

基于瞳面差异的相位复原算法

李倩^{1,2,3}, 吴桢^{1,2*}, 徐节速^{1,2,3}, 厉宏兰^{1,2,3}

¹中国科学院国家天文台南京天文光学技术研究所, 江苏 南京 210042;

²中国科学院天文光学技术重点实验室, 江苏 南京 210042;

³中国科学院大学, 北京 100049

摘要 GS(Gerchberg Saxton)算法具有收敛速度慢、运算精度低和收敛易陷入局部极小值等缺点,其对初值的选择非常敏感。通常情况下,估计的初值越接近真实值,复原效果越好。为了获得更接近于真实值的初始相位,在望远镜的瞳面添加非冗余孔径掩模,对通过掩模形成的干涉图进行处理,获得初始相位,可有效地加快 GS 算法的收敛速度并提高其运算精度。仿真结果表明所提算法的平均复原精度最少是 GS 算法的 9 倍。

关键词 物理光学; 相位复原; 干涉; GS 算法; 共相误差; 非冗余孔径掩模

中图分类号 O436

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201939.0626001

Phase Recovery Algorithm Based on Pupil Diversity

Li Qian^{1,2,3}, Wu Zhen^{1,2*}, Xu Jiesu^{1,2,3}, Li Honglan^{1,2,3}

¹National Astronomical Observatories, Nanjing Institute of Astronomical Optics & Technology,
Chinese Academy of Sciences, Nanjing, Jiangsu 210042, China;

²Key Laboratory of Astronomical Optics & Technology, Chinese Academy of Sciences,
Nanjing, Jiangsu 210042, China;

³University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

Abstract The GS (Gerchberg-Saxton) algorithm has the disadvantages of slow convergence, low accuracy, and easily falling into local minimum values. The GS algorithm is very sensitive to the initial phase. Usually, the closer the estimated initial phase is to its true value, the better the obtained recovery result is. Therefore, in order to obtain the initial phase more close to its true value, we added a non-redundant aperture mask on the pupil of a telescope, and then we processed the interferogram formed by the mask to obtain the initial phase. This method can effectively improve the convergence speed and running accuracy of the GS algorithm. The efficiency of this algorithm was verified via a computer simulation. The simulation results show that the average recovery accuracy of the proposed algorithm is at least nine times that of the GS algorithm.

Key words physical optics; phase recovery; interference; GS algorithm; co-phase error; non-redundant aperture mask

OCIS codes 260.3160; 100.5070; 110.2650; 110.6770

1 引 言

在目前的光学系统中,光场的强度分布可直接测量,而其相位分布往往很难直接测量。由于测量的强度分布中包含了光场的相位信息,从光场的强度信息复原光场的相位成为人们研究的焦点。1971年, Gerchberg 等^[1]提出利用瞳面和像平面的光场强度信息并通过迭代算法复原瞳面相位分布的 GS

(Gerchberg Saxton)算法。根据已知的瞳面几何形状,多数情况下利用成像强度并通过迭代 GS 算法可实现相位的复原。该算法在特殊情况下会收敛,但可能收敛到局部极小值,或者收敛到一个退化的解,即真正解 $P(-x)$ 的复共轭解 $\bar{p}(-x)$ ^[2]。为了提高 GS 算法的运算精度并加快其收敛速度,研究者们提出了许多新的算法,并将这些算法应用于诸多领域^[3-9]。

收稿日期: 2019-01-09; 修回日期: 2019-02-07; 录用日期: 2019-03-21

基金项目: 国家自然科学基金(11473047,11427803)

* E-mail: zhenwu@niaot.ac.cn

GS算法通过跟踪高维变量函数梯度的负方向来寻求极值,其本质上是一种最速下降算法,因此在某次搜索过程中得到的极小值通常与开始时选取的点有关^[5],所以GS算法迭代初始值的选择将直接影响算法计算结果的优劣。如果初始推测的相位接近于真实值,则其可使GS算法的运算沿正确的方向向真实值收敛。

本文在望远镜的瞳面插入非冗余孔径掩模^[10-13](NRM,也叫稀疏孔径掩模),利用NRM的特性,通过对其形成的干涉条纹进行相位提取,获得更接近于真实值的初始相位,从而有效地加快GS算法的收敛速度并提高其运算精度。掩模的插入引起了瞳面形状的差异,因此称之为基于瞳面差异的相位复原算法^[14-15],简称为NRM-GS算法。此方法为GS算法的发展提供了新的思路。

2 基于瞳面差异的相位复原算法原理

假设波前误差为 $\phi(x, y)$,全瞳面半径为 r ,则入瞳函数 $P(x, y)$ 可表示为

$$P(x, y) = \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r}\right) \exp[-i\phi(x, y)], \quad (1)$$

式中: $\text{circ}(\cdot)$ 为圆域函数。在单色点光源照明下,设像面坐标为 (ξ, η) ,系统的像面复振幅 $E(\xi, \eta)$ 及其点扩展函数 $I(\xi, \eta)$ 可表示为

$$E(\xi, \eta) = \mathcal{F}[P(x, y)] = a(\xi, \eta) \exp[i\varphi(\xi, \eta)], \quad (2)$$

$$I(\xi, \eta) = |\mathcal{F}[P(x, y)]|^2, \quad (3)$$

式中: $\mathcal{F}[\cdot]$ 表示傅里叶变换; $\varphi(\xi, \eta)$ 表示像面复振幅的相位分布函数。

在入瞳处插入由 N 个半径为 a 的子孔径组成的NRM,每个子孔径的圆心坐标为 (x_m, y_m) ($m = 1, 2, \dots, N$),则瞳面函数 $P_{\text{NRM}}(x, y)$ 可表示为子孔径函数与狄拉克函数 $\delta(\cdot)$ 阵的卷积:

$$P_{\text{NRM}}(x, y) = \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right) \cdot$$

$$\sum_{m=1}^N \delta(x - x_m, y - y_m) \exp[-i\phi(x, y)]. \quad (4)$$

假设波前仅存在piston相位,则每个子孔径上的波前误差可以用子孔径圆心的piston相位 $\varphi(x_m, y_m)$ 表示,则(4)式可写为

$$P_{\text{NRM}}(x, y) = \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right) \cdot$$

$$\sum_{m=1}^N \delta(x - x_m, y - y_m) \exp[-i\phi(x_m, y_m)]. \quad (5)$$

像面复振幅 $E_{\text{NRM}}(\xi, \eta)$ 为

$$E_{\text{NRM}}(\xi, \eta) = F[P_{\text{NRM}}(x, y)] = E_h \cdot$$

$$\sum_{m=1}^N \exp[-2i\pi(x_m \xi, y_m \eta)] \exp[-i\phi(x_m, y_m)], \quad (6)$$

