为

$$TD(P_{i,j})_2 = \| D_{hv} P_{i,j} \|_1 + \| D_{vh} P_{i,j} \|_1 + 2 \cdot \| D_{hh} P_{i,j} \|_1. \quad (10)$$

加权求和得到加权总差分, 实现对梯度连续性和稀疏性的双重约束:

$$WTD(P_{i,j}) = \| D_h P_{i,j} \|_1 + \| D_v P_{i,j} \|_1 + \alpha (\| D_{hv} P_{i,j} \|_1 + \| D_{vh} P_{i,j} \|_1 + 2 \cdot \| D_{hh} P_{i,j} \|_1), \quad (11)$$

式中:  $\alpha$  为平衡梯度连续性与梯度稀疏性约束之间的权值。进一步分析发现, 差分约束的目的是实现图像整体梯度的最大稀疏效果。在极限情况下,  $\| D_h P_{i,j} \|_1 + \| D_v P_{i,j} \|_1 + \| D_{hv} P_{i,j} \|_1 + \| D_{vh} P_{i,j} \|_1$  已取得最小化, 即  $\| D_h P_{i,j} \|_1$ 、 $\| D_v P_{i,j} \|_1$ 、 $\| D_{hv} P_{i,j} \|_1$ 、 $\| D_{vh} P_{i,j} \|_1$  均为零时,  $\| D_{hh} P_{i,j} \|_1$ 、 $\| D_{vv} P_{i,j} \|_1$  必定达到最小化, 因此可忽略对于  $\| D_{hh} P_{i,j} \|_1$ 、 $\| D_{vv} P_{i,j} \|_1$  的约束, 简化后的加权总差分为

$$WTD(P_{i,j}) = \| D_h P_{i,j} \|_1 + \| D_v P_{i,j} \|_1 + \alpha (\| D_{hv} P_{i,j} \|_1 + \| D_{vh} P_{i,j} \|_1). \quad (12)$$

当  $\alpha=0$  时, 则可实现对图像梯度稀疏性的约束; 当  $\alpha=1$  时, 则可以实现对梯度稀疏性和连续性同等程度的约束 ( $\alpha$  默认为 1)。将 WTDM 正则项约束代入投影数据迭代重建问题[(5)式]中, 则图像的迭代重建模型转化为<sup>[17-18]</sup>

$$u' = \arg \min_u \| Au' - g \|_2^2 + 2\omega \cdot$$

$$\sum_i \sum_j [ |u_{i+1,j} - u_{i,j}| + |u_{i,j+1} - u_{i,j}| + \alpha (|u_{i+1,j+1} - u_{i,j}| + |u_{i,j+1} - u_{i+1,j}|) ], \quad (13)$$

式中:  $u_{i,j}$  为重建图像  $(i,j)$  坐标下的像素值;  $\omega$  为加权总差分最小化的作用程度。  $\omega$  越大, 加权总差分最小化作用程度越强, 重建图像梯度的变化幅度较大;  $\omega$  越小, 加权总差分最小化作用程度越弱, 重建图像梯度的变化幅度较小。因此对于加权总差分最小化 CT 重建模型的求解表示为(13)式的求解。(13)式的求解有多种方法, 其中软阈值滤波方法的收敛性和有效性在理论上已得到证明, 并成功应用于 CT 重建<sup>[23]</sup>。本研究选用软阈值滤波方法实现(13)式的求解。在软阈值滤波的框架下对基于加权总差分最小化重建模型进行求解, 需要构造一个伪逆<sup>[17-18, 21]</sup>:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} &= \frac{1}{4 + 4 \cdot \alpha} \times \{ f(\omega, \tilde{u}_{i,j}^{n+1}, \tilde{u}_{i+1,j}^{n+1}) + \\ &f(\omega, \tilde{u}_{i,j}^{n+1}, \tilde{u}_{i,j+1}^{n+1}) + f(\omega, \tilde{u}_{i,j}^{n+1}, \tilde{u}_{i+1,j-1}^{n+1}) + \\ &f(\omega, \tilde{u}_{i,j}^{n+1}, \tilde{u}_{i-1,j}^{n+1}) + \alpha \cdot [f(\omega, \tilde{u}_{i,j}^{n+1}, \tilde{u}_{i+1,j+1}^{n+1}) + \\ &f(\omega, \tilde{u}_{i,j}^{n+1}, \tilde{u}_{i+1,j-1}^{n+1}) + f(\omega, \tilde{u}_{i,j}^{n+1}, \tilde{u}_{i-1,j-1}^{n+1}) + \\ &f(\omega, \tilde{u}_{i,j}^{n+1}, \tilde{u}_{i-1,j+1}^{n+1})] \}, \end{aligned} \quad (14)$$

