

带方差补偿的多向仿射变换点云配准算法

王畅¹, 舒勤^{1*}, 杨赞秀², 邓世杰²

¹四川大学电气信息学院, 四川 成都 610065;

²西南技术物理研究所, 四川 成都 610041

摘要 结合点云统计学特性和形状特征,提出了带方差补偿的多向仿射变换点云配准算法,将求解放缩因子问题转化为求解带方差的超定非线性方程组,并通过二次曲面拟合对噪声方差进行最小二乘无偏估计。引入点云全局向量特征相似度,以相似度最大化求真解。将多向仿射变换点云配准转化为刚性配准,并利用主方向法配准点云。仿真结果表明,针对点云随机丢失和带噪声的点云配准情况,所提算法比现有配准算法的配准精度更高,并且配准耗时更短。

关键词 机器视觉; 点云配准; Newton 迭代法; 相似度; 最小二乘法; 二次曲面

中图分类号 TP391.9

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201939.0215002

Point Cloud Registration in Multidirectional Affine Transformation with Variance Compensation

Wang Chang¹, Shu Qin^{1*}, Yang Yunxiu², Deng Shijie²

¹College of Electrical Engineering and Information Technology, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610065, China;

²Southwest Institute of Technical Physics, Chengdu, Sichuan 610041, China

Abstract An algorithm for point cloud registration in multidirectional affine transformation with variance compensation is proposed based on the statistical characteristics and shape features of point clouds, in which the problem for solving the unknown scaling factors is transformed into the problem for solving matrix eigenvalues by the overdetermined nonlinear equations, and the least square method is used for the unbiased estimation of noise variance by the quadric surface fitting. The similarity of the global vector features of point clouds is introduced, and the true value of the scaling factor is calculated by maximizing the similarity. The point cloud registration in multidirectional affine transformation is transformed into the rigid registration, and then the point cloud is registered with the main direction method. The simulation results show that the proposed algorithm has higher accuracy and smaller time consumption compared with the other existing registration algorithms when the point cloud is randomly lost or registered with noise.

Key words machine vision; point cloud registration; Newton iterative method; similarity; least square method; quadric surface

OCIS codes 150.6910; 110.6880; 110.3010

1 引 言

目前,点云的配准算法主要包括全局配准算法^[1-4]和局部配准算法^[5-7],其中全局配准算法中的基于相似变换的配准^[8-10]是一类研究较多的算法。在相似变换下,配准算法通常是在全局配准的基础上引入一个统一的放缩因子。然而,由于三维激光

扫描仪与物体之间的扫描角度和距离差异、被扫描的不同型号的物体具有相同形状(如手机标准版与plus版)等原因,点云可能在不同的方向上具有不同的放缩因子。如果在这个基础上还存在噪声干扰和点云数据的缺失,那么这个问题将会变得更加复杂。在点云自动配准算法领域,Besl等^[1]提出了最近点迭代(ICP)算法,这是一种广泛应用于配准的

收稿日期: 2018-06-25; 修回日期: 2018-07-28; 录用日期: 2018-09-29

基金项目: 四川省重点研发项目(2018GZ0226)

* E-mail: shuqin@scu.edu.cn

经典算法。但经典 ICP 算法一般不能直接用于放缩因子不同的两个点云之间的配准^[8]。

Ying 等^[8]提出了尺度最近点迭代 (Scale-ICP) 算法,该算法引入一个统一的放缩因子,因此可在 7 维非线性空间中配准不同尺度大小的点云。此外,Scale-ICP 算法在实验中展现出较快的收敛速度。但是,该算法仅能应用于点云整体存在相似变换的情况。Makovetskii 等^[9]提出了基于点到面方法的多向仿射配准算法,该算法虽然能够配准多个方向存在仿射变换的点云,但是算法本身依赖于内积运算。一般而言,点云与点云之间不是一一对应的关系,因此该方法难以完成点云实际配准。Kannala 等^[11]提出了一种多向配准算法,但是该算法仅应用于二维图像的配准。Du 等^[12]提出了使用 ICP 和独立成分分析 (ICA) 的点集仿射配准算法,但是 ICA 算法本身需要点云的完整性。对于数据存在随机缺失的点云,分离矩阵可能发生较大的改变,并且分离矩阵存在相位模糊性,因此该算法很难应用于实际。

一些学者已经通过几何属性和统计不变特性改进 ICP 算法,以实现更复杂的配准功能。一类通过计算点云局部协方差来估算曲率^[3,7,13-14]的配准算法被提出,该类算法可以完成局部重叠点云的配准。同时,根据 K-邻域法向量和点云正则向量的不变夹角^[15-17],也可以较好地实现点云的配准。相似地,Cheng 等^[18]提出了结合线段和角点的配准算法。Sharp 等^[15]提出了利用不变特性的最近点迭代 (ICP-IF) 算法,该算法利用不变特性来改进 ICP 算法。Bea 等^[17]提出了 GP-ICP (Geometric Primitive ICP) 算法,利用法向量的变化率和点云曲率信息提升 ICP 算法的收敛能力。周文振等^[19]提出了一种聚类改进的配准算法,基于点云几何分布特性,仅用单一传感器即可完成较好的配准。Yang 等^[20]根据点云配准过程中的几何变换特性,将配准过程转变为 SE(3) 群的优化问题,利用分支限界 (BnB) 方法搜索,利用 ICP 算法交替迭代和优化,从而实现点云全局最优配准。然而,该算法的旋转矩阵限定于 SO(3) 空间,进一步拓展其尺度配准特性仍具有重要的研究价值。值得注意的是,当点云相对于标准点云存在多向仿射变换时,其几何特性和统计学特性将会发生很大的改变。因此,这些算法很难直接用于多向仿射变换后的点云配准。

