

不同形状的非球形粒子对偏振传输特性的影响

张肃¹, 战俊彤^{1*}, 付强¹, 段锦², 李英超¹, 姜会林¹

¹ 长春理工大学空地激光通信技术国防重点学科实验室, 吉林 长春 130022;

² 长春理工大学电子信息工程学院, 吉林 长春 130022

摘要 针对自然界的非球形粒子问题,对典型非球形粒子的偏振传输特性进行研究,采用 T 矩阵算法研究椭球、圆柱和切比雪夫粒子的偏振传输特性,及其与球形粒子偏振传输特性的差异。研究表明:对于横纵轴之比中等的椭球粒子,当散射角小于 60°时,不同形状椭球粒子的偏振度(DOP)差异较小,可用 Mie 散射方法进行粒子偏振特性的近似计算;当散射角大于 60°时,DOP 随横纵轴之比的变化较大,且球形与椭球粒子的 DOP 差异随着横纵轴之比的增加而增大;对于直径与高度之比中等的圆柱体粒子,DOP 的变化相比于椭球粒子更加平稳,但后向散射与侧向散射区域仍不能采用 Mie 散射进行近似计算;形状比例极端的椭球粒子和圆柱体粒子的偏振曲线均类似于钟形,且在散射角约为 90°时 DOP 达到最大值;切比雪夫粒子的形变参数和级次都对粒子前向散射偏振特性的影响较小,但对后向散射偏振特性的影响较大,且灵敏度随级次的增加而减小。本研究结果可为非球形粒子偏振传输特性的研究及球形粒子近似提供理论指导。

关键词 散射; 非球形; 球形粒子近似; 偏振传输特性; T 矩阵

中图分类号 O436.3

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201939.0629001

Influence of Non-Spherical Particles with Different Shapes on Polarization Transmission Characteristic

Zhang Su¹, Zhan Juntong^{1*}, Fu Qiang¹, Duan Jin², Li Yingchao¹, Jiang Huilin¹

¹ *Fundamental Science Laboratory on Space-Ground Laser Communication Technology, Changchun University of Science and Technology, Changchun, Jilin 130022, China;*

² *School of Electronics and Information Engineering, Changchun University of Science and Technology, Changchun, Jilin 130022, China*

Abstract We investigate the polarization transmission characteristic of typical non-spherical particles to solve the problems encountered by these particles in nature. The polarization transmission characteristics of the ellipsoid, cylindrical, and Chebyshev particles while applying the T-matrix algorithm and the difference in the polarization transmission characteristics of the spherical particles are studied. The results denote that for the ellipsoid particles with medium ratio of transverse and longitudinal axis, the degree of polarization (DOP) variation with different shapes is very small and can approximate with that for the Mie scattering method when the scattering angle is less than 60°. In case of the scattering angle being larger than 60°, the DOP is rather changeable with different transverse and longitudinal axis ratios. Further, the difference between the spherical and ellipsoid particles significantly changes with the increasing ratio. The DOP variation in case of the cylinder particles with medium ratio of diameter and height is more stable than that observed in case of the ellipsoid particles but is still not suitable for performing Mie scattering approximation in the side-scattering and back-scattering area. The polarization curves for the extreme-ratio ellipsoid and cylinder particles exhibit a shape similar to that of a bell and has the largest DOP at a scattering angle of 90°. The deformation parameters and the levels of Chebyshev particles have little effect on the polarization characteristic in the forward scattering area but considerable influence in the back-scattering area. The sensitivity also decreases with the increasing level. These results provide theoretical guidance for studying the polarization transmission characteristic of the non-spherical particles and the approximation problem of the spherical particles.

Key words scattering; non-spherical; spherical particle approximation; polarization transmission character; T matrix

OCIS codes 290.5855; 290.5850; 290.5890; 290.5825

收稿日期: 2018-11-19; 修回日期: 2019-02-28; 录用日期: 2019-03-11

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金(61705017)、长春理工大学创新基金项目(XJJLG-2018-17)

* E-mail: 673895960@qq.com

1 引 言

传统 Mie 理论假设传输介质中粒子为等效球形^[1-2],但在自然介质中多数粒子已被证实为非球形粒子^[3],等效计算结果与真实非球形粒子的散射特性不符^[4],因此,不能直接用 Mie 散射模型表征非球形粒子的散射。

目前,对非球形粒子的研究方法主要有 T 矩阵方法、有限时域差分(FDTD)法^[5]、离散偶极子近似(DDA)法^[6]等。有限时域差分法只适用于粒子尺度参数不大于 20 的小粒子,存在一定的局限性;离散偶极子近似法除适用于较小粒子的计算外,还存在数值精度低、收敛速度慢、重复计算等问题;T 矩阵方法适用于尺度参数小于 180 的粒子(假设选择波长为 550 nm,则适用的粒子半径为 15 μm 以内)的计算,具有较广泛的适用性,是共振非球形粒子光散射计算最强有力和广泛使用的方法之一^[7]。文献[8]采用 T 矩阵方法研究旋转对称粒子的线偏振特性,对不同尺寸、形状和折射率的非球形粒子线偏振图样进行分析。文献[9]分析非球形椭球粒子的折射率、有效半径、粒子形状等参数变化对光偏振特性的影响,采用基于 T 矩阵的非球形粒子仿真方法,模拟非偏振光经椭球粒子传输后光的偏振特性及其与球形粒子间的差异。文献[10]以非球形石英气溶胶粒子为研究对象,在实验室内测量斯托克斯散射矩阵,并将测量结果与 Mie 散射近似结果进行比较,证明了多数散射角度下 Mie 散射无法对非球形粒子的散射特性进行近似计算。文献[11]采用 T 矩阵方法研究了短波红外波段下非球形粒子与团簇粒子在不同半径、折射率及湿度条件下散射特性的变化情况。以上研究主要集中于非球形粒子的散射特性,并证明了球形粒子与非球形粒子在散射特性方面存在很大差异。