式中： $\tilde{u}_{i,j}^{n+1}$ 为迭代重建图像上 $(i,j)$ 坐标位置处灰度值； $f$ 为软阈值函数。

$$f(\omega, y, z) = \begin{cases} (y+z)/2, & |y-z| < \omega \\ y-\omega/2, & (y-z) \geq \omega \\ y+\omega/2, & (y-z) \leq -\omega \end{cases}, (15)$$

式中： $y, z$ 为软阈值函数 $f$ 的输入参量。

余维等<sup>[17-18]</sup>针对模拟模体的稀疏角度投影数据，采用交替最小化的方式实现对(13)式的求解：首先利用SART进行重建以缩小原始投影数据与模拟投影数据之间的差异，在每次SART重建后进行一次软阈值滤波，从而减小重建图像的加权总差分，最终得到理想的重建图像，因此其算法中一次SART-WTDM算法主循环主要包括一次SART重建与一次WTDM过程。本研究针对中子投影数据噪声高、图像质量差的特点，提出了SIRT-WTDM重建方法。SIRT-WTDM重建方法主要对余维等<sup>[17-18]</sup>提出的SART-

WTDM方法进行两个方面的调整：1)将SIRT作为基于WTDM重建方法的保真项，以增强算法的抗噪声性能；2)设置SIRT-WTDM算法主循环中WTDM的次数为 $N_{TD}$ 。这样可将一次SIRT-WTDM算法主循环中WTDM的次数由1调整为 $N_{TD}$ ，进一步恢复欠采样投影重建图像的细节信息，提升中子稀疏角度投影CT质量。因此一次SIRT-WTDM算法主循环可表示为一次SIRT重建与 $N_{TD}$ 次WTDM过程。

## 5 实验验证

### 5.1 模拟数据的实验验证

针对Shepp-Logan模型，本研究在 $0^\circ \sim 180^\circ$ 范围内均匀采集90幅投影，比较FBP、SIRT、SART-WTDM及SIRT-WTDM算法在稀疏角度投影时的CT重建图像质量，Shepp-Logan模型的CT条件如表2所示。

表2 基于Shepp-Logan模拟的CT条件

Table 2 Simulative CT conditions based on Shepp-Logan

Scanning mode	Reconstructing image size / (pixel×pixel)	Range of scanning angle / (°)	Angle step / (°)
Parallel beam	256×256	180	2

SIRT的松弛因子 $\lambda = 1.5$ ；设置SART-WTDM算法中SART的松弛因子 $\lambda = 0.1, N_{TD} = 1$ ，以保证与文献[18]参数一致；设置本文SIRT-WTDM算法中SIRT的 $\lambda = 1.5, N_{TD} = 1, \omega = 0.00035$ ；设置

SIRT、SART-WTDM及SIRT-WTDM算法主循环次数为700。FBP、SIRT、SART-WTDM及SIRT-WTDM算法整体重建图像以及对应局部放大图像如图5所示。为验证4种重建算法的抗噪声性能，