此外,一些概率类配准算法^[21-22]也被提出。随着这些方法的发展,如何配准点云的问题已经转变

为概率的估计问题^[23-25]。其中,Myronenko 等^[26]提出了相干点漂移 (CPD) 算法,它是一种基于高斯混合模型 (GMM) 和变分理论的新算法,该算法能够完成刚性和非刚性两类点云的配准。Jian 等^[27]将点云配准问题转化为两个 GMM 的拟合问题,同时也可以有效地完成点云配准。Ma 等^[28]提出了基于流形正则化的点云稳健匹配算法 (MR-RPM),该方法利用流形正则化与基于高斯分布噪声特性的稳健变换估计,恢复点云间的变换与对应关系,以及识别外点和获取点云本质几何特性,能够很好地实现点云间的非刚性配准;但利用该算法估计稳健变换的前提是点云每个维度受高斯噪声的方差一致,而在点云存在多向仿射变换时,其方差很难一致。

值得注意的是,文献[8-9,12,26,28]中的算法虽然能够完成不同尺度的点云配准,但当点云存在多向仿射变换且伴随着噪声干扰时,这些算法均不适用。对于点云几何属性和统计特征发生很大变化的情况,很多概率统计类和几何特征类的配准算法失效。因此,本文研究了点云在多向仿射变换后的配准方法,并提出了这类点云在干扰和存在数据随机缺失情况下的配准算法。

2 问题描述

2.1 基本配准

记目标点云 Ω 为点集 $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, 源点云 Γ 为点集 $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$, 其元素均属于 \mathbb{R}^3 。同时,假设 Ω 与 Γ 之间存在一一映射关系,定义一个可逆算子 $\mathbf{T} \cdot$ 为

$$\mathbf{T} \cdot \triangleq \mathbf{R} \cdot + \mathbf{p}_0, \quad (1)$$

式中: \triangleq 表示数学中的定义符号; $\mathbf{R} \cdot$ 表示矩阵算子,表示一种正交变换,因此后续延用 \mathbf{R} 表示正交矩阵, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$; $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$; 算子 $\mathbf{T} \cdot$ 实质上就是对点云的一种变换算子,包含旋转、平移和对称等变换。对于 Ω 与 Γ 中的对应点,满足

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{T}(\mathbf{p}_k). \quad (2)$$

实际上,算子 $\mathbf{T} \cdot$ 是未知的,那么估计算子 $\mathbf{T} \cdot$ 就成为点云配准的基本问题,不少学者利用代价函数描述该问题,定义代价函数为

$$J(\mathbf{T}) = \sum_{k=1}^l \|\mathbf{T}\mathbf{p}_k - \mathbf{q}_k\|^2, \quad (3)$$

式中: $\|\cdot\|$ 表示 2-范数; l 为点云中点的数目。进一步地,算子 $\mathbf{T} \cdot$ 的估计值可表示为

$$\hat{\mathbf{T}} \cdot = \underset{\mathbf{T}}{\operatorname{argmin}} J(\mathbf{T} \cdot). \quad (4)$$

但是,建立(4)式这样的代价函数比较困难。事实上,两个点云的数目和顺序是可能不一致的,那么算子 T 无法通过最小化代价函数 J 直接计算得到。

2.2 仿射配准问题

在实际过程中,点云可能存在一定程度的放缩,并且这种放缩因子可能并不是单一的。这里不妨假设在各个坐标方向具有不同的放缩因子。设原点云 A 在 x, y, z 方向上有不同的放缩因子,分别为非负数 ρ_x, ρ_y, ρ_z ,那么此时的点云变换算子变为

$$T \cdot \triangleq RS \cdot + p_0, \quad (5)$$

式中 S 为尺度变换矩阵, R 与 S 一起构成了线性变换算子,可表示为

$$S = \begin{pmatrix} \rho_x & & \\ & \rho_y & \\ & & \rho_z \end{pmatrix}. \quad (6)$$

对于这种情况的点云,通常(2)式所表述的点云刚性配准模型不适合描述当前目标点云和源点云之间的关系。这里不妨设目标点云矩阵 $A = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_l]$, 源点云矩阵 $B = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_l]$, 则

$$B = RSA + p_0 I_l, \quad (7)$$

式中: $I_l \in \mathbb{R}^{l \times 1}$, 其元素全为 1。

源点云矩阵减去点云的平均位置坐标,可保证点云的中心在坐标的原点处,即

$$B - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q_k \right) I_l = RSA + p_0 - \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (RS p_k + p_0) \right] I_l, \quad (8)$$

化简可得

$$B - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q_k \right) I_l = RS \left[A - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_k \right) I_l \right]. \quad (9)$$

记减去平均位置坐标的点云矩阵 \tilde{A} 和矩阵 \tilde{B} 分别为

$$\begin{cases} \tilde{B} = B - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q_k \right) I_l \\ \tilde{A} = A - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_k \right) I_l \end{cases}. \quad (10)$$

考虑源点云中可能带有方差 σ^2 的 Gauss 白噪声 ε , 那么

$$\tilde{B} = RS\tilde{A} + \varepsilon. \quad (11)$$

进一步地,如果考虑点云点数可能不一致和排列顺序混乱的情况,对矩阵求协方差矩阵:

$$\frac{\tilde{B}\tilde{B}^T}{m} = \frac{RS\tilde{A}\tilde{A}^T S^T R^T}{n} + \sigma^2 I, \quad (12)$$

式中: n 表示点云 A 中的点数; m 表示点云 B 中的点数; $I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 表示单位矩阵。根据正交对角化:

$$Q_B (\Lambda_B - \sigma^2 I) Q_B^T = RSQ_A \Lambda_A Q_A^T S^T R^T, \quad (13)$$

式中: Q_A, Q_B 分别为两个正交矩阵; Λ_A, Λ_B 分别为两个对角矩阵。 $\tilde{B}\tilde{B}^T$ 和 $\tilde{A}\tilde{A}^T$ 为对称正定矩阵, 那么

$$Q_B (\Lambda_B - \sigma^2 I)^{\frac{1}{2}} (\Lambda_B - \sigma^2 I)^{\frac{1}{2}} Q_B^T = RSQ_A \Lambda_A^{\frac{1}{2}} \Lambda_A^{\frac{1}{2}} Q_A^T S^T R^T. \quad (14)$$