为了进一步说明不同形状非球形粒子对偏振传输特性的影响及在不同条件下非球形粒子与球形粒子的偏振特性差异,本文以目前公认的非球形粒子——沙尘粒子作为研究对象^[12],由于椭球体表面比较光滑^[13],圆柱体棱边明显^[14],切比雪夫粒子具有不同的凹凸形状^[15],根据以上不同形状非球形粒子的特点,研究折射率及有效半径相当的椭球、圆柱、切比雪夫粒子及形状比例极端的椭球、圆柱体粒子的偏振传输特性,及其与球形粒子的偏振传输特性差异。该传输特性计算的整个过程以 T 矩阵理论为基础,以求取散射矩阵为核心,采用散射矩阵中

各元素在广义球函数和 Wigner 函数中展开的方式,由 T 矩阵及 Celbsch-Gordan 系数对其中各参量进行推导。本研究结果可为非球形粒子的偏振传输探测实践提供理论指导,从而扩展偏振探测在非球形粒子中的适用范围。

2 基于 T 矩阵方法的非球形粒子偏振传输仿真模型

入射场和散射场用矢量波函数展开为

$$\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \{a_{mn} \text{Rg}[\mathbf{M}_{mn}(k\mathbf{r})] + b_{mn} \text{Rg}[\mathbf{N}_{mn}(k\mathbf{r})]\}, \quad (1)$$

$$\mathbf{E}^{\text{sca}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [p_{mn} \mathbf{M}_{mn}(k\mathbf{r}) + q_{mn} \mathbf{N}_{mn}(k\mathbf{r})], \quad (2)$$

式中: \mathbf{r} 为以坐标原点为中心的散射体最小外接球的径向矢量; k 为周围介质的波数; a_{mn} 和 b_{mn} 为入射场展开系数; m, n 为整数, $n=1, 2, 3, \dots, m=-n, -n+1, \dots, n-1, n$; p_{mn} 和 q_{mn} 为散射场展开系数; \mathbf{M}_{mn} 和 \mathbf{N}_{mn} 为矢量球面波函数; $\text{Rg}(\cdot)$ 为正则矢量球面波函数。散射场展开系数 p_{mn}, q_{mn} 与入射场展开系数 a_{mn}, b_{mn} 之间的关系为

$$\begin{cases} p_{mn} = \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} (T_{mnm'n'}^{11} a_{mn} + T_{mnm'n'}^{12} b_{mn}) \\ q_{mn} = \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} (T_{mnm'n'}^{21} a_{mn} + T_{mnm'n'}^{22} b_{mn}) \end{cases}, \quad (3)$$

式中: $n'=1, 2, 3, \dots, m'=-n', -n'+1, \dots, n'-1, n'$; $T_{mnm'n'}^{11}, T_{mnm'n'}^{12}, T_{mnm'n'}^{21}, T_{mnm'n'}^{22}$ 为 T 矩阵的元素。

根据(3)式,散射场展开系数 p, q 与入射场展开系数 a, b 之间的关系为

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{11} & T^{12} \\ T^{21} & T^{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad (4)$$

式中:转换矩阵 \mathbf{T} 可由 $\mathbf{T} = -\text{Rg}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{Q}^{-1}$ 求出; $T^{11} \sim T^{22}$ 为 \mathbf{T} 的矩阵元; \mathbf{Q} 为矩阵,可用矢量球面波函数表示。

$$\begin{cases} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{R} \\ \mathbf{W} & \mathbf{U} \end{bmatrix} \\ \text{Rg}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} \text{Rg}(\mathbf{P}) & \text{Rg}(\mathbf{R}) \\ \text{Rg}(\mathbf{W}) & \text{Rg}(\mathbf{U}) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5)$$

(5)式中矩阵元素 $\mathbf{P}, \mathbf{R}, \mathbf{W}, \mathbf{U}$ 可由散射体的表面场展开得到。

$$\begin{cases} P_{mm'n'} = -ikk_s J_{mm'n'}^{21} - ik^2 J_{mm'n'}^{12} \\ R_{mm'n'} = -ikk_s J_{mm'n'}^{11} - ik^2 J_{mm'n'}^{22} \\ W_{mm'n'} = -ikk_s J_{mm'n'}^{22} - ik^2 J_{mm'n'}^{11} \\ U_{mm'n'} = -ikk_s J_{mm'n'}^{12} - ik^2 J_{mm'n'}^{21} \end{cases}, \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} J_{mm'n'}^{11} \\ J_{mm'n'}^{12} \\ J_{mm'n'}^{21} \\ J_{mm'n'}^{22} \end{bmatrix} = (-1)^m \int_S dS \cdot \mathbf{n}(r) \times \begin{cases} \text{Rg}[\mathbf{M}_{m'n'}(k_s r, \theta, \phi)] \times \mathbf{M}_{-mn}(kr, \theta, \phi) \\ \text{Rg}[\mathbf{M}_{m'n'}(k_s r, \theta, \phi)] \times \mathbf{N}_{-mn}(kr, \theta, \phi) \\ \text{Rg}[\mathbf{N}_{m'n'}(k_s r, \theta, \phi)] \times \mathbf{M}_{-mn}(kr, \theta, \phi) \\ \text{Rg}[\mathbf{N}_{m'n'}(k_s r, \theta, \phi)] \times \mathbf{N}_{-mn}(kr, \theta, \phi) \end{cases}, \quad (7)$$