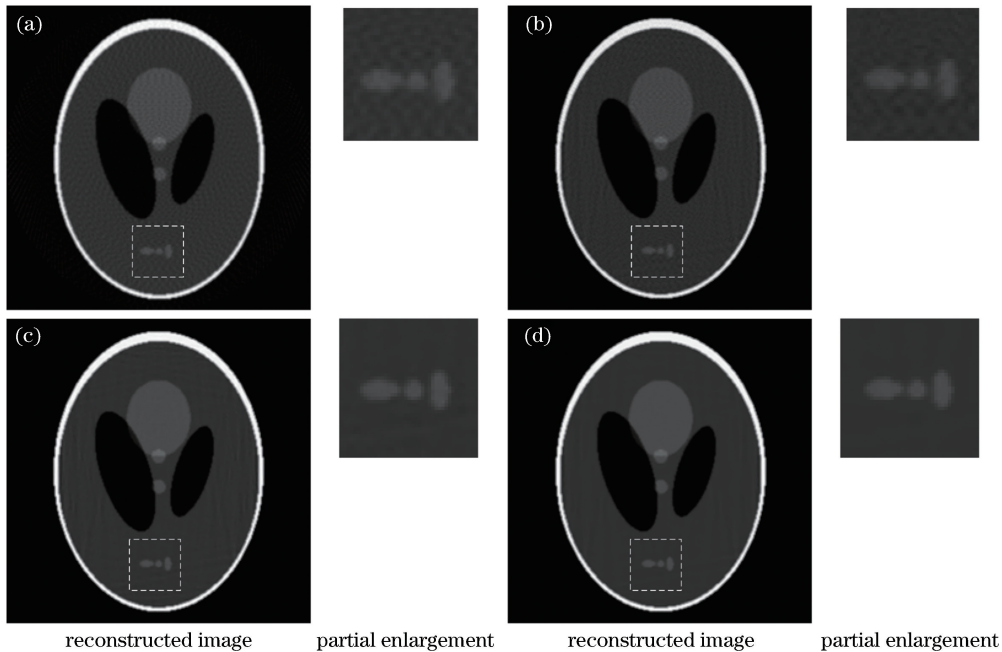


图5 90幅投影Shepp-Logan的重建图像。(a) FBP重建；(b) SIRT重建；(c) SART-WTDM重建；(d) SIRT-WTDM重建  
Fig. 5 Reconstructed images of Shepp-Logan using 90 projections. (a) FBP reconstruction; (b) SIRT reconstruction; (c) SART-WTDM reconstruction; (d) SIRT-WTDM reconstruction

在 Shepp-Logan 模型的归一化投影正弦图中加入平均值为 0、标准差为 0.01 高斯噪声,设置 SIRT-WTDM 算法的  $N_{TD}=2$ ,  $\omega=0.0005$ ,其余重建参数

保持不变。含噪声投影条件下 FBP、SIRT、SIRT-WTDM 及 SIRT-WTDM 算法整体重建图像以及对应局部放大图像如图 6 所示。

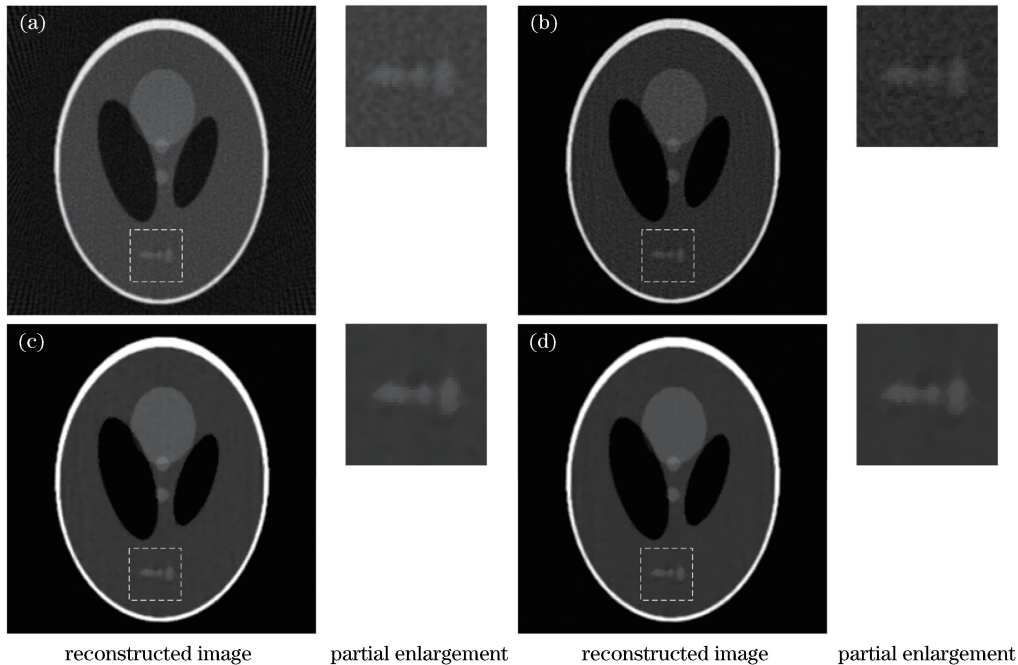


图 6 90 幅含噪声投影 Shepp-Logan 的重建图像。(a) FBP 重建;(b) SIRT 重建;(c) SIRT-WTDM 重建;(d) SIRT-WTDM 重建

Fig. 6 Reconstructed images of Shepp-Logan using 90 noisy projections. (a) FBP reconstruction; (b) SIRT reconstruction; (c) SIRT-WTDM reconstruction; (d) SIRT-WTDM reconstruction

由图 5 和图 6 可知,稀疏角度投影对重建图像的影响主要表现为重建图像中的条状伪影以及图像细节不清晰。相比于 FBP 与 SIRT, SIRT-WTDM、SIRT-WTDM 重建结果中条状伪影基本消除,图像中像素变化平稳,细节信息较为清晰,重建结果更优。从图 6 可以看出, SIRT-WTDM 重建图像像素灰度值更加平滑,说明 SIRT-WTDM 方法对噪声的抑制更为显著。