对矩阵进行分解,分解存在不唯一性。这里引入一个正交矩阵 E , 那么

$$Q_B (\Lambda_B - \sigma^2 I)^{\frac{1}{2}} = RSQ_A \Lambda_A^{\frac{1}{2}} E. \quad (15)$$

进一步地,

$$\Lambda_B - \sigma^2 I = E^T \Lambda_A^{\frac{1}{2}} Q_A^T S^2 Q_A \Lambda_A^{\frac{1}{2}} E. \quad (16)$$

不妨令 $M = E (\Lambda_B - \sigma^2 I) E^T$, 那么

$$M = \Lambda_A^{\frac{1}{2}} Q_A^T S^2 Q_A \Lambda_A^{\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

显而易见, M 的特征值即为 Λ_B 的对角线元素。记其对角线元素分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 并且设对角矩阵 S^2 的对角线元素分别为 μ_1, μ_2, μ_3 , 那么根据矩阵特征值的定义可以得到

$$\left| \Lambda_A^{\frac{1}{2}} Q_A^T \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \mu_2 & \\ & & \mu_3 \end{pmatrix} Q_A \Lambda_A^{\frac{1}{2}} - (\lambda_i - \sigma^2) I \right| = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (18)$$

进一步有

$$\left| \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \mu_2 & \\ & & \mu_3 \end{pmatrix} - (\lambda_i - \sigma^2) Q_A \Lambda_A^{-1} Q_A^T \right| = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (19)$$

显然这是一个关于 μ_1, μ_2, μ_3 的三元三次方程组,根据代数方程理论,该方程具有多解。值得注意的是,对于 $\tilde{B} = RS\tilde{A}$ 可以得到 F-范数等式:

$$\frac{\|\tilde{B}\|_F}{m} - 3\sigma^2 = \frac{\|\tilde{S}\tilde{A}\|_F}{n}. \quad (20)$$

那么,方程组[(19)式]将变为超定非线性方程组:

$$\begin{cases} \left| \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \mu_2 & \\ & & \mu_3 \end{pmatrix} - \lambda_i Q_A \Lambda_A^{-1} Q_A^T \right| = 0, i = 1, 2, 3 \\ \frac{\|\tilde{B}\|_F}{m} - \frac{\|\tilde{S}\tilde{A}\|_F}{n} - 3\sigma^2 = 0 \end{cases}, \quad (21)$$

进一步地,可以得到方程组:

$$\left| \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} - \lambda_i \mathbf{Q}_A \mathbf{A}_A^{-1} \mathbf{Q}_A^T \right| + \alpha \left(\frac{\|\tilde{\mathbf{B}}\|_F}{m} - \frac{\|\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{A}\|_F}{n} - 3\sigma^2 \right)^2 = 0, \alpha > 0, i = 1, 2, 3. \quad (22)$$

显然,超定方程的解包含于该方程组的解集中。虽然利用约束项可以减少多解的情况,但多解问题依然存在。想要克服多解问题,必须增加更多的约束条件。

2.3 噪声方差的确定

扫描的点云可能存在噪声,为了能恰当地估算出噪声,这里采用局部二次曲面拟合来进行估算。类似地,Li等^[29]也验证了二次曲面可以用于三维点云平滑。考虑扫描的点云本身应为较光滑的或分区域光滑曲面的采样点,其二次曲面可以描述为

$$z = f(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2, \quad (23)$$

式中 $a_i (i=0, 1, 2, 3, 4, 5)$ 为系数。选择点云上的 L 块小区域,并将每个小区域以二次曲面进行最小二乘拟合。不妨假设第 j 个小区域的点云集合为 Ω_j ,并且其中有 m_j 个点,则

$$z_{jk} = a_0 + a_1x_{jk} + a_2y_{jk} + a_3x_{jk}^2 + a_4x_{jk}y_{jk} + a_5y_{jk}^2, \quad (24)$$

式中: $(x_{jk}, y_{jk}, z_{jk}) \in \Omega_j, k=1, 2, \dots, m_j$ 。那么,可以将(24)式改写为矩阵形式:

$$\mathbf{M}_j \boldsymbol{\beta}_j = \mathbf{z}_j, \quad (25)$$

式中: j 表示区域编号; \mathbf{M}_j 表示第 j 个区域中对应(24)式的 x, y 构成的数据矩阵; $\boldsymbol{\beta}_j$ 表示第 j 个区域中的系数构成的向量 $(a_0, a_1, \dots, a_5)^T$ 。通过最小二乘法,可以得到局部区域噪声方差的无偏估计为

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{\|\mathbf{z}_j - \mathbf{M}_j(\mathbf{M}_j^T \mathbf{M}_j)^{-1} \mathbf{M}_j^T \mathbf{z}_j\|^2}{m_j - 1}. \quad (26)$$

点云表面可能存在少量曲率较大或者表面比较复杂的邻域,因此二次曲面拟合后误差较大。这里可以通过K-means聚类分析,以分类最多最集中的类的中心值为估计到的混入的白噪声的方差,记为

$$\hat{\sigma}^2 = E_{j \in C_m} (\hat{\sigma}_j^2), \quad (27)$$

式中: C_m 表示对 $\hat{\sigma}_j^2$ 聚类后最集中且数目最多的一类; E 表示求期望运算。

3 配准算法

3.1 结构相似度量

第2.1节主要研究了点云自身的统计学特性。

但是,仅利用点云的统计学特性得到的(22)式仍然可能是一个多解的方程。因此,本节引入对点云的结构特性的描述,以确保(22)式解的唯一性以及点对点云描述的准确性。这里根据王畅等^[30]定义的全局结构特征,引入一个连续有界的非线性实函数簇:

$$G \triangleq \{g_1, g_2, \dots\}. \quad (28)$$

如果 $\forall g \in G$,那么必然满足

$$0 < M_1 \leq |g| \leq M_2, \quad (29)$$

式中: M_1 表示 $|g|$ 的下界; M_2 表示 $|g|$ 的上界。进一步地,定义点云 Ω 与 Γ 的全局向量特征分别为

$$\begin{cases} \mathbf{c}_\Omega^j = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g_j(\|\tilde{\mathbf{p}}_k\|) \tilde{\mathbf{p}}_k \\ \mathbf{c}_\Gamma^j = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g_j(\|\tilde{\mathbf{q}}_k\|) \tilde{\mathbf{q}}_k \end{cases}, \quad (30)$$