式中: k_s 为内部区域的波数; θ 为从坐标系 z 轴正半轴测量的天顶角; ϕ 为方位角; $P_{mm'n'}$ 、 $R_{mm'n'}$ 、 $W_{mm'n'}$ 和 $U_{mm'n'}$ 为矩阵 \mathbf{Q} 的元素; S 为散射粒子表面积; 下标 s 代表内部区域; $\mathbf{M}_{m'n'}$ 、 \mathbf{M}_{-mn} 、 $\mathbf{N}_{m'n'}$ 和 \mathbf{N}_{-mn} 均为矢量球面波函数; \mathbf{n} 为沿着局部向外表面法线的单位矢量; r 为以坐标原点为中心的散射体最小外接球的半径。

同理, 采用正则矢量球面波函数代替(7)式的矢量球面波函数进行 $\text{Rg}(\mathbf{Q})$ 的计算。

在无穷远处, 矢量球面波函数 \mathbf{M}_{mn} 、 \mathbf{N}_{mn} 类似于

横向矢量球面波, 有

$$\mathbf{M}_{mn}(kr, \theta, \phi) = \frac{(-1)^{n+1} \exp(ikr)}{kr} d_n \mathbf{C}_{mn}, \quad kr \rightarrow \infty, kr \geq n^2, \quad (8)$$

$$\mathbf{N}_{mn}(kr, \theta, \phi) = \frac{(-1)^n \exp(ikr)}{kr} d_n \mathbf{B}_{mn}, \quad kr \rightarrow \infty, kr \geq n^2, \quad (9)$$

式中: \mathbf{C}_{mn} 和 \mathbf{B}_{mn} 为矢量球面变量; 系数 $d_n = \left[\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)} \right]^{1/2}$ 。

将(8)式和(9)式代入(2)式, 可得

$$\mathbf{E}^{\text{sca}}(\mathbf{n}^{\text{sca}}) = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n d_n [-ip_{mn} \mathbf{C}_{mn} + q_{mn} \mathbf{B}_{mn}] i^{-n}, \quad (10)$$

式中: \mathbf{n}^{sca} 为散射方向的单位矢量。

入射场的矢量球面波函数展开系数为

$$a_{mn} = 4\pi i^n d_n \mathbf{E}_0^{\text{inc}} \cdot \mathbf{C}_{mn}^*(\theta^{\text{inc}}), \quad (11)$$

$$b_{mn} = 4\pi i^{n-1} d_n \mathbf{E}_0^{\text{inc}} \cdot \mathbf{B}_{mn}^*(\theta^{\text{inc}}), \quad (12)$$

式中: $\mathbf{E}_0^{\text{inc}}$ 为入射电场的振幅矢量; * 代表共轭复数值; θ^{inc} 为入射光的天顶角。

则将(3)、(11)、(12)式代入(10)式, 并结合散射

场公式 $\mathbf{E}^{\text{sca}}(r\mathbf{n}^{\text{sca}}) = \frac{\exp(ikr)}{r} \mathbf{A}(\mathbf{n}^{\text{sca}}, \mathbf{n}^{\text{inc}}) \cdot \mathbf{E}_0^{\text{inc}}$ 便可求出散射振幅矩阵

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}^{\text{sca}}, \mathbf{n}^{\text{inc}}) = \frac{4\pi}{k} \sum_{n,m,n',m'} i^{n'-n-1} (-1)^m d_n d_{n'} \cdot \{ [T_{mm'n'}^{11} \mathbf{C}_{mn}(\theta^{\text{sca}}, \phi^{\text{sca}}) + iT_{mm'n'}^{21} \mathbf{B}_{mn}(\theta^{\text{sca}}, \phi^{\text{sca}})] \cdot \mathbf{C}_{m'n'}^*(\theta^{\text{inc}}, \phi^{\text{inc}}) + [-iT_{mm'n'}^{12} \mathbf{C}_{mn}(\theta^{\text{sca}}, \phi^{\text{sca}}) + T_{mm'n'}^{22} \mathbf{B}_{mn}(\theta^{\text{sca}}, \phi^{\text{sca}})] \cdot \mathbf{B}_{m'n'}^*(\theta^{\text{inc}}, \phi^{\text{inc}}) \}, \quad (13)$$

式中: \mathbf{n}^{inc} 为入射方向的单位矢量; θ^{sca} 为散射光天顶角; ϕ^{sca} 为散射光方位角; ϕ^{inc} 为入射光方位角。

矢量球谐函数为

$$\mathbf{Y}_{mn}^{(2)}(\theta, \phi) = \mathbf{B}_{mn}(\theta, \phi) = \mathbf{r} \times \mathbf{C}_{mn}(\theta, \phi) = \left[\theta \frac{d}{d\theta} d_{0m}^n(\cos \theta) + \phi \frac{im}{\sin \theta} d_{0m}^n(\cos \theta) \right] \cdot \exp(im\phi) = \theta \tau_{mn}(\theta) - \phi i \pi_{mn}(\theta), \quad (14)$$

$$\mathbf{Y}_{mn}^{(3)}(\theta, \phi) = \mathbf{C}_{mn}(\theta, \phi) = \left[\theta \frac{im}{\sin \theta} d_{0m}^n(\cos \theta) - \phi \frac{d}{d\theta} d_{0m}^n(\cos \theta) \right] \cdot \exp(im\phi) = \theta i \pi_{mn}(\theta) - \phi \tau_{mn}(\theta), \quad (15)$$

式中: ∇ 为梯度符号; θ 为天顶角矢量; ϕ 为方位角矢量; d_{0m}^n 为 Wigner 函数, $d_{0m}^n = (-1)^n \delta_{-m0}$, 即 $\delta_{-m0} =$

$$\begin{cases} 1, & m=0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}; \pi_{mn} \text{ 和 } \tau_{mn} \text{ 为角函数, } \pi_{mn}(\theta) = \frac{m d_{0m}^n(\theta)}{\sin \theta},$$

$$\tau_{mn}(\theta) = \frac{d}{d\theta} d_{0m}^n(\theta).$$

将(14)式和(15)式代入

$$\begin{cases} S_{11} = \theta^{\text{sca}} \cdot |\mathbf{A}| \cdot \theta^{\text{inc}} \\ S_{12} = \theta^{\text{sca}} \cdot |\mathbf{A}| \cdot \phi^{\text{inc}} \\ S_{13} = \phi^{\text{sca}} \cdot |\mathbf{A}| \cdot \theta^{\text{inc}} \\ S_{14} = \phi^{\text{sca}} \cdot |\mathbf{A}| \cdot \phi^{\text{inc}} \end{cases}, \quad (16)$$