为了更好地对图 5 和图 6 中重建图像质量进行表征,采用 MSE、PSNR 对图像质量进行定量评价,结果如表 3 所示。可以看出:FBP、SIRT、SIRT-WTDM、SIRT-WTDM 方法 MSE 依次降低, PSNR 依次增加。因此可以得出 FBP、SIRT、SIRT-WTDM、SIRT-WTDM 方法的重建图像质量依次递增。图 5 和图 6 中 4 幅图像的第 128 列数据绘制灰度值分布曲线如图 7 所示,可得 SIRT-WTDM 方法获得图像灰度与真实模型的差距最小,并且像素灰度值更加平稳,验证了 SIRT-WTDM 方法可得到较高的图像质量。

表 3 Shepp-Logan 的 90 幅投影重建图像的 MSE 和 PSNR  
Table 3 MSE and PSNR of reconstructed images of Shepp-Logan with 90 projections

Method	Without noise in projections		With noise in projections	
	MSE	PSNR /dB	MSE	PSNR /dB
FBP	0.0100	68.1374	0.0118	67.4080
SIRT	0.0046	71.4593	0.0064	70.0438
SIRT-WTDM	0.0045	71.5842	0.0062	70.1929
SIRT-WTDM	0.0045	71.5850	0.0062	70.2200

## 5.2 冷中子数据的实验验证

基于中国工程物理研究院的 CMRR (China Mianyang Research Reactor) 反应堆,获得了编码管样品冷中子层析扫描数据。中子 CT 扫描条件如表 4 所示,对面阵探测器采集的投影数据进行重排获得样品位于探测器第 776 层的投影正弦图。

在上述采集条件下,对投影正弦图左右两端冗余部分进行裁切并进行均匀采样,获得 75 幅投影正

弦图,对 75 幅稀疏投影条件下的编码管样品分别进行 FBP、SIRT、SART-WTDM 及 SIRT-WTDM 重建,设置 SIRT-WTDM 算法的  $N_{TD} = 1, \omega = 0.00003$ ,其余重建参数与 5.1 节均一致。整体重建图像以及对应局部放大图像如图 8 所示。受中子 CT 系统噪声影响,图 8 中 FBP 重建图像中出现明

显条状伪影与像素突变情况;SIRT、SART-WTDM 与 SIRT-WTDM 重建图像中条形伪影有所减轻。相比于 FBP、SIRT 及 SART-WTDM 方法,SIRT-WTDM 重建结果中图像轮廓还原度更高,且噪声得到了很好的抑制,条形伪影进一步削弱,像素灰度值更加符合真实情况。

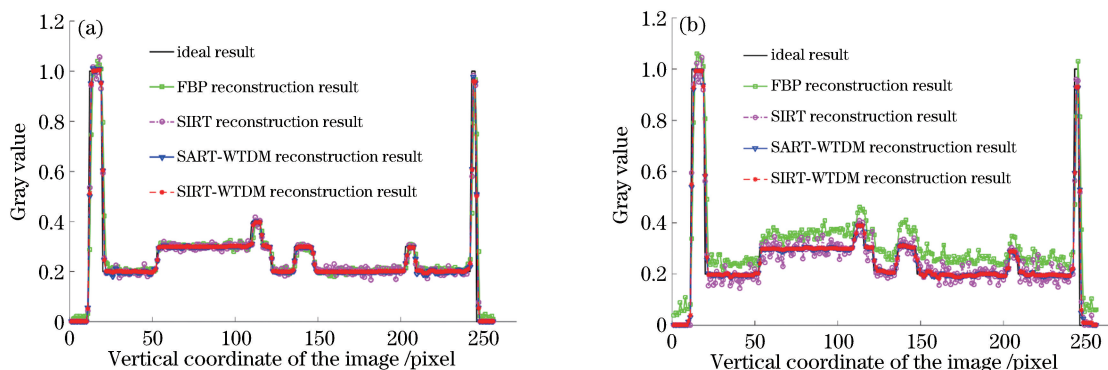


图 7 Shepp-Logan 的 90 幅投影重建图像的灰度曲线。(a)投影数据无噪声;(b)投影数据含噪声

Fig. 7 Gray curves of reconstructed images of Shepp-Logan with 90 projections.