式中: $\tilde{\mathbf{p}}_k$ 和 $\tilde{\mathbf{q}}_k$ 分别表示 $\tilde{\mathbf{A}}$ 和 $\tilde{\mathbf{B}}$ 中的第 k 列向量; \mathbf{c}_Ω^j 和 \mathbf{c}_Γ^j 分别表示 $\tilde{\mathbf{A}}$ 和 $\tilde{\mathbf{B}}$ 的第 j 个全局向量特征; g_j 表示函数簇 g 中的第 j 个函数。定义两个点云的特征矩阵分别为

$$\begin{cases} \mathbf{A}_e = (\mathbf{c}_\Omega^1, \mathbf{c}_\Omega^2, \dots, \mathbf{c}_\Omega^K) \\ \mathbf{B}_e = (\mathbf{c}_\Gamma^1, \mathbf{c}_\Gamma^2, \dots, \mathbf{c}_\Gamma^K) \end{cases}, \quad (31)$$

式中: $K > 2$; $\mathbf{A}_e, \mathbf{B}_e$ 分别表示 $\tilde{\mathbf{A}}$ 和 $\tilde{\mathbf{B}}$ 的特征矩阵。全局向量特征空间描述如图1所示。

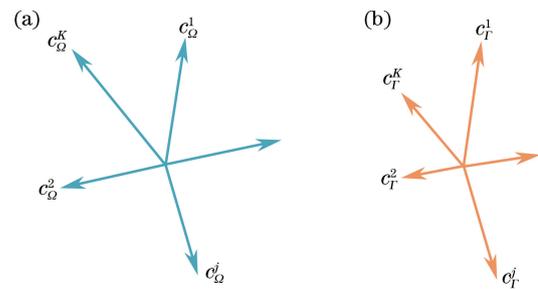


图1 全局向量特征。(a) Ω 中的;(b) Γ 中的
Fig. 1 Global vector features. (a) In Ω ; (b) in Γ

值得注意的是,如果不存在仿射变换,则有

$$\mathbf{R} \mathbf{A}_e = \mathbf{B}_e. \quad (32)$$

采用最小二乘法可以得到 \mathbf{R} 的估算值,即

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{B}_e \mathbf{A}_e^T (\mathbf{A}_e \mathbf{A}_e^T)^{-1}. \quad (33)$$

全局向量特征是利用非线性函数加权求得,如果点云存在线性仿射变换,图1中的全局特征向量

会产生畸变, \mathbf{R} 的估计值将不再是一个正交矩阵。这里通过定义相似度量关系以描述 \mathbf{R} 的估计值接近正交矩阵的程度, 同时也刻画了图 1 中两个机构的几何相似程度。由于正交矩阵的奇异值均为 1, 这里通过矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$ 的奇异值和向量 $(1, 1, 1)^\top$ 的归一化余弦相似度来定义图 1 中两个点云的全局向量特征的相似度:

$$\gamma_{\text{sim}} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \left[\frac{\sum_i^3 \sigma_i^2(\hat{\mathbf{R}})}{\sqrt{\sum_i^3 \sigma_i^2(\hat{\mathbf{R}})}} - 1 \right], \quad (34)$$

式中: $\sigma_i(\hat{\mathbf{R}})$ 表示 $\hat{\mathbf{R}}$ 的第 i 个奇异值。显然, $\gamma_{\text{sim}} \in (0, 1]$ 。 γ_{sim} 接近于 0 表示两个点云特征向量相似性小, $\gamma_{\text{sim}} = 1$ 表示两个点云完全相似或相同。

当点云中数据点存在随机丢失时, 不妨设丢失概率为 p 。这里等价地描述为: 存在随机变量 ϵ_k 服从 0-1 分布, 且满足

$$\begin{cases} P(\epsilon_k = 0) = p \\ P(\epsilon_k = 1) = 1 - p \end{cases} \quad (35)$$

对于点云存在随机丢失的情况, Γ 点云的全局

特征向量可以描述为

$$\mathbf{c}_n^j = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \epsilon_k} \sum_{k=1}^n g_j(\|\tilde{\mathbf{q}}_k\|) \epsilon_k \tilde{\mathbf{q}}_k, \quad (36)$$

式中: \mathbf{c}_n^j 表示用 g_j 计算出的第 j 个全局特征向量, 其期望为

$$\bar{\mathbf{c}}_n^j = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g_j(\|\tilde{\mathbf{q}}_k\|) \tilde{\mathbf{q}}_k, \quad (37)$$

此时, $\hat{\mathbf{R}}$ 仍然接近正交矩阵, 其奇异值接近 1, 因此两个点云的全局向量特征的相似度近似为 1。这说明点云存在随机丢失时, 点云之间的相似度几乎不会改变。