式中: θ^{sca} 为散射光天顶角矢量; θ^{inc} 为入射光天顶角矢量; ϕ^{sca} 为散射光方位角矢量; ϕ^{inc} 为入射光方位角矢量。

可求出散射振幅矩阵元素：

$$S_{11}(\mathbf{n}^{\text{sca}}, \mathbf{n}^{\text{inc}}) = \frac{1}{k} \sum_{nmm'n'} a_{nmm'n'} \cdot [T_{nmm'n'}^{11} \pi_{mn}(\theta^{\text{sca}}) \pi_{m'n'}(\theta^{\text{inc}}) + T_{nmm'n'}^{21} \tau_{mn}(\theta^{\text{sca}}) \pi_{m'n'}(\theta^{\text{inc}}) + T_{nmm'n'}^{12} \pi_{mn}(\theta^{\text{sca}}) \tau_{m'n'}(\theta^{\text{inc}}) + T_{nmm'n'}^{22} \tau_{mn}(\theta^{\text{sca}}) \tau_{m'n'}(\theta^{\text{inc}})] \cdot \exp[i(m\phi^{\text{sca}} - m'\phi^{\text{inc}})], \quad (17)$$

$$S_{12}(\mathbf{n}^{\text{sca}}, \mathbf{n}^{\text{inc}}) = \frac{1}{ik} \sum_{nmm'n'} a_{nmm'n'} \cdot [T_{nmm'n'}^{11} \pi_{mn}(\theta^{\text{sca}}) \tau_{m'n'}(\theta^{\text{inc}}) + T_{nmm'n'}^{21} \tau_{mn}(\theta^{\text{sca}}) \tau_{m'n'}(\theta^{\text{inc}}) + T_{nmm'n'}^{12} \pi_{mn}(\theta^{\text{sca}}) \pi_{m'n'}(\theta^{\text{inc}}) + T_{nmm'n'}^{22} \tau_{mn}(\theta^{\text{sca}}) \pi_{m'n'}(\theta^{\text{inc}})] \cdot \exp[i(m\phi^{\text{sca}} - m'\phi^{\text{inc}})], \quad (18)$$

$$S_{21}(\mathbf{n}^{\text{sca}}, \mathbf{n}^{\text{inc}}) = \frac{i}{k} \sum_{nmm'n'} a_{nmm'n'} \cdot [T_{nmm'n'}^{11} \tau_{mn}(\theta^{\text{sca}}) \pi_{m'n'}(\theta^{\text{inc}}) + T_{nmm'n'}^{21} \pi_{mn}(\theta^{\text{sca}}) \pi_{m'n'}(\theta^{\text{inc}}) + T_{nmm'n'}^{12} \tau_{mn}(\theta^{\text{sca}}) \tau_{m'n'}(\theta^{\text{inc}}) + T_{nmm'n'}^{22} \pi_{mn}(\theta^{\text{sca}}) \tau_{m'n'}(\theta^{\text{inc}})] \cdot \exp[i(m\phi^{\text{sca}} - m'\phi^{\text{inc}})], \quad (19)$$

$$S_{22}(\mathbf{n}^{\text{sca}}, \mathbf{n}^{\text{inc}}) = \frac{1}{k_1} \sum_{nmm'n'} a_{nmm'n'} \cdot [T_{nmm'n'}^{11} \tau_{mn}(\theta^{\text{sca}}) \tau_{m'n'}(\theta^{\text{inc}}) + T_{nmm'n'}^{21} \pi_{mn}(\theta^{\text{sca}}) \tau_{m'n'}(\theta^{\text{inc}}) + T_{nmm'n'}^{12} \tau_{mn}(\theta^{\text{sca}}) \pi_{m'n'}(\theta^{\text{inc}}) + T_{nmm'n'}^{22} \pi_{mn}(\theta^{\text{sca}}) \pi_{m'n'}(\theta^{\text{inc}})] \cdot \exp[i(m\phi^{\text{sca}} - m'\phi^{\text{inc}})], \quad (20)$$

式中：系数 $a_{nmm'n'} = i^{n'-n-1} (-1)^{m+m'} \left[\frac{(2n+1)(2n'+1)}{n(n+1)n'(n+1)} \right]^{1/2}$ 。

通过以上振幅矩阵，可了解该粒子的散射特征，进而求得散射矩阵、消光矩阵等参数。

3 不同形状非球形粒子尺寸分布计算

当粒子完全随机取向时，其在每一个方向取向的概率都是均等的，此种粒子的 T 矩阵对应的子矩阵都是对角矩阵。当已知一种取向粒子的 T 矩阵时，那么随机取向的同种粒子的 T 矩阵即可通过计算获得，与消光特性以及其他的散射特性参量无关，只与散射角有关。非球形旋转对称粒子的相位矩阵可表示为

$$\mathbf{F}(\Theta) = \begin{bmatrix} F_{11}(\Theta) & F_{12}(\Theta) & 0 & 0 \\ F_{12}(\Theta) & F_{22}(\Theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{33}(\Theta) & F_{34}(\Theta) \\ 0 & 0 & -F_{34}(\Theta) & F_{44}(\Theta) \end{bmatrix}, \quad (21)$$