(a) Without noise in projections; (b) with noise in projections

表 4 编码管样品 CT 扫描条件

Table 4 CT scanning conditions of code tube sample

Neutron beam type	Detector type	Number of detector pixels	Range of scanning angle / (°)	Total projection number
Cold neutron	Andor iKon-L 936	2048 × 2048	180	450

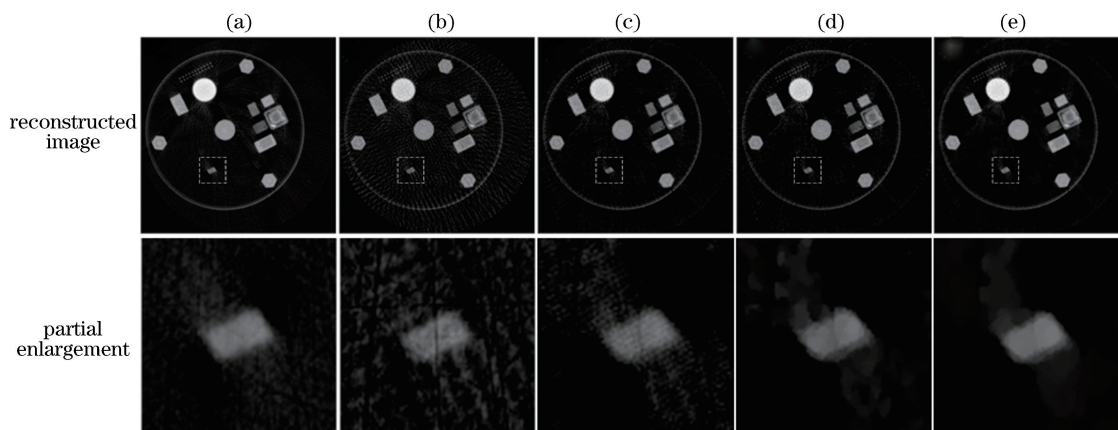


图 8 编码管样品 75 幅投影重建图像。(a)完整数据 FBP 重建;(b) 75 幅投影 FBP 重建;(c) 75 幅投影 SIRT 重建;

(d) 75 幅投影 SART-WTDM 重建;(e) 75 幅投影 SIRT-WTDM 重建

Fig. 8 Reconstructed images of code tube sample with 75 projections. (a) FBP reconstruction with complete projections;

(b) FBP reconstruction with 75 projections; (c) SIRT reconstruction with 75 projections; (d) SART-WTDM

reconstruction with 75 projections; (e) SIRT-WTDM reconstruction with 75 projections

为了验证 SIRT-WTDM 算法在严重稀疏投影条件下的重建图像质量,采取更加苛刻的投影幅数对 SIRT-WTDM 重建算法的图像信息还原能力进行验证。对编码管样品第 313 层在  $0^\circ \sim 180^\circ$  范围内进行均匀采样,获得 18 幅投影。设置 SIRT-

WTDM 算法的  $N_{TD} = 2, \omega = 0.0001$ ,其余重建参数与 5.1 节均一致。获得的重建图像如图 9 所示。对比图 9 所示的重建结果可得:FBP 的重建图像受投影数据严重稀疏的影响,重建图像条状伪影非常明显,物体内部结构的识别受到严重影响。与 FBP、



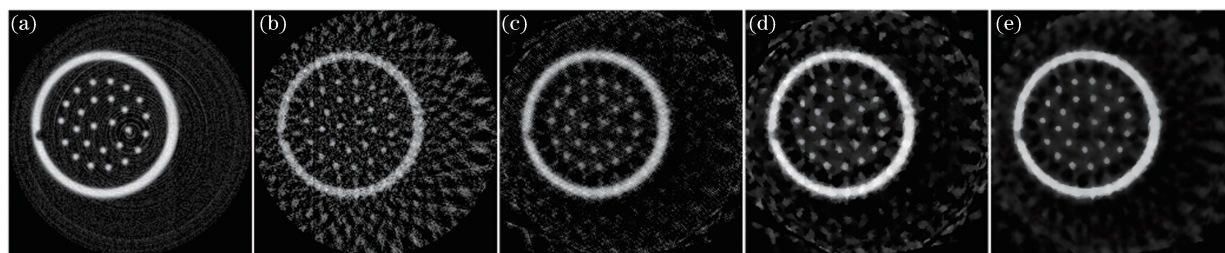


图 9 编码管样品 18 幅投影重建图像。(a)完整数据 FBP 重建;(b) 18 幅投影 FBP 重建;(c) 18 幅投影 SIRT 重建;  
(d) 18 幅投影 SART-WTDM 重建;(e) 18 幅投影 SIRT-WTDM 重建

Fig. 9 Reconstructed images of code tube sample with 18 projections. (a) FBP reconstruction with complete projections;  
(b) FBP reconstruction with 18 projections; (c) SIRT reconstruction with 18 projections; (d) SART-WTDM  
reconstruction with 18 projections; (e) SIRT-WTDM reconstruction with 18 projections