式中: E_h 表示子孔径的像面复振幅。插入掩模之后的像面强度,即点扩展函数 $I_{\text{NRM}}(\xi, \eta)$ 为

$$\begin{aligned} I_{\text{NRM}}(\xi, \eta) &= E_{\text{NRM}}(\xi, \eta) E_{\text{NRM}}^*(\xi, \eta) = \\ & I_h \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \left\{ \exp\{-2i\pi[(x_m - x_n)\xi + (y_m - y_n)\eta]\} \exp\{-i[\phi(x_m, y_m) - \phi(x_n, y_n)]\} \right\} = \\ & I_h \left\{ N' + \exp\{-2i\pi[(x_1 - x_2)\xi + (y_1 - y_2)\eta] - i[\phi(x_1, y_1) - \phi(x_2, y_2)]\} + \right. \\ & \exp\{2i\pi[(x_1 - x_2)\xi + (y_1 - y_2)\eta] + i[\phi(x_1, y_1) - \phi(x_2, y_2)]\} + \\ & \exp\{-2i\pi[(x_1 - x_3)\xi + (y_1 - y_3)\eta] - i[\phi(x_1, y_1) - \phi(x_3, y_3)]\} + \\ & \left. \exp\{2i\pi[(x_1 - x_3)\xi + (y_1 - y_3)\eta] + i[\phi(x_1, y_1) - \phi(x_3, y_3)]\} + \dots \right\} = \\ & I_h \left\{ N' + \sum_{m < n} 2\cos\{2\pi[(x_m - x_n)\xi + (y_m - y_n)\eta] + [\phi(x_m, y_m) - \phi(x_n, y_n)]\} \right\}, \quad (7) \end{aligned}$$

式中: I_h 为子孔径的点扩展函数; N' 为 N 个子孔径的衍射光强,后面 $N(N-1)/2$ 项是 N 个子孔径两

两干涉的干涉因子,两个子孔径内的piston相位的差值使条纹相位发生了变化。(7)式可表示为

$$\begin{aligned} I(\xi, \eta) &= NI_h + \sum_{m < n} I_h \exp\{j\pi[(x_m - x_n)\xi + (y_m - y_n)\eta]\} + \\ & I_h \exp\{-j2\pi[(x_m - x_n)\xi + (y_m - y_n)\eta]\} \exp\{-j[\varphi(x_m, y_m) - \varphi(x_n, y_n)]\}. \quad (8) \end{aligned}$$

对(8)式进行傅里叶变换,其光学传递函数 M_{NRM} 可表示为

$$M_{\text{NRM}}(u, v) = NM_h(u, v) + \sum_{m < n} M_h(u - u_{mn}, v - v_{mn}) \exp\{j[\varphi(x_m, y_m) - \varphi(x_n, y_n)]\} + M_h(u + u_{mn}, v + v_{mn}) \exp\{-j[\varphi(x_m, y_m) - \varphi(x_n, y_n)]\}, \quad (9)$$

式中: $M_h(u, v)$ 表示 I_h 的傅里叶变换,是单个子孔径的光学传递函数; $\varphi(x_m, y_m) - \varphi(x_n, y_n)$ 表示两个子孔径内的 piston 相位的差值; (u_{mn}, v_{mn}) 表示由两个子孔径的圆心坐标即基线向量决定的频谱项。

NRM 的特性是每对子孔径之间的基线向量是唯一的,从而产生功率谱唯一并可在频域形成彼此独立的区域。这样的特性产生两个关键结果:1)从干涉图中提取的信息是确定的,这是因为一个频域区域由产生它的基线唯一确定;2)从每个频域区域获得的信息与一对子孔径唯一相关,即与这两个子孔径在瞳面上所覆盖区域的波前相关^[10-13]。

图1是基于瞳面差异的相位复原算法原理示意图。当使用基于瞳面差异的相位复原算法时,需要采集两幅焦面像。一幅是原始波前即被检测波前的全瞳面成像 $I(\xi, \eta)$ [图1(b)],另一幅是在瞳面添加 NRM 之后通过掩模的波前成像 $I_{\text{NRM}}(\xi, \eta)$ [图1(d)]。全瞳面像用于 GS 循环, NRM 成像提供了子孔径内迭代的初始相位,原始波前以及通过掩模后的波前分别如图1(a)、(c)所示。

基于瞳面差异的相位复原算法与普通的 GS

算法的不同之处在于:通过对第二幅图像 $I_{\text{NRM}}(\xi, \eta)$ 的处理,可获得 $N(N-1)/2$ 组干涉条纹相位。从物理意义上讲,仅存在 piston 像差时,干涉条纹相位的变化是由两个子孔径内的 piston 相位的差值引起的^[16]。当存在多种像差时,干涉条纹相位的变化是由两个子孔径内相位的 piston 分量的差值引起的。对成像 $I_{\text{NRM}}(\xi, \eta)$ 进行傅里叶变换,其调制传递函数 f_{MT} 如图1(e)所示。根据(9)式,通过设计的滤波器分离出 $N(N-1)/2$ 个频谱项,其相位就是两个子孔径圆心相位的 piston 分量的差值。当子孔径个数 $N > 3$ 时,孔径对(或基线)个数多于子孔径个数,干涉条纹相位与子孔径之间映射的过约束性使得由原始数据点产生的误差可通过解的自洽性来确定和消除,并可通过最小二乘法计算每个子孔径圆心相位的 piston 分量 $\phi(x_m, y_m)$ 。

假设 $\phi(x_m, y_m)$ ($m=1 \sim N$) 表示 N 个子孔径圆心相位的 piston 分量, φ_{mn} ($m, n=1 \sim N, m < n$) 表示 $N(N-1)/2$ 对子孔径圆心相位的 piston 分量的差值,则构成的超定方程组为

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(x_1, y_1) \\ \phi(x_2, y_2) \\ \phi(x_3, y_3) \\ \vdots \\ \phi(x_m, y_m) \\ \vdots \\ \phi(x_N, y_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{13} \\ \varphi_{14} \\ \vdots \\ \varphi_{mn} \\ \vdots \\ \varphi_{N(N-1)} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{P}, \quad (10)$$

式中: $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \phi(x_1, y_1) \\ \phi(x_2, y_2) \\ \phi(x_3, y_3) \\ \vdots \\ \phi(x_m, y_m) \\ \vdots \\ \phi(x_N, y_N) \end{bmatrix}$; $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{13} \\ \varphi_{14} \\ \vdots \\ \varphi_{mn} \\ \vdots \\ \varphi_{N(N-1)} \end{bmatrix}$ 。求解(10)式可得

$$\mathbf{A} = (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{P}, \quad (11)$$

将由 $I_{\text{NRM}}(\xi, \eta)$ 获得的 $\phi(x_m, y_m)$ 作为入瞳孔径内波前的初始相位, 保持入瞳波前其余部分相位为 0, 结合入瞳结构约束 $P(x, y)$, 构成入射波前, 将其与第一幅成像的均方根 (RMS) 进行 GS 迭代 [如图 1(f) 所示, 图中 FT 表示傅里叶变换, FT^{-1} 表示傅里叶逆变换]。在之后的每次迭代中, 子孔径内的相位仍用 $\phi(x_m, y_m)$ 替代, 子孔径外的相位则由 GS 迭代产生的相位替代。经过初始的约束收敛, 取消由

NRM 获得的相位约束, 再通过无相位约束的 GS 迭代直至均方误差 S 小于预先规定的值 ϵ 。 S 可表示为

$$S = \frac{\sum \sum |E^{(k)}(\xi, \eta) - E(\xi, \eta)|^2}{\sum \sum E(\xi, \eta)^2} < \epsilon, \quad (12)$$