3.2 利用全局向量特征相似度的配准算法

两个待配准的点云在结构上应该具备很大的相似度。然而, 如果在配准过程中存在仿射变换, 并且未能在(22)式中较准确地得出其解, 则将导致对点云形状的错误配准, 此时两个点云之间的全局向量特征的相似度比较小。因此, 在(22)式中必然有一个真解使得两个点云的全局向量特征的相似度最大。那么, 这里取点云配准[(22)式]的解中 γ_{sim} 最大的解来估算仿射因子的值, 即

$$\begin{cases} \left| \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} - \lambda_i \mathbf{Q}_A \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q}_A^\top \right| + \alpha \left(\frac{\|\tilde{\mathbf{B}}\|_F}{m} - \frac{\|\tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{A}}\|_F}{n} - 3\hat{\sigma}^2 \right)^2 = 0, \alpha > 0, i = 1, 2, 3 \\ (\hat{\rho}_x, \hat{\rho}_y, \hat{\rho}_z) = \underset{(\sqrt{\mu_1}, \sqrt{\mu_2}, \sqrt{\mu_3})}{\text{argmax}} (\gamma_{\text{sim}}) \end{cases}, \quad (38)$$

式中: α 表示 Lagrange 乘子; argmax 表示求取最大值点; $(\hat{\rho}_x, \hat{\rho}_y, \hat{\rho}_z)$ 表示 γ_{sim} 取最大时 $(\sqrt{\mu_1}, \sqrt{\mu_2}, \sqrt{\mu_3})$ 的取值。方程组本身为非线性方程组, 故采用 Newton 迭代法求解方程。为了便于讨论, 这里将非线性(22)式简化为

$$f_i(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = 0, i = 1, 2, 3. \quad (39)$$

考虑到求解的复杂性, 这里用数值微分代替偏微分, 得到 Jacobi 矩阵为

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\Delta\mu} \begin{pmatrix} \Delta_{\mu_1} f_1 & \Delta_{\mu_2} f_1 & \Delta_{\mu_3} f_1 \\ \Delta_{\mu_1} f_2 & \Delta_{\mu_2} f_2 & \Delta_{\mu_3} f_2 \\ \Delta_{\mu_1} f_3 & \Delta_{\mu_2} f_3 & \Delta_{\mu_3} f_3 \end{pmatrix}, \quad (40)$$

式中: Δ_{μ_k} 表示对变量 μ_k 的 Newton 差分算符; $\Delta\mu$ 代表很小的变量步长。利用 Newton 迭代法可得到非线性方程组求解的迭代格式为

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n - \mathbf{J}_n^{-1} \mathbf{F}_n \\ \mathbf{U}_n = [\mu_1(n) \ \mu_2(n) \ \mu_3(n)]^\top, \\ \mathbf{F}_n = [f_1(n) \ f_2(n) \ f_3(n)]^\top \end{cases}, \quad (41)$$

这里 \mathbf{U}_0 取随机向量值作为初始值进行迭代。

如果迭代变化率 $\|\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n\| = \|\mathbf{J}_n^{-1} \mathbf{F}_n\| < \epsilon$ 时, 终止迭代过程。此时, 可以计算出放缩矩阵的估算值为

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1} & & \\ & \sqrt{\mu_2} & \\ & & \sqrt{\mu_3} \end{pmatrix}. \quad (42)$$

通过(29)式计算得到矩阵 $\hat{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{A}}$ 与矩阵 $\tilde{\mathbf{B}}$ 的全局向量特征的相似度为 γ_{sim} , 并认为 $\gamma_{\text{sim}} > \gamma_{\text{th}}$ 或者多次迭代中 γ_{sim} 取得最大值时对应的解 (μ_1, μ_2, μ_3) 为真解。那么, 这里可以得到的针对多向仿射的点云配准算法(MARVC)的流程如下:

1) 输入两个点云 Ω 和 Γ 。

2) 根据(10)式预处理点云,并设最大迭代次数为 N_{\max} ($N_{\max} = 1000 \sim 2500$), $R_{\text{iter}} = 1, L = 10, \gamma_{\text{th}} = 0.6 \sim 0.95, \epsilon < 10^{-3}$ 。

3) 随机选 L 个点云局部小区域,通过(27)式估算点云的噪声方差。

4) 随机生成 (μ_1, μ_2, μ_3) 初始值:(1)用(41)式迭代更新;(2)当 $\|J_n^{-1}F_n\| \geq \epsilon$ 时,终止迭代, $R_{\text{iter}} = R_{\text{iter}} + 1$;

5) 根据(29)式计算点云矩阵 $\hat{S}\tilde{A}$ 与 \tilde{B} 的全局向量特征的相似度 γ_{sim} :(1)如果 $\gamma_{\text{sim}} > \gamma_0$,那么 $\gamma_0 = \gamma_{\text{sim}}$,存储当前方程组的解 (μ_1, μ_2, μ_3) ;(2)当 $\gamma_{\text{sim}} > \gamma_{\text{th}}$ 或者 $R_{\text{iter}} > N_{\max}$ 时,转到步骤 6),否则运行步骤 4)。

6) 计算点云 $\hat{S}\tilde{A}$ 与 \tilde{B} 的最大方向向量 V_a 和 V_b 。矩阵 $\hat{S}\tilde{A}(\hat{S}\tilde{A})^T$ 和 $\tilde{B}\tilde{B}^T$ 的两个最大特征值对应特征向量 α_1, α_2 和 β_1, β_2 ,调整其特征向量的方向为 $\tilde{\alpha}_1 = \text{sgn}(\alpha_1^T V_a)\alpha_1, \tilde{\alpha}_2 = \text{sgn}(\alpha_2^T V_a)\alpha_2, \tilde{\beta}_1 = \text{sgn}(\beta_1^T V_b)\beta_1, \tilde{\beta}_2 = \text{sgn}(\beta_2^T V_b)\beta_2$,其中 sgn 表示符号函数。

7) 求第三个向量方向 $\tilde{\alpha}_3 = \tilde{\alpha}_1 \times \tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta}_3 = \tilde{\beta}_1 \times \tilde{\beta}_2$,算出旋转矩阵 $R = (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3)(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3)^{-1}$ 。