式中： Θ 为散射角； $F_{11} \sim F_{44}$ 为散射矩阵的元素。该矩阵含有 8 个非零元素，且只有 6 个元素是独立的。散射矩阵各元素可在广义球函数和 Wigner 函数中展开，具体可由 T 矩阵及 Celbsch-Gordan 系数 C 推导计算，计算过程参见文献[16]。

当无偏光入射时，相应的线偏振度可表示为

$$P_L = -\frac{F_{12}}{F_{11}}. \quad (22)$$

选取自然环境中比较常见的沙尘粒子为研究对象，其有效半径为 $0.6 \mu\text{m}$ ，折射率为 $1.53 + 0.008i^{[17]}$ ，在可见光波段 (532 nm) 下，研究不同形貌的椭球、圆柱型及切比雪夫粒子的偏振传输特性及它们与球

形粒子的偏振特性差异。

3.1 椭球和圆柱型粒子

回旋椭球体是由一个椭圆形关于它的短轴或长轴旋转形成的，可描述为

$$r(\theta, \phi) = a \left(\sin^2 \theta + \frac{a^2}{b^2} \cos^2 \theta \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (23)$$

式中： b 和 a 分别为旋转 (垂直) 半轴和水平半轴。椭球的形状和尺寸可通过比率 $\epsilon = b/a$ (长椭球) 或 $\epsilon = a/b$ (扁椭球) 和同表面积球体半径或同体积球体半径来确定。具有相同表面积的等效球体粒子的半径分别为

$$\begin{cases} r = \frac{1}{2} \left(2a^2 + 2ab \frac{\arcsin e}{e} \right)^{1/2}, & b > a \\ r = \frac{1}{2} \left[2a^2 + \frac{b^2}{e} \ln \left(\frac{1+e}{1-e} \right) \right]^{1/2}, & b < a \end{cases}, \quad (24)$$

式中：系数 $e = \frac{1}{\epsilon} \sqrt{\epsilon^2 - 1}$ 。通过 (24) 式可定义粒子等表面积尺寸参数 $x = 2\pi r/\lambda$ ，其中 λ 为入射波长。

椭球粒子的尺度谱分布由两个重要的属性决定，分别为有效半径 r_{eff} 和有效方差 v_{eff} ，可表示为

$$r_{\text{eff}} = \frac{1}{\langle G \rangle} \int_0^\infty r \pi r^2 n(r) dr, \quad (25)$$

$$v_{\text{eff}} = \frac{1}{\langle G \rangle r_{\text{eff}}^2} \int_0^\infty (r - r_{\text{eff}})^2 \pi r^2 n(r) dr, \quad (26)$$

式中： $\langle G \rangle = \int_0^\infty \pi r^2 n(r) dr$ ， $n(r) dr$ 表示尺寸参数由 r 到 $r + dr$ 的尺寸分布，本研究选择功率平方分布

法来估计自然粒子的尺寸分布,其表达式为

$$n(r) = \begin{cases} \frac{2r_{\min}^2 r_{\max}^2}{r_{\max}^2 - r_{\min}^2} r^{-3}, & r_{\min} \leq r \leq r_{\max} \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (27)$$

该分布可得到精确的尺寸参数 r_{\min} 和 r_{\max} , 具有不受计算精度影响且受上限影响小等优点。由 (15)~(17) 式可确定 r_{eff} 和 v_{eff} 与尺寸最大值和最小值的关系。

同样地,有限直径圆柱体的形状和尺寸也可由直径和高度的比值 D/L 与同表面积球体半径或同体积球体半径来确定。当 $D/L < 1$ 时为长圆柱体; 当 $D/L > 1$ 时为扁圆柱体。

3.2 切比雪夫粒子

切比雪夫粒子是直径按照 j 级切比雪夫多项式连续形变的球状粒子,其形状为

$$r(\theta, \phi) = r_0 [1 + \xi T_j(\cos \theta)], \quad |\xi| < 1, \quad (28)$$

式中: r_0 为球形量化半径; ξ 为形变参数; $T_j(\cos \theta) = \cos(j\theta)$ 是 j 级切比雪夫多项式。切比雪夫粒子的形状和尺寸可由形变参数 ξ 和同表面积球体半径或同体积球体半径确定。具有相同表面积的等效球体粒子的半径分别为

$$r = r_0 \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\pi [1 + \xi \cos(j\theta)] \sin \theta \{ [1 + \xi \cos(j\theta)]^2 + [n\xi \sin(j\theta)]^2 \}^{\frac{1}{2}} d\theta \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (29)$$

4 不同形状非球形粒子偏振传输特性的仿真与分析

4.1 椭球和圆柱型粒子

图 1 所示为不同横纵轴之比的椭球粒子偏振传输特性曲线,选取椭球的横纵轴之比 a/b 分别为 0.05、0.5、0.67、1、1.5、2 和 20,分析偏振度(DOP)随散射角变化的情况。可以看出,对于中等横纵轴之比的椭球体,从整体上看,椭球粒子的偏振度在小散射角和大散射角上被分成正、负两个区域,但在球形粒子中却没有出现此现象。当散射角小于 60° 时,不同形状椭球粒子的偏振度变化较小;当散射角大于 60° 时,偏振度随横纵轴之比的变化较大,且球形与椭球粒子的偏振度差异随横纵轴之比的增加而不断增大,且二者的区别主要在于侧向散射和后向散射。对于横纵轴之比极端的情况(如 $a/b = 0.05$ 和 $a/b = 20$),偏振曲线类似于钟形,且在散射角为 90° 附近偏振度达到最大值。总体来说,当