式中: k 为迭代的次数。基于瞳面差异的相位复原算法的数据处理流程图如图 2 所示。

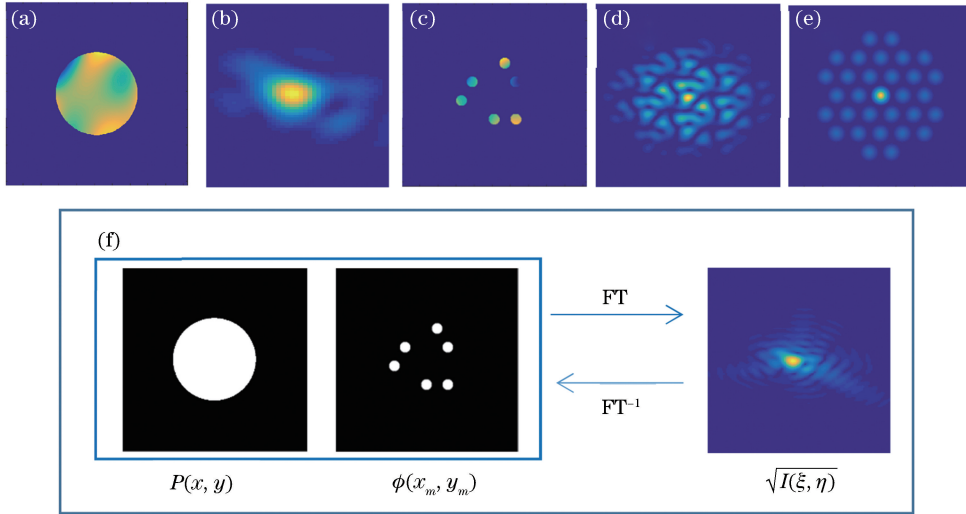


图 1 基于瞳面差异的相位复原算法原理示意图。(a) 原始波前; (b) $I(\xi, \eta)$; (c) 通过掩模的波前; (d) $I_{\text{NRM}}(\xi, \eta)$; (e) $I_{\text{NRM}}(\xi, \eta)$ 的 f_{MT} ; (f) 基于瞳面差异的相位复原算法原理

Fig. 1 Principle diagram of NRM-GS algorithm. (a) Original wavefront; (b) $I(\xi, \eta)$; (c) wavefront after mask; (d) $I_{\text{NRM}}(\xi, \eta)$; (e) f_{MT} of $I_{\text{NRM}}(\xi, \eta)$; (f) principle of NRM-GS algorithm

3 连续波前相位复原的计算机仿真

为了研究基于瞳面差异的相位复原算法性能的优劣, 在此采用 Zemax 和 MATLAB 对该算法进行仿真, 采用残余波前的均方根值 E_{RMS} 来衡量波前的复原精度, 并将复原结果与普通 GS 算法的复原结果进行对比。 E_{RMS} 的表达式为

$$E_{\text{RMS}} = \sqrt{\sum \frac{(\phi - \phi_0)^2}{N_p}}, \quad (13)$$

式中: ϕ 表示复原波前相位; ϕ_0 表示原始波前相位; N_p 表示光瞳内采样点数。

在仿真中采用 Golay-6 型掩模板 [图 1(f)], 全瞳面半径为 115 mm, 掩模子孔径半径为 15 mm, 采样点数为 512×512 , 当 $S < \epsilon = 10^{-6}$ 时, 终止迭代。

首先将基于瞳面差异的相位复原算法用于连续变化的单项像差的相位复原。利用 Zernike 多项式^[17]表示像差, 引入单纯像散, 其 RMS 和 PV

(peak-to-valley) 值分别为 0.1402λ 和 0.6812λ 。6 个子孔径圆心的原始波前相位、基于瞳面差异的相位复原算法初始相位和普通 GS 算法的随机初始相位及其误差如表 1 所示。

从表 1 中可以看出, 基于瞳面差异的相位复原算法的初始相位更接近于真实值, 其均方根误差为 0.0002λ , 而普通 GS 算法产生的随机初始相位均方根误差为 0.1828λ 。

在复原中可以发现, 如果采用相位约束, 即在一定的迭代次数内子孔径内的相位仍用 $\phi(x_m, y_m)$ 替代, 则能够获得更高的复原精度, 且随着相位约束次数的增加, 迭代产生的数据趋于稳定。当 $S < 10^{-3}$ 时取消约束, 初始相位继续向真实值收敛。

基于瞳面差异的相位复原算法有相位约束、无相位约束以及普通 GS 算法的迭代过程中的均方误差 S 曲线以及残余波前的均方根 E_{RMS} 曲线如图 3(a)、(b) 所示。

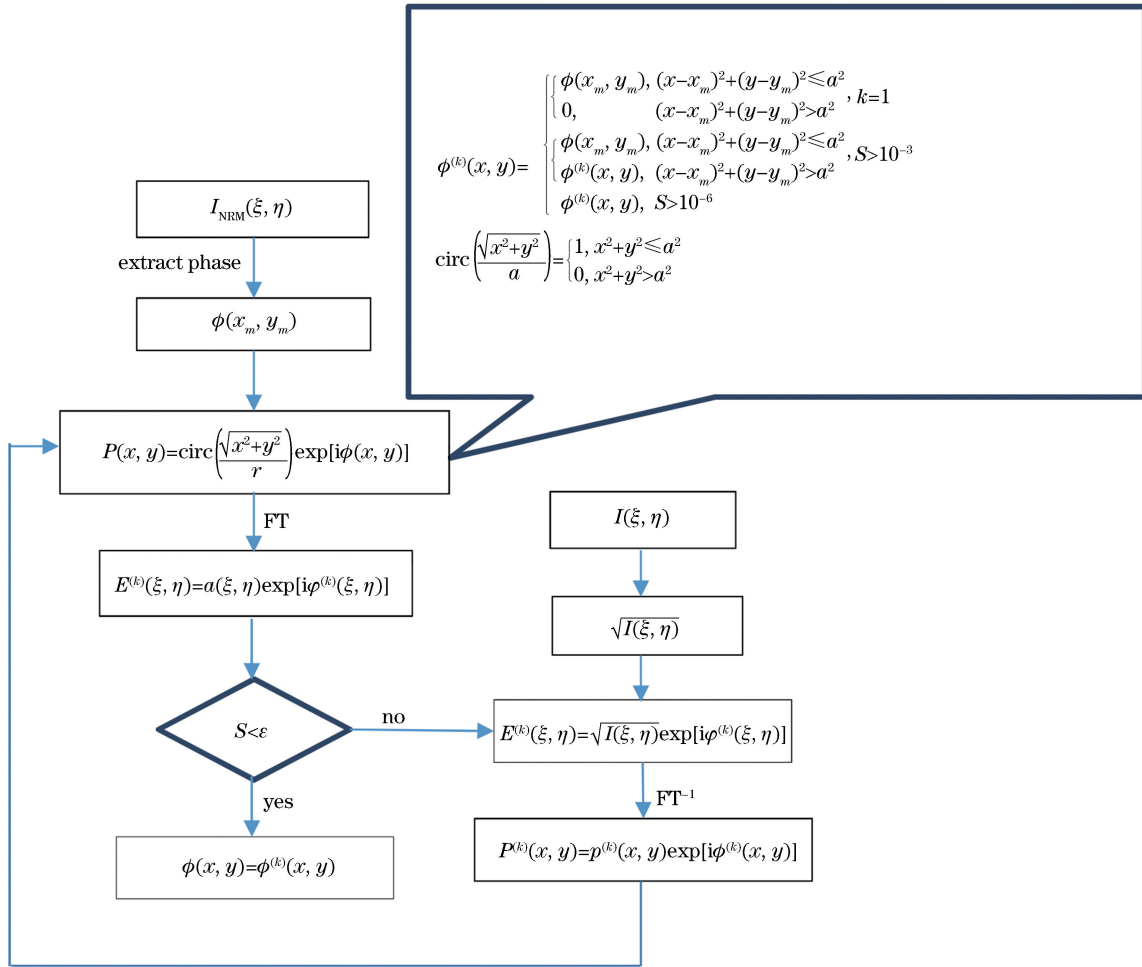


图 2 基于瞳面差异的相位复原算法数据处理流程图

Fig. 2 Flow chart of data processing based on NRM-GS algorithm

表 1 6 个子孔径圆心的原始波前相位、基于瞳面差异的相位复原算法初始相位和普通 GS 算法的随机初始相位及其误差

Table 1 Original wavefront phases, initial phases of NRM-GS and ordinary GS algorithms and their errors for six-sub-aperture centers