8) 计算配准后的点云 $B_R = \hat{S}^{-1}R^{-1}B + \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q_k\right)I_m$,其中 m 表示 B 中的点数, I_m 表示 1 行 m 列元素全为 1 的矩阵。

4 仿真数据分析

为验证算法的可行性与有效性,这里采用 Intel Core i5 2.5 GHz CPU, 8 GB 内存的计算机在 Matlab 2016a 环境下进行仿真验证。为说明 MARVC 算法的普适性,本节采用斯坦福大学提供的 Bunny 和 Horse 两组点云进行仿真分析。

4.1 相似变换情况下的点云配准

这里给出的点云数据是一一对应的,并且在点云中不存在放缩变换的理想情况。在点云的理想情况下,通过同一点云进行随机旋转和平移变换得到不同点云。点云的初始状态如图 2 所示。

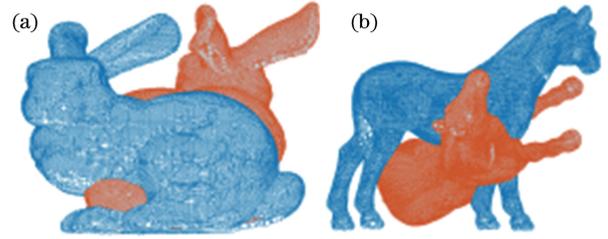


图 2 点云初始状态图。(a) Bunny;(b) Horse
Fig. 2 Initial states of point clouds. (a) Bunny; (b) Horse

这里考虑在理想情况的基础上,点云存在相似变换的情况。此时,分别将文献[4]中的算法、ICP 算法、Scale-ICP 算法以及 CPD 算法与所提 MARVC 算法进行对比分析。仿真中设 Bunny 点云和 Horse 点云的放缩矩阵 $S = sI, I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, s \in \mathbb{R}^+$ 。那么, $s = 2$ 时,相似变换情况下各算法的配准情况如图 3 所示。

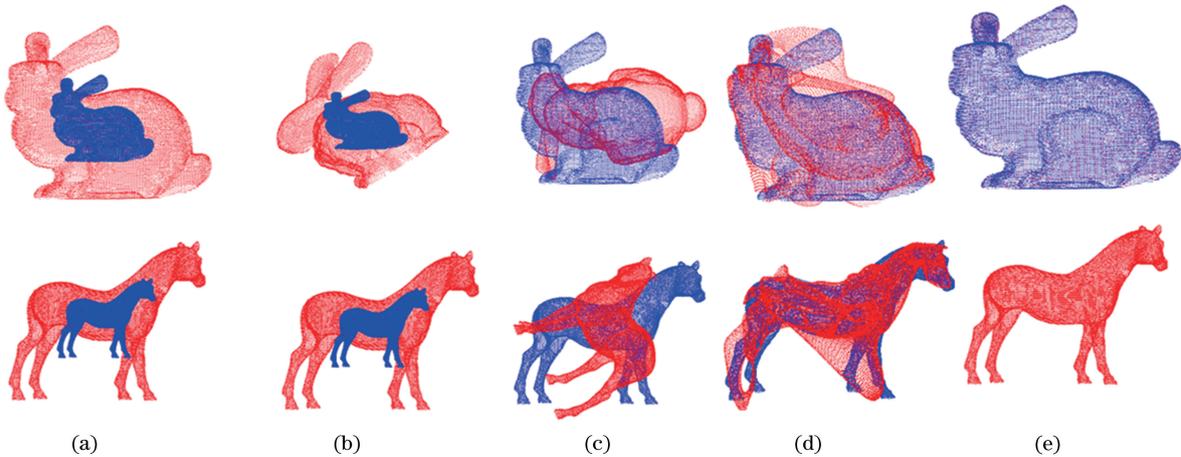


图 3 相似变换后不同算法对点云的配准效果。(a)文献[4]的算法;(b) ICP; (c) Scale-ICP; (d) CPD; (e) MARVC
Fig. 3 Registration effects of point clouds after similarity transformation by different algorithms. (a) Algorithm in Ref. [4]; (b) ICP; (c) Scale-ICP; (d) CPD; (e) MARVC

$s = 1.5, 2, 3$ 的情况下几种算法对点云 Bunny 和 Horse 的配准结果如表 1 所示。

表 1 各算法的 RMSE

Table 1 RMSE for different algorithms

mm

Point cloud	s	Algorithm in Ref. [4]	ICP	Scale-ICP	CPD	MARVC
Bunny	1.5	1.8562	1.8216	0.7687	0.3727	5.6550×10^{-4}
	2	3.2229	3.1774	0.0013	0.2641	3.6760×10^{-4}
	3	6.7786	6.7907	2.1157	0.3519	3.1740×10^{-4}
Horse	1.5	12.3420	13.0710	7.0815	2.2140	7.9900×10^{-4}
	2	29.2730	37.7740	5.1928	3.1270	8.0440×10^{-4}
	3	63.0870	62.2310	6.4387	3.0251	2.2180×10^{-3}

表 2 各算法配准时间

Table 2 Registration time for different algorithms

s

Point cloud	s	Algorithm in Ref. [4]	ICP	Scale-ICP	CPD	MARVC
Bunny	1.5	6.2565	649.6780	8.1354	988.3850	2.7407
	2	5.9417	351.4250	21.6884	952.2650	4.1969
	3	6.5417	257.1220	8.4478	986.4610	3.5356
Horse	1.5	7.1232	296.7850	9.1698	2146.4000	4.6706
	2	6.8912	499.6830	24.2360	2241.3700	0.4924
	3	7.2567	423.3320	14.3790	2549.5600	1.3736