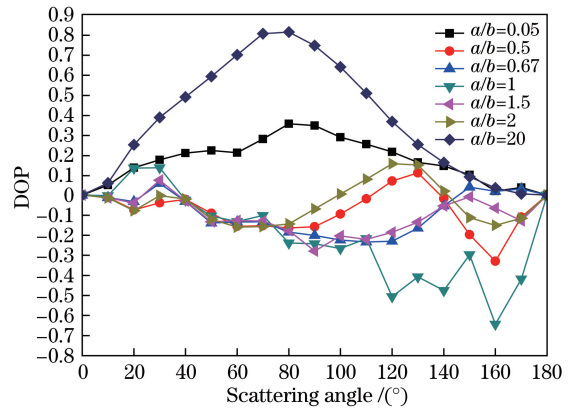


图 1 不同横纵轴之比的椭球粒子偏振传输特性

Fig. 1 Polarization transmission characteristic analysis of ellipsoid particles with different a/b ratios

非偏光入射时,具有相同横纵轴之比的扁椭球粒子和长椭球粒子的偏振特性大致相仿。

图 2 所示为不同 D/L 时圆柱型粒子的偏振传输特性曲线,其中 D/L 分别为 0.05、0.5、0.67、1、1.5、2 和 20。直径和高度相等的圆柱体属于非球形物体,与球体相差较大,则其偏振特性的差异也较大(由图 1 的 $a/b = 1$ 和图 2 的 $D/L = 1$ 曲线可知)。与椭球粒子不同,直径与高度比中等的圆柱体中不存在明显的正向偏振过渡区,且偏振度的变化相比于椭球粒子更加平稳。与椭球粒子的偏振曲线类似,形状比例极端的圆柱型粒子的偏振曲线也呈钟形,且最大值出现在侧向散射位置(90° 附近)。

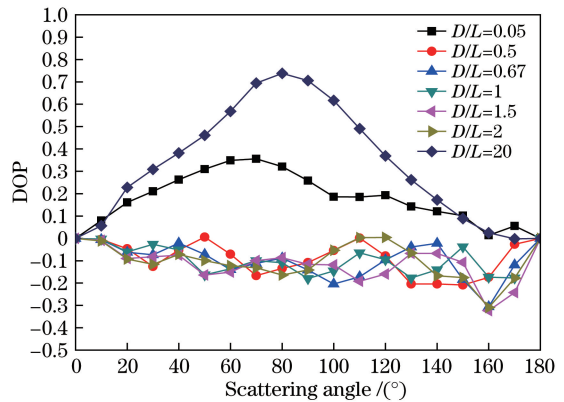


图 2 不同直径高度比的圆柱型粒子偏振传输特性

Fig. 2 Polarization transmission characteristic analysis of cylindrical particles with different D/L ratios

应当注意的是,对于以上 b/a 和 L/D 很大,即扁长椭球($a/b = 0.05$)和扁长圆柱体($D/L = 0.05$)的情况,由于采用 T 矩阵的光散射计算会产生弱收敛的现象,则所选取的计算精度相比于其他形状比例的情况下的精度要低得多,导致其计算结果的准确度低于其他条件下的计算结果。通过观察所得曲

线的变化趋势,发现形状比例极端情况下计算结果的精度较差。

4.2 切比雪夫粒子

图 3 所示为不同切比雪夫多项式和形变参数情况下切比雪夫粒子的偏振传输特性曲线。选取多项式级次 $j=4$,形变参数 ξ 分别为 -0.05 、 -0.1 、 0.05 和 0.1 ,分析级次一定时,不同形变参数对偏振传输特性的影响,结果如图 3(a)所示。可以看到,虽然形变参数为 0.1 和 -0.1 、 0.05 和 -0.05 的切比雪夫粒子的形状完全不同,但它们却有着非常相似的偏

振传输特性,这一性质与椭球粒子近似,且级次一定时,形变参数对粒子前向散射偏振特性的影响较小,对后向散射偏振特性的影响较大。图 3(b)所示为切比雪夫粒子形变参数 $\xi=0.1$,级次分别为 2 、 4 、 6 和 8 时的偏振传输特性,可以看到,级次 j 的改变对粒子侧向和后向偏振特性的影响较大,对前向散射偏振特性的影响较小,且灵敏度随 j 的增大而减小,这是主要是因为当形变参数一定时,随着 j 的逐渐增大,粒子逐渐趋于球形,其形状的改变也越来越小。

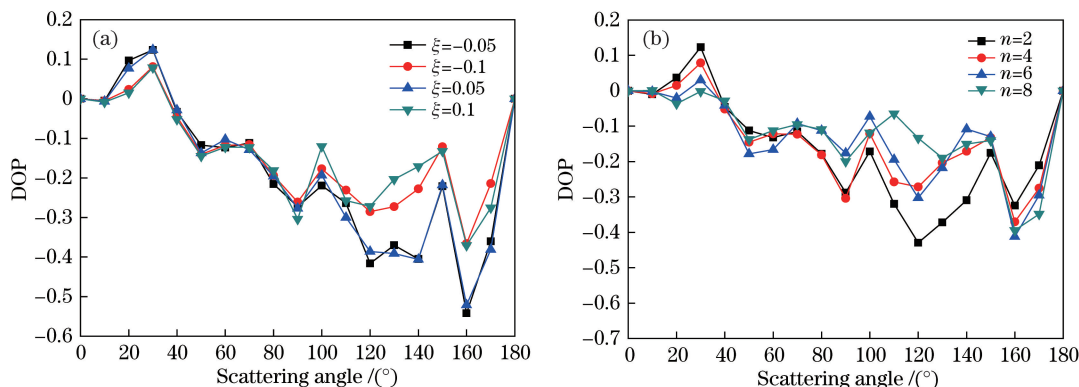


图 3 不同级次和形变参数的切比雪夫粒子偏振传输特性。(a) 级次 $j=4$,不同形变参数 ξ 的偏振传输特性;
(b) 形变参数 $\xi=0.1$,不同级次的偏振传输特性