Sub-aperture	Original phase	Initial phase		Initial phase error	
		NRM-GS piston component	GS random initial phase	NRM-GS piston component	GS random initial phase
1	0.1789λ	0.1787λ	0.1261λ	-0.0002λ	0.0526λ
2	0.0439λ	0.0437λ	0.1197λ	-0.0002λ	-0.0757λ
3	0.2589λ	0.2587λ	0.1248λ	-0.0002λ	-0.1341λ
4	-0.0870λ	-0.0872λ	0.1265λ	-0.0002λ	-0.2135λ
5	-0.3021λ	-0.3023λ	0.0278λ	-0.0002λ	-0.3229λ

从图 3 中可以看出,由于普通 GS 算法初始相位的产生是随机的,极易因陷入局部极小值而停滞(图中点划线所示),此时 S 收敛至 0.0854,其 E_{RMS} 为 0.2911λ,其对应的 E_{RMS} 随迭代次数的增加而增大,多次运行普通 GS 算法之后相位才收敛,且收敛效果均不相同。图 3 中点线是多次运行的最优结

果,实线为基于瞳面差异的相位复原算法无相位约束的迭代结果,虚线为有 70 次的相位约束的迭代结果。当 S 收敛到 0.001 时,无相位约束迭代、有相位约束迭代以及普通 GS 算法对应的迭代次数分别是 41, 70, 160; 当 $S < \epsilon$ 时,迭代次数分别为 66, 112, 191, 其 E_{RMS} 为分别为 0.006λ, 0.0031λ, 0.1167λ。可

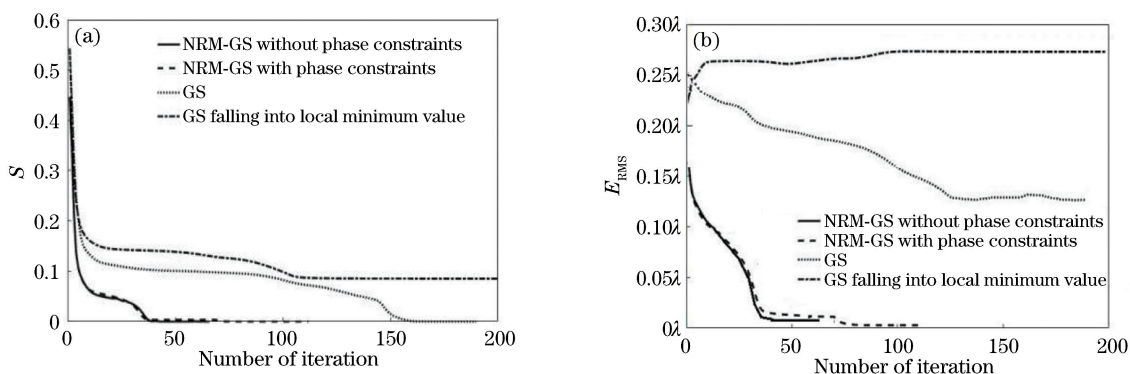


图 3 基于瞳面差异的相位复原算法有相位约束、无相位约束以及普通 GS 算法的迭代过程。(a) S 曲线;(b) E_{RMS} 曲线
Fig. 3 Iteration processes for NRM-GS algorithm with and without phase constraints or ordinary GS algorithm.

(a) S curves; (b) E_{RMS} curves

可以看出,基于瞳面差异的相位复原算法不论是收敛速度还是复原精度都优于普通的 GS 算法,对于有相位约束的迭代,虽然收敛速度比无相位约束时低,但其复原精度约为有相位约束的 2 倍,是普通 GS 算法的 37 倍。这说明基于瞳面差异的相位复原算法的初始相位更接近于真实值,一定的相位约束使得收敛值向着真实值的方向收敛。

采用基于瞳面差异相位复原算法有相位约束复原的波前的 RMS 和 PV 值分别为 0.1402λ 和 0.6812λ ,残余波前 E_{RMS} 和 PV 值分别为 0.0031λ 和 0.0029λ 。采用普通的 GS 算法复原的波前 RMS 和 PV 值分别为 0.1824λ 和 0.6815λ ,残余波前 E_{RMS} 和 PV 值分别为 0.1167λ 和 0.1080λ ,其单纯像散复原如图 4 所示。

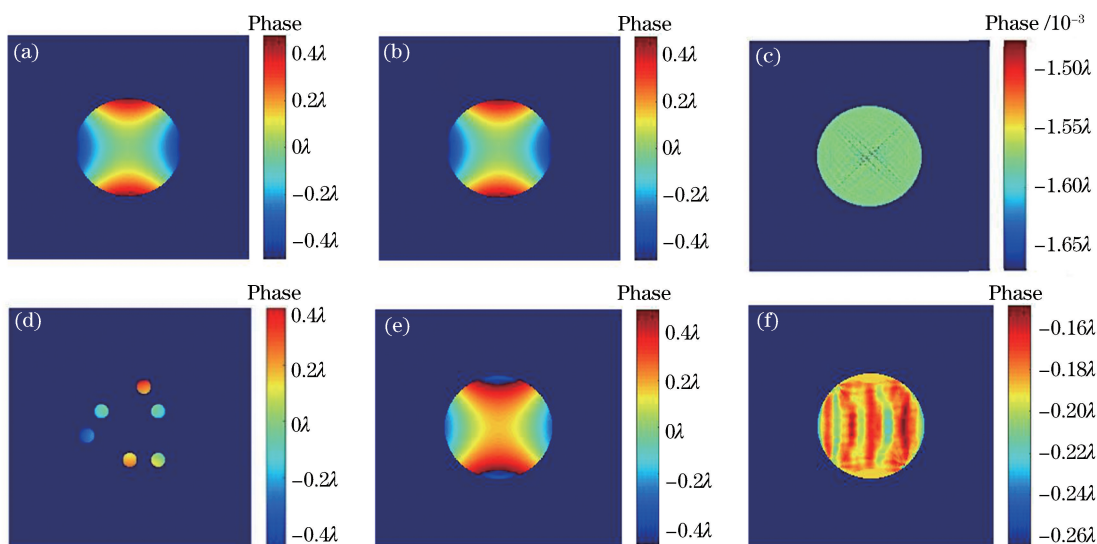


图 4 单纯像散复原。(a)原始波前;(d)透过掩模的波前;(b)(e)基于瞳面差异的相位复原算法与 GS 算法复原的波前;
(c)(f)基于瞳面差异的相位复原算法与 GS 算法复原的残余波前