从图 3 中不难发现,文献[4]中的算法和 ICP 算法无法很好地配准点云;CPD 算法的配准过程中总是存在不可避免的形状畸形;Scale-ICP 算法本是适用于相似变换情况下的配准问题,但是通过大量仿真发现 Scale-ICP 算法总是很难有效地完成配准,若仿真过程中 $s=1$,配准能达到比较好的效果。从表 1 可以看出,所提算法适用于相似变换情况下的配准问题,且具有较高的配准精度。Scale-ICP 算法偶尔也能完成配准,如当 $s=2$ 时点云 Bunny 的配准效果较好,但是大多数情况下的配准效果是不理想的。初始位置对 CPD 算法的配准性能的影响很大,主要体现在该算法可能产生点云形状畸形。通过表 2 不难发现,相比于其他配准算法,所提算法拥有最高的配准效率,虽然其余算法的配准效率较高,但配准精度却比较低。

4.2 仿射变换情况下的配准

理想情况下,点云在原坐标方向上存在不同的放缩比例。仿真中设 Bunny 点云和 Horse 点云的放缩矩阵分别为

$$\mathbf{S}_{\text{Bunny}} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{S}_{\text{Horse}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}, \quad (43)$$

那么,可以经过随机平移和旋转得到两组点云。

同样地,将文献[4]中的算法、ICP 算法、Scale-ICP 算法、CPD 算法与所提 MARVC 算法进行对比

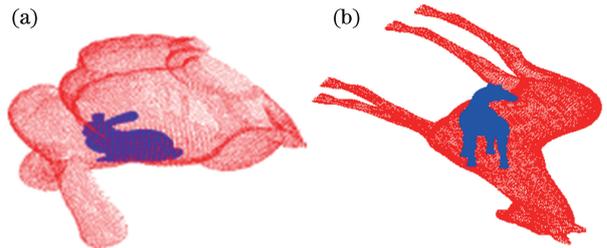


图 4 多向仿射变换后的初始状态图。

(a) Bunny; (b) Horse

Fig. 4 Initial states after multidirectional affine transformation. (a) Bunny; (b) Horse

分析。从图 4 中可以发现,从多个方向进行点云仿射变换后,点云发生了较大的形变。采用了不同的算法尝试对这种类型的点云进行配准,结果如图 5 所示。很显然,文献[4]中的算法、ICP 算法、Scale-ICP 算法并不适用于这种多向仿射变换类型的点云配准。CPD 非刚性配准算法对多向仿射变换后的 Bunny 点云有较好的配准效果,但是其点云存在较小的形状畸变。在对 Horse 点云配准过程中,点云已经产生了形状畸变。相比之下,针对此类多向仿射变换后的点云情况,所提 MARVC 算法有着很好的配准效果。

各算法配准精度和所消耗的时间分别如表 3、4 所示。

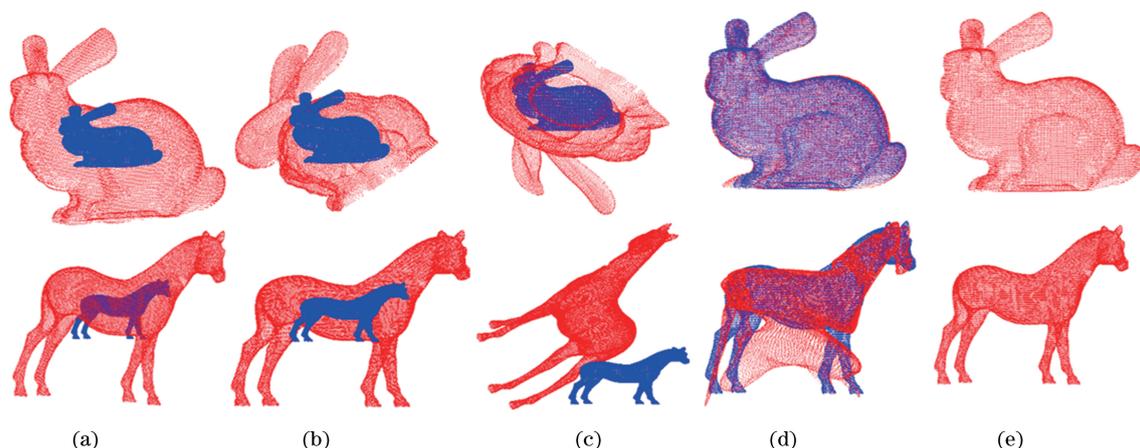


图 5 多向仿射变换后各算法的配准效果。(a)文献[4]中的算法;(b) ICP;(c) Scale-ICP;(d) CPD;(e) MARVC

Fig. 5 Registration effects for different algorithms after multidirectional affine transformation. (a) Algorithm in Ref. [4]; (b) ICP; (c) Scale-ICP; (d) CPD; (e) MARVC

表 3 各算法的 RMSE

Table 3 RMSE for different algorithms

mm

Point cloud	Algorithm in Ref. [4]	ICP	Scale-ICP	CPD	MARVC
Bunny	14.5430	9.2450	3.6550	0.1160	1.1030×10^{-3}
Horse	39.3240	38.8230	10.9120	107.4520	3.1610×10^{-3}

表 4 各算法配准时间

Table 4 Registration time for different algorithms

s

Point cloud	Algorithm in Ref. [4]	ICP	Scale-ICP	CPD	MARVC
Bunny	2.3290	1187.5130	24.3850	208.6340	2.8120
Horse	3.3590	502.6340	27.3530	434.2230	0.8770

从表 3 中可以看出,针对这类多向仿射变换的点云配准问题,所提 MARVC 算法更合适,其均方根误差(RMSE)几乎趋于 0。相比其他算法,非刚性的 CPD 算法有时也会有较好的配准效果,但不可避免地引入了点云的形状畸变。表 4 显示,在运行过程中,ICP 算法所消耗的时间最长。加入仿射因子的 Scale-ICP 算法虽然改善了 ICP 算法的收敛域范围,但是时间消耗仍然比较大。所提配准算法所消耗的时间最短,几乎在 3 s 以内可以计算出配准结果。