SIRT、SART-WTDM 方法相比,SIRT-WTDM 方法得到的重建图像质量最佳,重建图像中物体内外轮廓结构更加清晰,且基本没有明显条状伪影。从 SIRT-WTDM 方法的重建图像中可清晰地看出该样品断层图像内部具有 26 个柱状结构。

将图 8 和图 9 中所有重建图像的灰度值进行归一化,把完整数据 FBP 重建图像当作理想图像,并以理想图像为基准采用 MSE、PSNR 对各个图像的重建精度进行定量评价。图 8 和图 9 所示重建图像的 MSE、PSNR 如表 5 所示,可以发现 SIRT-WTDM 方法重建图像的 MSE、PSNR 均为最优,进而证明基于 SIRT-WTDM 的中子稀疏角度投影 CT 重建方法可以得到更优的重建结果。

表 5 编码管样品重建图像的 MSE 和 PSNR

Table 5 MSE and PSNR of reconstructed images of code tube sample

Method	776 <sup>th</sup> slice image		313 <sup>rd</sup> slice image	
	MSE	PSNR /dB	MSE	PSNR /dB
FBP	$9.8263 \times 10^{-4}$	78.2069	0.0131	66.9626
SIRT	$9.4837 \times 10^{-4}$	78.3610	0.0090	68.6035
SART-WTDM	$7.6070 \times 10^{-4}$	79.3187	0.0042	71.8748
SIRT-WTDM	$4.0869 \times 10^{-4}$	82.0169	0.0037	72.4440

为了进一步比较 FBP、SIRT、SART-WTDM 与 SIRT-WTDM 算法对稀疏角度中子投影数据的 CT 重建效果,采用 FBP、SIRT、SART-WTDM 及 SIRT-WTDM 算法分别对图 10(a)所示的编码管样品感兴趣区域 (ROI) 进行多层重建以构建编码管样品的三维体数据,编码管样品采集投影数为 75 幅,重建图像大小为 600 pixel $\times$ 600 pixel,总重建层数为 561 层。

本实验中设置 SIRT-WTDM 算法的  $N_{TD} = 2$ ,

$\omega = 0.00003$ ;设置 SIRT、SART-WTDM 与 SIRT-WTDM 算法主循环次数为 500,其余重建参数均与 5.1 节一致,最终得到各个方法重建的体数据结果。在三维体数据可视化之前,首先将体素灰度值线性拉伸至 0~65535 以满足三维可视化软件的需要。为了更清晰地比较各个方法的重建结果,采用伪彩渲染的方式显示三维体数据,其中灰度窗口统一设置为 1000~19000,如图 10(b)所示。编码管样品完整投影数据 FBP 重建三维可视化结果如图 10(b)所示。75 幅投影数据的 FBP、SIRT、SART-WTDM 及 SIRT-WTDM 重建三维可视化结果如图 10(c)~(f)所示。

对比图 10(c)~(f)所示结果,可以发现:FBP 的三维重建结果噪声最大,三维可视化图像不够清晰;由于中子投影数据中存在严重噪声,SART-WTDM 方法的三维重建结果中出现了与真实灰度值不符的像素灰度突变,如图 10(e)中箭头所示区域;相比于 FBP、SIRT 及 SART-WTDM 方法的重建图像,SIRT-WTDM 方法能够较好地抑制重建图像噪声,重建得到的样品轮廓更加清晰。观察图 10(c)~(f)虚线框标记的局部区域可得:SIRT-WTDM 方法得到重建图像的像素灰度值更加平稳,能够更加清晰地展现样品的内部三维结构,其三维可视化结果与图 10(b)结果最为相似。因此可证明 SIRT-WTDM 方法能够较好地抑制中子投影数据中的随机噪声,并能够有效地减轻由投影数据缺失导致的重建伪影,最终得到较好的中子 CT 重建结果。