Fig. 3 Polarization transmission characteristic analysis of Chebyshev particles with different levels and deformation parameters. (a) Polarization transmission characteristic with $j=4$ and different deformation parameters; (b) polarization transmission characteristic with $\xi=0.1$ and different levels

4.3 非球形粒子与球形粒子偏振传输特性差异分析

将自然界的多数粒子等效为球形粒子进行计算,但对于这种等效手段的偏振传输特性差异规律并未作出明确定义,因此,针对 3.1 节和 3.2 节的研究结果,对椭球、圆柱及切比雪夫粒子与球形粒子间偏振传输特性的差异进行研究。

将以上非球形粒子与球形粒子间的偏振传输特性差异 M 定义为

$$M = P_T - P_{Mie}, \quad (30)$$

式中: P_T 为各非球形粒子由 T 矩阵算法得到的偏振度; P_{Mie} 为球形粒子由 Mie 散射算法得到的偏振度。

图 4 所示为非球形粒子与球形粒子偏振传输特性差异分析,其中图 4(a)所示为不同形状椭球粒子与球形粒子的偏振传输特性差异。可以看到:对于中等横纵轴之比的椭球体,当散射角小于 60° 时,偏振度对粒子形状的依赖性较弱,椭球粒子与球形粒子的偏振差异较小,此时,可以用 Mie 散射算法对非球形粒子进行近似计算;当散射角大于 60° (侧

向散射和后向散射)时,不同形状椭球粒子偏振传输特性偏离球形粒子程度较大,采用 Mie 散射算法计算非球形粒子偏振特性的误差较大;对于形状比例极端的椭球体,由于形状与球形相差较大,其前向散射、侧向散射和后向散射的偏振传输特性都与球形粒子差距较大,无法用 Mie 散射算法进行计算。图 4(b)所示为圆柱粒子与球形粒子的偏振传输特性差异,其中形状比例极端的圆柱粒子的偏振传输特性与椭球粒子类似,在此不加赘述;形状比例中等的圆柱粒子与球形粒子偏振传输特性的差异较椭球粒子平稳,但仍不能采用 Mie 散射对后向散射与侧向散射区域进行近似。图 4(c)和图 4(d)所示分别为不同形变参数和不同级次的切比雪夫粒子与球形粒子偏振传输特性差异,可以看到,切比雪夫粒子形状具有凹面特征,与球形粒子和圆柱粒子的凸面结构相差较大,则无法用 Mie 散射进行计算,但随着级次 j 的不断增大,粒子逐渐趋于球形,则此种情况下可以用 Mie 散射的方法进行近似求解。

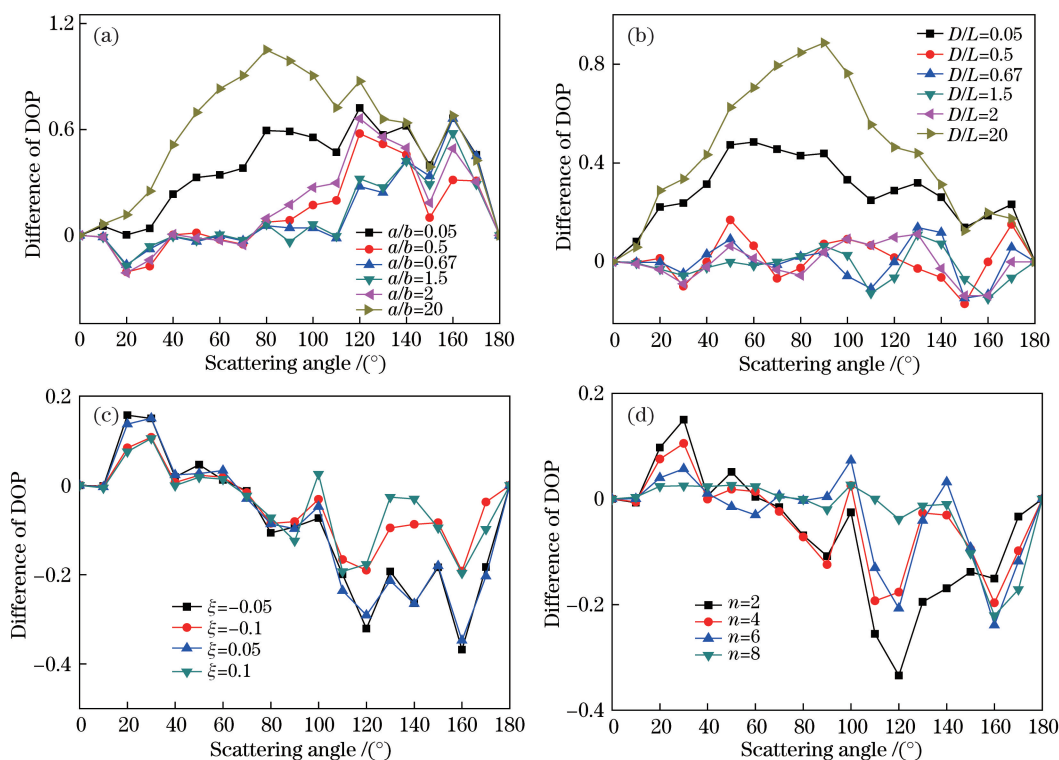


图 4 非球形粒子与球形粒子的偏振传输特性差异。(a) 椭球粒子;(b) 圆柱粒子;
(c) 不同形变参数的切比雪夫粒子;(d) 不同多项式级次的切比雪夫粒子

Fig. 4 Difference of polarization transmission characteristic between non-spherical and spherical particles. (a) Ellipsoid particles; (b) cylindrical particles; (c) Chebyshev particles with different deformation parameters; (d) Chebyshev particles with different levels