Fig. 4 Recovery of astigmatism aberration. (a) Original wavefront; (d) wavefront after mask; (b)(e) recovered wavefronts by NRM-GS algorithm and GS algorithm; (c)(f) recovered residual wavefronts by NRM-GS algorithm and GS algorithm

接下来选取不同的单项像差进行仿真,6 组 NRM-GS 算法和 GS 算法对应的单阶 Zernike 多项式的仿真复原结果如表 2 所示(由于 GS 算法的不确定性,选取多次运行后 GS 算法的最优复原结果与基于瞳面差异的相位复原算法有相位约束的复原结果进行对比,以确保对比的准确性)。从表中可以看出,对于不同的单项像差,基于瞳面差异的相位复原算法的收敛速度均快于普通 GS 算法,其复原精

度至少是普通 GS 算法的 7 倍,最高达到了 38 倍,平均复原精度是普通 GS 算法的 15 倍。

将基于瞳面差异的相位复原算法用于由多项像差构成的连续波前的复原,原始波前由前 15 项 Zernike 多项式构成,构成的原始波前的 PV 和 RMS 值分别为 0.5618λ 和 0.1141λ 。6 个子孔径圆心上的原始波前相位、初始相位及其误差如表 3 所示。

表 2 6 组 NRM-GS 算法和 GS 算法对应的单阶 Zernike 多项式的仿真复原结果

Table 2 Six groups of recovery results of single order Zernike polynomial by NRM-GS algorithm and GS algorithm

Single order Zernike term	NRM-GS algorithm		GS algorithm	
	Residual wavefront E_{RMS}	Number of iteration	Residual wavefront E_{RMS}	Number of iteration
3	0.0040 λ	91	0.1523 λ	105
5	0.0031 λ	112	0.1167 λ	191
9	0.0145 λ	125	0.1096 λ	212
11	0.0056 λ	97	0.1244 λ	129
12	0.0080 λ	109	0.1241 λ	136
13	0.0123 λ	103	0.1248 λ	117
Average	0.0079 λ		0.1253 λ	

表 3 6 个子孔径圆心上的原始波前相位、初始相位及其误差

Table 3 Original wavefront phases, initial phases and their errors for six-sub-aperture centers

Sub-aperture	Original phase	Initial phase		Initial phase error	
		NRM-GS piston component	GS random initial phase	NRM-GS piston component	GS random initial phase
1	-0.164 λ	-0.1521 λ	0.1051 λ	-0.0119 λ	-0.2791 λ
2	-0.1284 λ	-0.1086 λ	0.091 λ	-0.0198 λ	-0.2194 λ
3	0.0907 λ	0.0861 λ	0.1259 λ	0.0046 λ	-0.0352 λ
4	0.1995 λ	0.1924 λ	0.1245 λ	0.0071 λ	0.075 λ
5	-0.1301 λ	-0.1212 λ	0.0051 λ	-0.0089 λ	-0.1361 λ
6	0.0887 λ	0.1027 λ	0.1244 λ	-0.014 λ	-0.0357 λ

从表中可以看出,基于瞳面差异的相位复原算法产生的初始相位更接近于真实值,其均方根误差为 0.0148 λ ,随机生成的初始相位均方根误差为 0.1595 λ 。

采用基于瞳面差异的相位复原算法有相位约束和无相位约束迭代以及 GS 算法,得到的均方误差 S 曲线以及残余波前的均方根 E_{RMS} 曲线分别如图 5(a)、5(b)所示。

同样,由于普通 GS 算法初始相位的产生是随机的,极易因陷入局部极小值而停滞(图 5 中点划线所示),此时 S 收敛至 0.0229,其 E_{RMS} 为 0.1683 λ ,其对应的 E_{RMS} 随迭代次数的增加而增大,需多次运行之后才收敛,且收敛效果均不相同。图 5 中的点线是多次运行算法后取得的最优结果,实线为基于瞳面差异的相位复原算法无相位约束的迭代结果,点划线为 45 次有相位约束的迭代结果。当 S 收敛到 0.001 时,无相位约束迭代、有相位约束迭代以及普通 GS 算法对应的迭代

次数分别是 23, 43, 59; 当 $S < \epsilon$ 时,迭代次数分别为 60, 91, 100, 其 E_{RMS} 分别为 0.0245 λ , 0.0045 λ , 0.1069 λ 。基于瞳面差异的相位复原算法不论是收敛速度还是复原精度都优于普通的 GS 算法,对于有相位约束的迭代,虽然收敛速度比无瞳面约束时慢,但其复原精度是无相位约束的 5 倍,是普通 GS 算法的 23 倍,后面的基于瞳面差异的相位复原算法仅指有相位约束的情况。

该波前复原结果如图 6 所示。采用基于瞳面差异的相位复原算法复原的波前 PV 和 RMS 值分别为 0.5618 λ 和 0.1142 λ ,残余波前 PV 和 E_{RMS} 值分别为 0.0041 λ 和 0.0045 λ 。采用普通的 GS 算法复原的波前 PV 和 RMS 值分别为 0.5618 λ 和 0.1378 λ ,残余波前的 PV 和 E_{RMS} 值分别为 0.1068 λ 和 0.1069 λ 。

基于瞳面差异的相位复原算法与普通 GS 算法复原波前的 Zernike 多项式拟合系数与原始波前的 Zernike 多项式系数的对比图如图 7 所示。

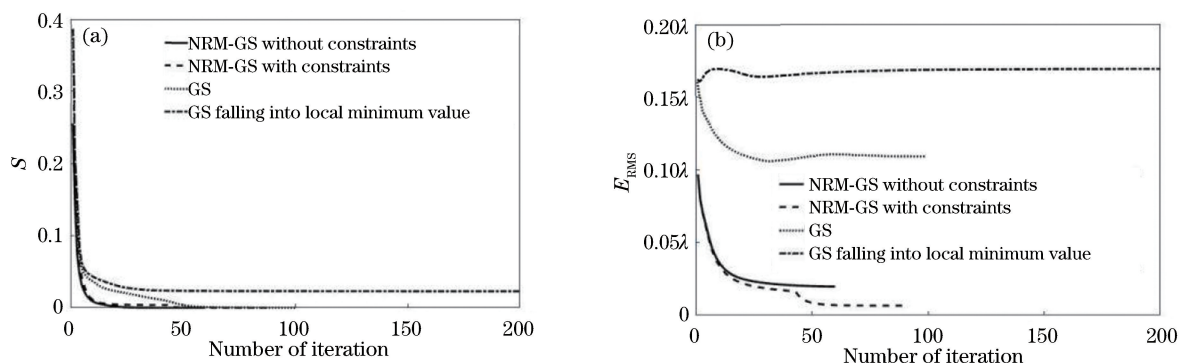


图 5 采用基于瞳面差异的相位复原算法有相位约束和无相位约束以及 GS 算法的迭代过程。

(a) S 曲线; (b) E_{RMS} 曲线

Fig. 5 Iteration processes for NRM-GS algorithms with and without phase constraints or ordinary GS algorithm.