## 6 结 论

稀疏角度投影 CT 是一种能够有效解决中子 CT 时间过长与被检样品辐照活化问题的有效方

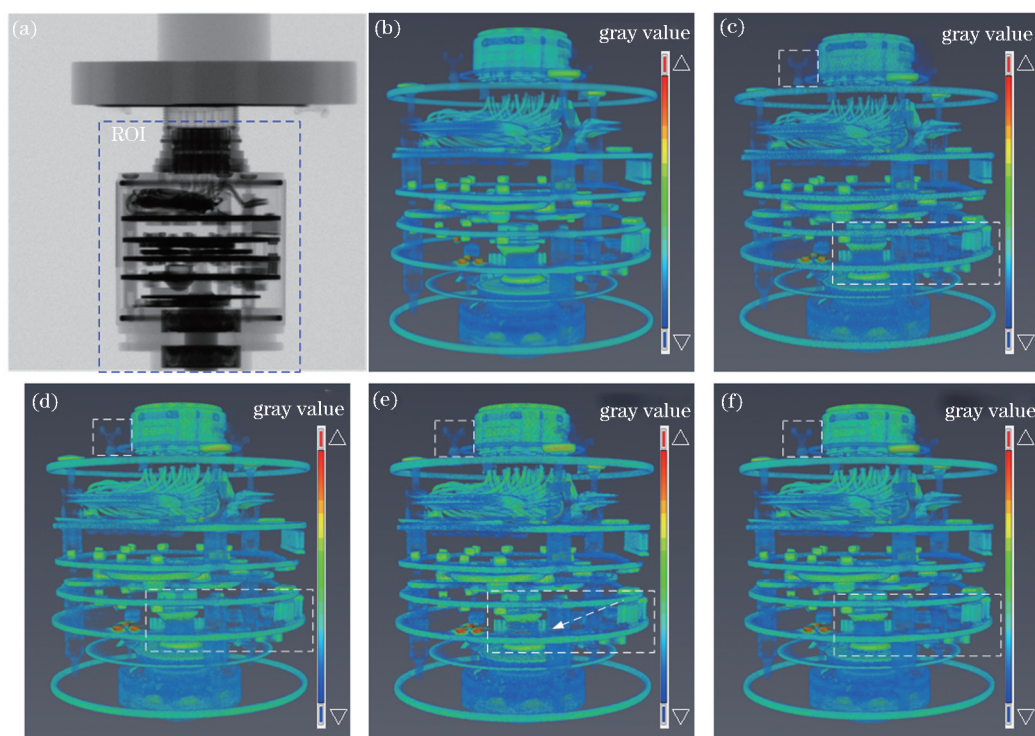


图 10 编码管样品的三维可视化结果。(a)编码管样品的重建部位;(b)完整数据 FBP 重建;(c) 75 幅投影数据 FBP 重建;(d) 75 幅投影数据 SIRT 重建;(e) 75 幅投影数据 SIRT-WTDM 重建;(f) 75 幅投影数据 SIRT-WTDM 重建

Fig. 10 3D visualization results of code tube sample. (a) Reconstructed region of code tube sample; (b) FBP reconstructed result with complete projections; (c) FBP reconstructed result with 75 projections; (d) SIRT reconstructed result with 75 projections; (e) SIRT-WTDM reconstructed result with 75 projections; (f) SIRT-WTDM reconstructed result with 75 projections

法。由于中子投影数据噪声高,稀疏角度投影 CT 所造成的投影数据量不足,传统的 CT 重建方法难以恢复被检样品的真实结构信息。为提升高噪声稀疏角度投影下中子断层成像质量,提出了采用 SIRT 与 WTDM 相结合的迭代重建方法。与 ART 与 SART 相比,SIRT 具有对投影噪声敏感程度低的特点。在同等投影噪声强度情况下,SIRT 重建图像的像素灰度值更加平稳,图像质量更优。考虑到图像梯度的稀疏性与连续性的约束,迭代重建方法的正则化项采用 WTDM 方法,并采用软阈值滤波方法实现对图像重建模型的求解。所提出的 SIRT-WTDM 方法实现了对编码管样品冷中子稀疏角度投影数据的三维重建,其三维可视化结果证明:相比于 FBP、SIRT 及 SART-WTDM 方法,SIRT-WTDM 方法能较好地抑制中子投影数据中的随机噪声,并能有效地减轻由投影数据缺失导致的重建伪影。但是 SIRT-WTDM 迭代重建方法计算量大、重建速度慢、所需调整参数多的特点限制了该算法在中子 CT 领域的应用,因此未来的研究方向主要集中于重建算法加速与重建参数的自适应调

整方面的研究。

## 参 考 文 献

- [1] Sinha V, Srivastava A, Koo Lee H. A novel method for NDT applications using NXCT system at the Missouri University of Science & Technology [J]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 2014, 750: 43-55.
- [2] Tamaki M. Conceptual monochromatic digital neutron radiography using continuous cold neutron beam [J]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 2005, 542(1/2/3): 32-37.
- [3] Yasuda R, Matsubayashi M, Nakata M, *et al.* Application of neutron imaging plate and neutron CT methods on nuclear fuels and materials [J]. IEEE Transactions on Nuclear Science, 2005, 52(1): 313-316.
- [4] Wei G H, Han S B, Chen D F, *et al.* Application of neutron radiography for non-destructive testing