5 结 论

为了研究典型非球形粒子的偏振传输特性,以沙尘粒子为研究对象,采用 T 矩阵算法研究椭球、圆柱及切比雪夫粒子的偏振传输特性及其与球形粒子偏振传输特性的差异。结果表明:对于形状比例中等的椭球粒子和圆柱粒子,当散射角小于 60° 时,可用 Mie 散射方法进行近似,但后向散射与侧向散射区域仍不能采用 Mie 散射进行近似;对于形状比例极端的椭球粒子和圆柱粒子,偏振曲线类似于钟形且在散射角为 90° 附近偏振度达到最大值。对于切比雪夫粒子,形变参数和级次都对粒子前向散射偏振特性的影响较小,对后向散射偏振特性的影响较大,由于切比雪夫粒子具有凹面特征,与球体和圆柱体的凸面结构相差较大,无法用 Mie 散射进行计算。本研究对非球形粒子近似的约束条件进行探讨,可为非球形粒子偏振传输的实际探测提供理论参考。

参 考 文 献

[1] Zhang S, Zhan J T, Fu Q, *et al.* Influence of

inhomogeneous smog environment on transmission characteristics of polarized light[J]. *Acta Optica Sinica*, 2018, 38(7): 0729002.

张肃, 战俊彤, 付强, 等. 非均匀烟雾环境对偏振光传输特性的影响[J]. *光学学报*, 2018, 38(7): 0729002.

[2] Zhang Y, Chen B, Li D. Propagation of polarized light in the biological tissue: a numerical study by polarized geometric Monte Carlo method[J]. *Applied Optics*, 2016, 55(10): 2681-2691.

[3] Yang P, Wei H L, Huang H L, *et al.* Scattering and absorption property database for nonspherical ice particles in the near-through far-infrared spectral region[J]. *Applied Optics*, 2005, 44(26): 5512-5523.

[4] Hu S, Gao T C, Liu L, *et al.* Analysis on scattering characteristics and equivalent Mie scattering errors of non-spherical atmospheric aerosols[J]. *Journal of the Meteorological Sciences*, 2014, 34(6): 612-619.
胡帅, 高太长, 刘磊, 等. 非球形气溶胶粒子散射特性及其等效 Mie 散射误差分析[J]. *气象科学*, 2014, 34(6): 612-619.

[5] Chen Y, Peng Y Y, Xia H, *et al.* FDTD analysis of the light transmission properties at the interface of discontinuous medium[J]. *College Physics*, 2017, 36(6): 56-60.

- 陈羽, 彭勇宜, 夏辉, 等. 光在突变介质界面传输特性的 FDTD 方法研究[J]. 大学物理, 2017, 36(6): 56-60.
- [6] Lei C X, Wu Z S, Feng D T. Extinction characteristics of soot-silicate mixed agglomerates in random distribution[J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, 32(4): 0429001.
类成新, 吴振森, 冯东太. 随机分布黑碳-硅酸盐混合凝聚粒子的消光特性研究[J]. 光学学报, 2012, 32(4): 0429001.
- [7] Xu S, Bai L H, Fan M, *et al.* Optical properties of soot aggregates and mixture particles with water coatings[J]. *Acta Optica Sinica*, 2017, 37(2): 0201002.
徐澍, 白连红, 范萌. 黑碳团簇及具有包覆水层混合态粒子的光学特性[J]. 光学学报, 2017, 37(2): 0201002.
- [8] Mishchenko M I, Travis L D. Light scattering by polydisperse, rotationally symmetric nonspherical particles: linear polarization[J]. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 1994, 51(5): 759-778.
- [9] Zhang S, Peng J, Zhan J T, *et al.* Research of the influence of non-spherical ellipsoid particle parameter variation on polarization characteristic of light[J]. *Acta Physica Sinica*, 2016, 65(6): 064205.
张肃, 彭杰, 战俊彤, 等. 非球形椭球粒子参数变化对光偏振特性的影响[J]. 物理学报, 2016, 65(6): 064205.
- [10] Liu L, Mishchenko M I, Hovenier J W, *et al.* Scattering matrix of quartz aerosols: comparison and synthesis of laboratory and Lorenz-Mie results [J]. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2003, 79/80: 911-920.
- [11] Fan M, Chen L F, Li S S, *et al.* Scattering properties of non-spherical particles in the CO₂ shortwave infrared band[J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, 61(20): 204202.
范萌, 陈良富, 李莘莘, 等. 非球形气溶胶粒子短波红外散射特性研究[J]. 物理学报, 2012, 61(20): 204202.
- [12] Yang P, Feng Q, Hong G, *et al.* Modeling of the scattering and radiative properties of nonspherical dust-like aerosols[J]. *Journal of Aerosol Science*, 2007, 38(10): 995-1014.
- [13] Sadeghi E, Naghdi E. Polarization charges effects on optical properties of double ellipsoidal quantum dot[J]. *Physica B: Condensed Matter*, 2015, 457: 178-181.
- [14] Gong C W, Wei H L, Li X B, *et al.* The influence of the aspect ratio to the light scattering properties of cylinder ice particles[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, 29(5): 1155-1159.
宫纯文, 魏合理, 李学彬, 等. 取向比对圆柱状冰晶粒子光散射特性的影响[J]. 光学学报, 2009, 29(5): 1155-1159.
- [15] Nie M, Ren J M, Yang G, *et al.* Influences of nonspherical aerosol particles and relative humidity of atmosphere on the performance of free space quantum communication[J]. *Acta Physica Sinica*, 2016, 65(19): 190301.
聂敏, 任家明, 杨光, 等. 非球形气溶胶粒子及大气相对湿度对自由空间量子通信性能的影响[J]. 物理学报, 2016, 65(19): 190301.
- [16] Mishchenko M I, Travis L D, Lacis A A. Scattering, absorption, and emission of light by small particles[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002: 119.
- [17] Shi G Y. Atmospheric radiation[M]. Beijing: Science Press, 2007: 367-358.
石广玉. 大气辐射学[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 367-358.