(a) S curves; (b) E_{RMS} curves

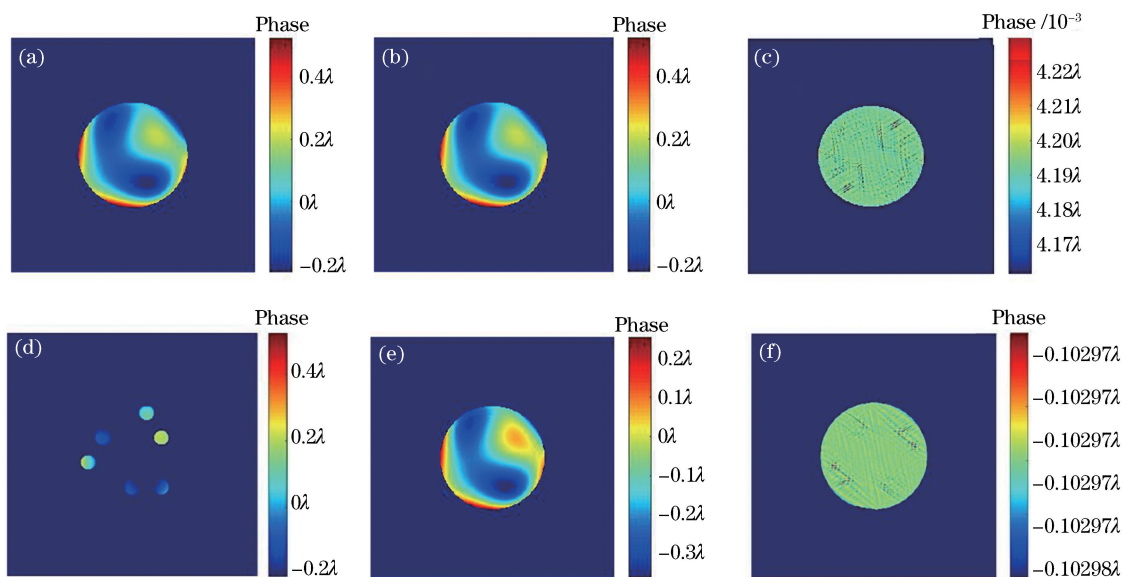


图 6 随机组合波前(前 15 项)的复原。(a)原始波前; (d)透过掩模的波前; (b)(e)基于瞳面差异的相位复原算法与 GS 算法复原的波前; (c)(f)基于瞳面差异的相位复原算法与 GS 算法复原的残余波前

Fig. 6 Recovery of randomly combined wavefront (first 15 terms). (a) Original wavefront; (d) wavefront after mask; (b) (e) recovered wavefronts by NRM-GS algorithm and GS algorithm; (c) (f) recovered residual wavefronts by NRM-GS algorithm and GS algorithm

选择不同的 Zernike 多项式拟合系数组成多种随机连续波前, 并进行仿真, 5 组 NRM-GS 算法和 GS 算法对应的不同随机波前的仿真复原结果如表 4 所示。从表中可以看出, 对于各种不同组合的随机波前, 基于瞳面差异的相位复原算法的收敛速度均快于普通 GS 算法, 平均复原精度是普通 GS 算法的 9 倍。采用基于瞳面差异的相位复原算法和 GS 算法得到的平均 E_{RMS} 分别为 0.0141λ 和 0.1258λ 。

4 非连续波前共相误差检测的计算机仿真

望远镜口径尺寸的不断增大, 给望远镜的设计、

加工、制造和检测等技术带来了前所未有的挑战。拼接主镜与合成孔径望远镜概念的提出, 虽有效地减小了主镜的质量、成本、体积和制造周期, 使得超大口径望远镜的设想能够实现, 但也带来了许多问题, 其中最为典型的是各拼接子镜之间的共相误差难以被检测和控制。各子镜间的共相误差包括 piston 误差和 tip/tilt 误差^[18-22], 属于非连续波前误差。在此尝试将基于瞳面差异的相位复原算法应用于合成孔径望远镜共相误差的检测。

仿真中, 假定合成孔径望远镜由 3 个子望远镜组成, 子望远镜半径为 25 mm , 掩模子孔径半径为 8 mm , 合成孔径望远镜共相误差的复原原始波前

如图 8(a)所示。在进行共相误差检测时,选定子望远镜 1 为基准,假设其 piston 误差为 0。5 个子孔径构成 NRM,透过掩模的波前如图 8(d)所示,

在每个子望远镜上添加的共相误差如表 5 所示,构成的原始波前的 PV 和 RMS 值分别为 0.8654λ 和 0.1879λ 。

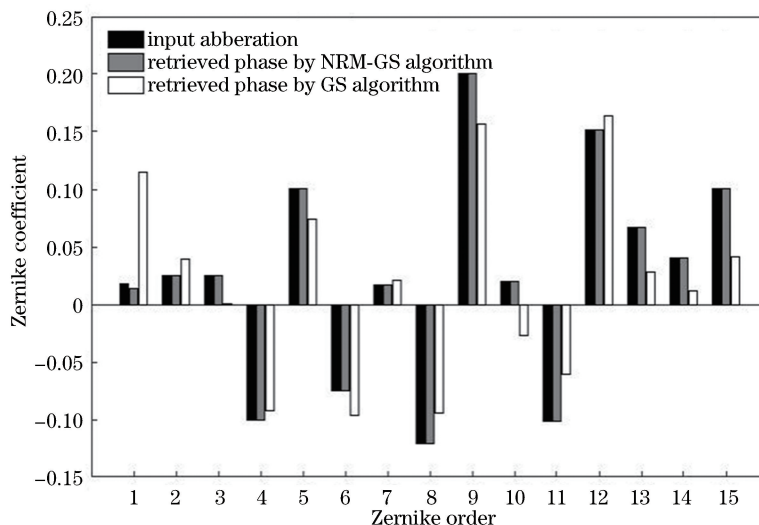


图 7 基于瞳面差异的相位复原算法与 GS 算法复原波前的 Zernike 多项式拟合系数与原始波前的 Zernike 多项式系数对比图(前 15 项)

Fig. 7 Comparison of Zernike polynomial coefficients (first 15 items) of original wavefront with those by NRM-GS algorithm and GS algorithm

表 4 5 组基于瞳面差异的相位复原算法和 GS 算法对应的不同随机波前的仿真复原结果

Table 4 Five groups of recovery results of randomly combined wavefronts by NRM-GS algorithm and GS algorithm

Number of terms of Zernike polynomials	RMS of original wavefront ϕ_0	NRM-GS		GS	
		Residual wavefront E_{RMS}	Number of iterations	Residual wavefront E_{RMS}	Number of iterations
1(first 15 terms)	0.1156λ	0.0088λ	95	0.1241λ	98
2(first 20 terms)	0.1919λ	0.0140λ	112	0.1027λ	127
3(first 25 terms)	0.1048λ	0.0240λ	108	0.1556λ	145
4(first 30 terms)	0.1301λ	0.0099λ	99	0.1342λ	165
5(first 37 terms)	0.0800λ	0.0141λ	110	0.1258λ	128

表 5 在每个子望远镜上添加的共相误差

Table 5 Added co-phase errors on each sub-telescope

Sub-telescope	Piston error	Tip error	Tilt error
1	0.0000λ	0.2000λ	0.0752λ
2	0.2000λ	0.1254λ	0.0627λ
3	0.0500λ	0.0752λ	0.1254λ