- nuclear fuel elements[J]. Nuclear Techniques, 2012, 35(11): 821-826.
- 魏国海, 韩松柏, 陈东风, 等. 中子照相技术在核燃料元件无损检测中的应用[J]. 核技术, 2012, 35(11): 821-826.
- [5] Strobl M, Manke I, Kardjilov N, *et al.* Advances in neutron radiography and tomography[J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 2009, 42(24): 243001.
- [6] Si K. Application research on CT iterative image reconstruction algorithm of sparse angles projection [D]. Jinan: Shandong University, 2015: 2-14.  
司凯. 稀疏投影角度下的 CT 迭代图像重建算法应用研究[D]. 济南: 山东大学, 2015: 2-14.
- [7] Ma J M, Zhang J Q, Song G Z, *et al.* Total variation constrained iterative filtered back projection CT reconstruction method[J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(2): 0234002.  
马继明, 张建奇, 宋顾周, 等. 全变分约束迭代滤波反投影 CT 重建[J]. 光学学报, 2015, 35(2): 0234002.
- [8] Gordon R, Bender R, Herman G T. Algebraic reconstruction techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and X-ray photography [J]. Journal of Theoretical Biology, 1970, 29(3): 471-481.
- [9] Gilbert P. Iterative methods for the three-dimensional reconstruction of an object from projections [J]. Journal of Theoretical Biology, 1972, 36(1): 105-117.
- [10] Andersen A H, Kak A C. Simultaneous algebraic reconstruction technique (SART): a superior implementation of the ART algorithm[J]. Ultrasonic Imaging, 1984, 6(1): 81-94.
- [11] Wang L Y, Liu H K, Li L, *et al.* Review of sparse optimization-based computed tomography image reconstruction from few-view projections [J]. Acta Physica Sinica, 2014, 63(20): 208702.  
王林元, 刘宏奎, 李磊, 等. 基于稀疏优化的计算机断层成像图像不完全角度重建综述[J]. 物理学报, 2014, 63(20): 208702.
- [12] Lin L P, Wang Y G. CT image reconstruction model and algorithm from few views[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2017, 43(4): 823-830.  
蔺鲁萍, 王永革. 不完全角度 CT 图像重建的模型与算法[J]. 北京航空航天大学学报, 2017, 43(4): 823-830.
- [13] Rudin L I, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1992, 60: 259-268.
- [14] Sidky E Y, Kao C M, Pan X. Accurate image reconstruction from few-views and limited-angle data in divergent-beam CT [J]. Journal of X-ray Science and Technology, 2006, 14(2): 119-139.
- [15] Sidky E Y, Pan X C. Image reconstruction in circular cone-beam computed tomography by constrained, total-variation minimization[J]. Physics in Medicine and Biology, 2008, 53(17): 4777-4807.
- [16] Zhang H J, Kong H H, Sun Y G. Weighted NLTV reconstruction algorithm based on structural prior information for spectral CT [J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38(8): 0811003.  
张海娇, 孔慧华, 孙永刚. 基于结构先验的加权 NLTV 能谱 CT 重建算法[J]. 光学学报, 2018, 38(8): 0811003.
- [17] Yu W. Investigation of reconstruction algorithms for incomplete CT projections [D]. Chongqing: Chongqing University, 2014: 24-35.  
余维. 不完备投影数据的 CT 重建算法研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2014: 24-35.
- [18] Yu W, Zeng L. A novel weighted total difference based image reconstruction algorithm for few-view computed tomography[J]. PLoS One, 2014, 9(10): e109345.
- [19] Yan B, Li L. CT image reconstruction algorithm [M]. Beijing: Science Press, 2014: 5-14.  
闫镔, 李磊. CT 图像重建算法[M]. 北京: 科学出版社, 2014: 5-14.
- [20] Shepp L A, Logan B F. The Fourier reconstruction of a head section[J]. IEEE Transactions on Nuclear Science, 1974, 21(3): 21-43.
- [21] Yu H Y, Wang G. A soft-threshold filtering approach for reconstruction from a limited number of projections [J]. Physics in Medicine and Biology, 2010, 55(13): 3905-3916.
- [22] Shu X B, Ahuja N. Hybrid compressive sampling via a new total variation TVL1 [M]// Daniilidis K, Maragos P, Paragios N. Lecture notes in computer science. Berlin, Heidelberg: Springer, 2010, 6316: 393-404.
- [23] Liu B D, Wang G, Ritman E L, *et al.* Image reconstruction from limited angle projections collected by multisource interior X-ray imaging systems [J]. Physics in Medicine and Biology, 2011, 56(19): 6337-6357.