5 个子孔径圆心的原始波前相位、初始相位及其误差如表 6 所示。其中基于瞳面差异的相位复原算法初始相位的均方根误差为 0.0067λ , 普通 GS 算法随机生成的初始相位均方根误差为 0.0919λ 。

进行合成孔径望远镜共相误差检测时,基于瞳面差异的相位复原算法有相位约束、无相位约束以及 GS 算法,迭代过程中的均方误差 S 曲线以及 3 个子望远镜上残余波前的 E_{RMS} 曲线分别如图 9(a)

和 9(b)所示。与复原连续波前不同的是,多次运行 GS 算法并没有陷入局部极小值的问题,图 9 中的点线是多次运行 GS 算法后得到的最优结果,实线为基于瞳面差异的相位复原算法无相位约束的迭代结果,虚线为 11 次有相位约束的迭代结果。从图中可以看出:对于共相误差的检测,基于瞳面差异的相位复原算法的收敛速度虽然快于 GS 算法,但其优势并不比连续波前时明显。当 $S < \epsilon$ 时,采用无相位约束迭代、有相位约束迭代以及普通 GS 算法的迭代次数分别为 30, 37, 44, 其 E_{RMS} 值分别为 0.0233λ , 0.00213λ , 0.0608λ 。对于有相位约束的迭代,其检测精度是无相位约束的 9 倍,是普通 GS 算法的 19 倍。

合成孔径望远镜共相误差的复原结果如图 8 所示。采用基于瞳面差异的相位复原算法有相位约束

表 6 原始波前相位、初始相位及其误差

Table 6 Original wavefront phases, initial phases and their errors

Sub-aperture	Original phase	Initial phase		Initial phase error	
		NRM-GS piston component	GS random initial phase	NRM-GS piston component	GS random initial phase
1	0.0000 λ	0.0000 λ	0.0235 λ	0.0000 λ	-0.0235 λ
2	0.0112 λ	0.0011 λ	0.0453 λ	0.0101 λ	-0.0341 λ
3	0.3734 λ	0.3707 λ	0.1305 λ	0.0027 λ	0.2132 λ
4	0.0384 λ	0.0289 λ	0.0973 λ	0.0095 λ	-0.0589 λ
5	0.0461 λ	0.0378 λ	0.0542 λ	0.0083 λ	-0.0081 λ

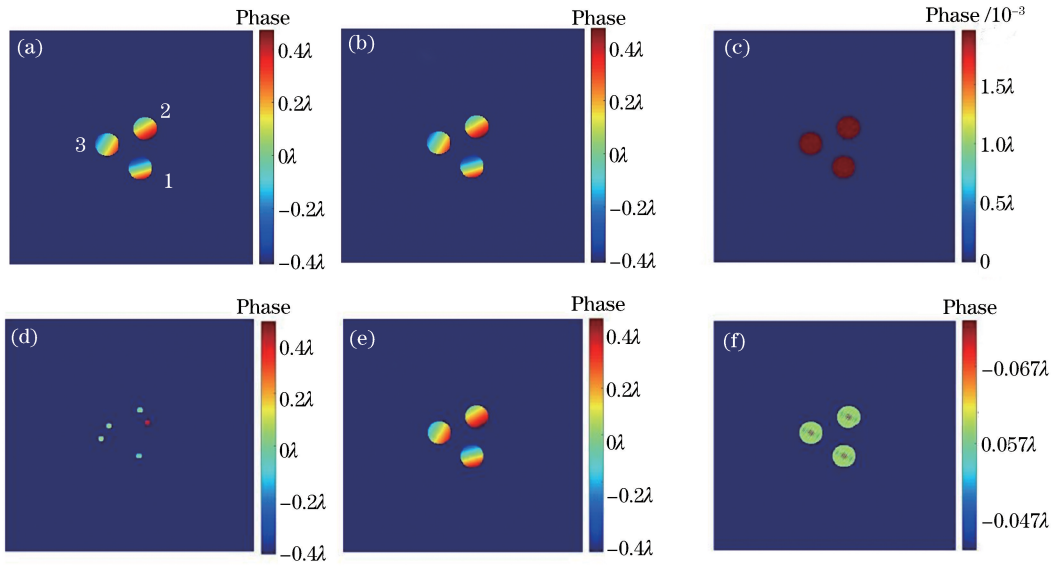


图 8 合成孔径望远镜共相误差的复原结果。(a)原始波前;(b)基于瞳面差异的相位复原算法复原的波前;(c)基于瞳面差异的相位复原算法复原的残余波前;(d)透过掩模的波前;(e) GS算法复原的波前;(f) GS算法复原的残余波前
Fig. 8 Recovery results of co-phase errors on synthetic aperture telescope. (a) Original wavefront; (b) recovered wavefront by NRM-GS algorithm; (c) recovered residual wavefront by NRM-GS algorithm; (d) wavefront after mask; (e) recovered wavefront by GS algorithm; (f) recovered residual wavefront by GS algorithm

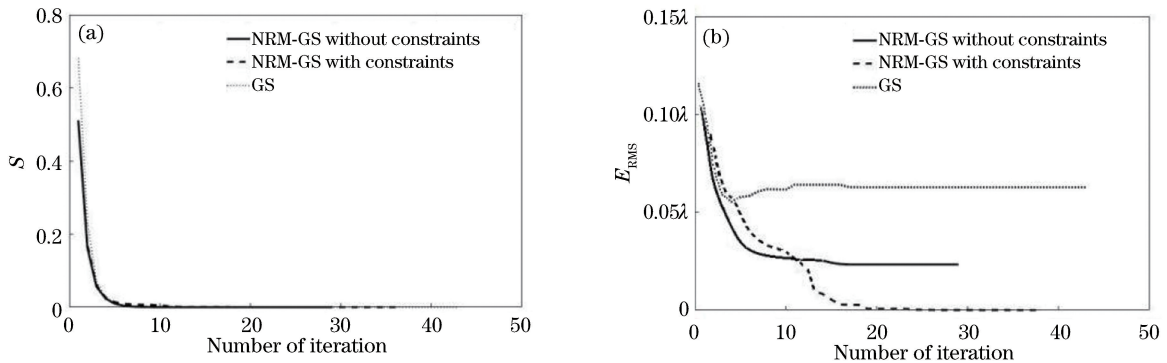


图 9 合成孔径望远镜共相误差的检测时,基于瞳面差异的相位复原算法有相位约束、无相位约束以及 GS 算法的迭代过程。
(a) S 曲线图;(b)三个子望远镜上残余波前的 E_{RMS} 曲线
Fig. 9 Iteration processes for NRM-GS algorithms with and without phase constraints or ordinary GS algorithm when co-phase errors on synthetic aperture telescope are detected. (a) S curves; (b) E_{RMS} curves of residual wavefronts on three sub-telescopes

复原的波前 PV 和 E_{RMS} 值分别为 0.8655λ 和 0.1879λ , 残余波前 PV 和 E_{RMS} 值分别为 0.00213λ 和 0.0026λ 。采用普通的 GS 算法复原的波前 PV 和 E_{RMS} 值分别为 0.8657λ 和 0.2113λ , 残余波前的 PV 和 E_{RMS} 值分别为 0.0613λ 和 0.0608λ 。

对于仅存在 piston 误差, 仅存在 tip/tilt 误差,

表 7 多组共相误差复原结果

Table 7 Recovery results of multigroup co-phase errors

Co-phase error	Maximum E_{RMS}		Minimum E_{RMS}		Average E_{RMS}		Average number of iteration	
	NRM-GS	GS	NRM-GS	GS	NRM-GS	GS	NRM-GS	GS
Piston(10 groups)	0.0078λ	0.0741λ	0.0045λ	0.0424λ	0.0056λ	0.0533λ	37	43
Tip/tilt(10 groups)	0.0100λ	0.1327λ	0.0037λ	0.1240λ	0.0071λ	0.1267λ	38	49
Piston, tip/tilt (10 groups)	0.0064λ	0.0860λ	0.0022λ	0.0423λ	0.0045λ	0.0651λ	40	47

5 结 论

针对普通的 GS 算法收敛速度慢、运算精度低和收敛易陷入局部极小值等问题, 将 NRM 技术与 GS 算法相结合, 采用基于瞳面差异的相位复原算法进行了仿真。研究表明, 利用 NRM 的成像特性, 通过对 NRM 产生的干涉条纹的相位的提取, 获得了子孔径上接近于真实相位的 piston 分量。以此作为初始相位, 可使得 GS 算法朝着正确的方向收敛, 其复原精度、收敛速度明显优于普通 GS 算法。采用基于瞳面差异的相位复原算法既可用于检测大气扰动和光学器件面型误差这类连续变化的波前畸变, 也可以用于检测拼接主镜、合成孔径望远镜间的平移误差和倾斜误差等这类非连续变化的共相误差。

参 考 文 献

- [1] Gerchberg R W, Saxton W O. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction phase pictures[J]. *Optik*, 1972, 35(2): 237-250.
- [2] Fienup J R. Phase retrieval algorithms: a comparison [J]. *Applied Optics*, 1982, 21(15): 2758-2769.
- [3] Fienup J R, Wackerman C C. Phase-retrieval stagnation problems and solutions[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1986, 3(11): 1897-1907.
- [4] Ma X X, Wang J L, Wang B. Study on phase retrieval algorithm[J]. *Laser & Infrared*, 2012, 42(2): 217-221.
马鑫雪, 王建立, 王斌. 相位恢复技术算法的探究[J]. *激光与红外*, 2012, 42(2): 217-221.
- [5] Gu X, Xu K S. Some improvements on the GS algorithm in phase retrieval problem[J]. *Journal of Fudan University (Natural Science)*, 2000, 39(2): 205-211.
顾翔, 徐克璠. 用于相位恢复的 GS 算法的一点改进[J]. *复旦学报(自然科学版)*, 2000, 39(2): 205-211.
- [6] Zhu H Y, Zhou Z H, Zhu L Q, *et al.* Progress of phase retrieval algorithm[J]. *Laser Journal*, 2016, 37(11): 1-5.
朱红云, 周哲海, 祝连庆, 等. 相位恢复算法的研究进展[J]. *激光杂志*, 2016, 37(11): 1-5.
- [7] Chen S, Li C W, Zhang S J. Phase retrieval based on Talbot effect of Ronchi grating [J]. *Acta Optica Sinica*, 2018, 38(4): 0405001.
陈升, 李常伟, 张思炯. 基于 Ronchi 光栅 Talbot 效应的相位恢复 [J]. *光学学报*, 2018, 38(4): 0405001.
- [8] Luo Q. Studies on the phase diversity wavefront sensor and co-phasing measurement for segmented mirrors [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2012: 10-13.
罗群. 相位差波前探测技术及其在拼接镜共相检测中的应用研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2012: 10-13.
- [9] Yue D. Co-phasing of the segmented telescope and image retrieval based on phase diversity algorithm [D]. Changchun: University of Chinese Academy of Sciences, 2016: 25.
岳丹. 基于相位差算法的拼接镜共相误差探测与图像复原的研究[D]. 长春: 中国科学院大学, 2016: 25.
- [10] Tuthill P G, Monnier J D, Danchi W C, *et al.* Michelson interferometry with the Keck I Telescope [J]. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 2000, 112(770): 555-565.

- [11] Lacour S, Tuthill P, Amico P, *et al.* Sparse aperture masking at the VLT-I. Faint companion detection limits for the two debris disk stars HD 92945 and HD 141569[J]. *Astronomy & Astrophysics*, 2011, 532: A72.
- [12] Ford K E S, McKernan B, Sivaramakrishnan A, *et al.* Active galactic nucleus and quasar science with aperture masking interferometry on the James Webb Space Telescope[J]. *The Astrophysical Journal*, 2014, 783(2): 73.
- [13] Wang Y Q, Wu Z. Experimental investigation of non-redundant aperture masking technique in binary-star detection[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2018, 55(11): 111101.
王彦强, 吴桢. 非冗余孔径掩模技术在双星探测中的实验研究[J]. *激光与光电子学进展*, 2018, 55(11): 111101.
- [14] Greenbaum A Z, Sivaramakrishnan A. In-focus wavefront sensing using non-redundant mask-induced pupil diversity[J]. *Optics Express*, 2016, 24(14): 15506-15521.
- [15] Greenbaum A Z, Gamper N, Sivaramakrishnan A. In-focus phase retrieval using JWST-NIRISS's non-redundant mask [J]. *Proceedings of SPIE*, 2016, 9904: 990448.
- [16] Greenbaum A Z, Pueyo L, Sivaramakrishnan A, *et al.* An image-plane algorithm for JWST's non-redundant aperture mask data[J]. *The Astrophysical Journal*, 2015, 798(2): 68.
- [17] Noll R J. Zernike polynomials and atmospheric turbulence [J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1976, 66(3): 207-211.
- [18] Cao F, Wu Z, Zhu Y T. Misalignment sensing for optical aperture synthesis telescope using phase diversity[J]. *Astronomical Research & Technology*, 2008, 5(3): 288-293.
曹芳, 吴桢, 朱永田. 基于相位差法的光学综合孔径望远镜失调检测技术[J]. *天文研究与技术*, 2008, 5(3): 288-293.
- [19] Long W J, Wang Z L, Zhou Y P. Imaging analysis and computer simulation of optical synthetic aperture telescope [J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, 24(8): 1009-1014.
龙伟军, 王治乐, 周彦平. 光学综合孔径望远镜成像分析及计算机仿真[J]. *光学学报*, 2004, 24(8): 1009-1014.
- [20] Zheng B, Lu P F, Chen Y H, *et al.* Co-phase error detection of segmented mirrors [J]. *Acta Optica Sinica*, 2017, 37(11): 1112002.
郑彬, 陆培芬, 陈永和, 等. 拼接式反射镜共相误差检测[J]. *光学学报*, 2017, 37(11): 1112002.
- [21] Zhang J K, Zhang J X, Lin X D, *et al.* Experimental study on segmented mirrors for piston detection using phase diversity[J]. *Laser & Infrared*, 2010, 40(12): 1364-1368.
张金凯, 张景旭, 林旭东, 等. 相位差法用于拼接镜 piston 相位检测的实验研究[J]. *激光与红外*, 2010, 40(12): 1364-1368.
- [22] Song H L, Xian H, Jiang W H, *et al.* Application of an interferometric system as phasing the segmented primary mirrors of the high-aperture telescope [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2007, 36(S1): 228-231.
宋贺伦, 鲜浩, 姜文汉, 等. 干涉系统在拼接主镜共相位检测上的应用[J]. *红外与激光工程*, 2007, 36(S1): 228-231.