4.3 随机缺失数据的异放缩系数情况

为了更进一步地验证算法性能,本节在第 3.2 节的基础上对旋转平移后的点云增加 10% 的随机丢失。由于此时点云对应的顺序被打乱,文献[4]中的方法不再适用,因此这里使用 Scale-ICP 算法、CPD 算法与所提 MARVC 算法进行对比和分析。点云被随机丢失 10% 的数据点后,两个点云的配准效果如图 6 所示。

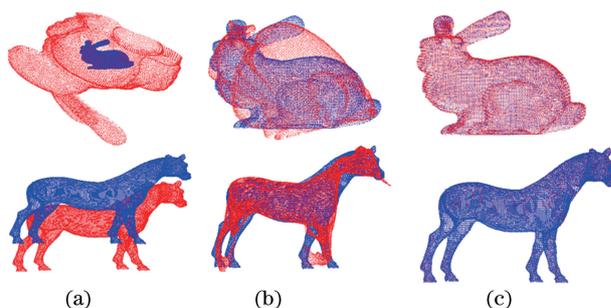


图 6 在随机丢失点云和多向仿射变换条件下,不同算法对点云的配准效果。(a) Scale-ICP;(b) CPD;(c) MARVC

Fig. 6 Registration effects of point clouds for different algorithms under random loss and multidirectional affine transformation. (a) Scale-ICP; (b) CPD; (c) MARVC

从图 6 可以发现,Scale-ICP 算法虽然引入一个仿射因子,但是在这类多向仿射变换的配准问题上并不合适;非刚性的 CPD 算法在对 Bunny 点云的配准中产生了严重的畸变,而对 Horse 点云的配准

虽然大部分重合,但是也产生了较大的形状畸变;相比之下,所提 MARVC 算法针对这类数据点随机丢失情况的点云配准问题仍然适用,且拥有较好的配准效果。

随机丢失数据点后,各个配准算法的配准精度如表 5 所示,配准时间消耗情况如表 6 所示。

表 5 随机丢失数据点后各算法的 RMSE

Table 5 RMSE for different algorithms after random loss of data points mm

Point cloud	ICP	Scale-ICP	CPD	MARVC
Bunny	8.0910	8.0910	0.3080	0.0302
Horse	38.8170	11.3050	2.1010	0.0763

表 6 随机丢失数据点后各算法配准时间

Table 6 Registration time for different algorithms after random loss of data points s

Point cloud	ICP	Scale-ICP	CPD	MARVC
Bunny	949.7260	31.7890	191.8430	1.3710
Horse	420.9660	103.7960	363.9730	3.2760

从表 5、6 可以看出:随机丢失部分数据点后,所提 MARVC 算法的配准 RMSE 会增大,但是相比于其他几种算法,其误差仍然是最小的,并且配准过程中所消耗的时间仍然是最短的。

4.4 白噪声环境下的配准

在第 3.2 节的放缩情况下,在点云中加入 20 dB 的高斯白噪声,并且让点云随机丢失 10% 的数据信息,然后对点云进行配准,配准效果如图 7 所示。为了体现所提算法的抗噪声性能,分别在点云随机丢失 10% 和 20% 的条件下讨论点云受到 15 dB、20 dB、25 dB 高斯白噪声干扰时配准所消耗的时间以及配准的 RMSE。将所提 MARVC 算法与 ICP 算法、Scale-ICP 算法和 CPD 算法进行性能对比,结果如表 7、8 所示。

为了便于研究所提 MARVC 算法的抗干扰性能,这里给出在 10% 和 20% 的随机丢失比例条件下,并带有 15、20 和 25 dB 高斯白噪声干扰的各算法性能对比仿真结果。从表 7 中不难发现,所提算法在多向仿射以及干扰环境下的配准均方根误差更小。虽然 CPD 算法配准的 RMSE 和所提算法误差相接近,但由图 7 不难发现 CPD 算法配准可能会引起点云形状的畸变。同时,从表 8 可以看出所提算法运行所消耗的时间始终低于其他三类算法,其算法效率与抗干扰性能在 Bunny 和 Horse 两组点云测试中均优于其余三类算法。

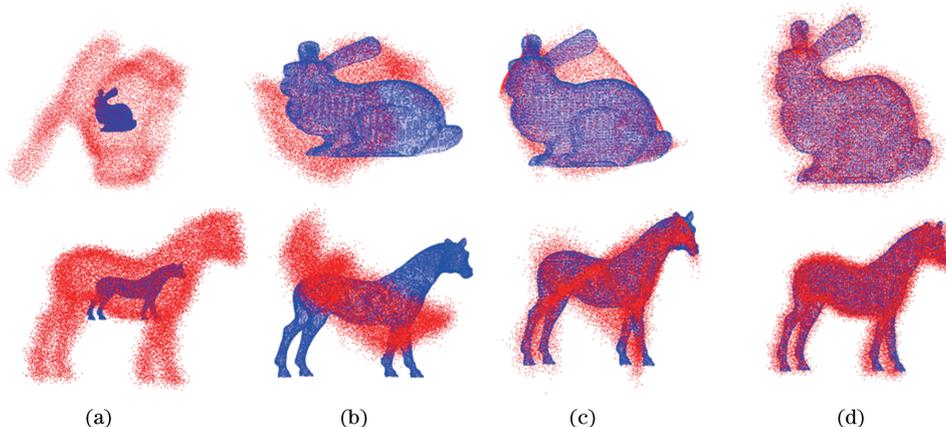


图 7 在随机丢失点云和多向仿射变换条件下,不同算法对含 20 dB 随机噪声的点云的配准效果。

(a) ICP; (b) Scale-ICP; (c) CPD; (d) MARVC

Fig. 7 Registration effects of point clouds with 20 dB random noise for different algorithms under random loss and multi-directional affine transformation. (a) ICP; (b) Scale-ICP; (c) CPD; (d) MARVC

5 实验数据分析

为验证所提算法在实际扫描数据中的有效性,在实验平台为 Intel core i5 2.5GHz CPU, 8 GB 内存的计算机下利用 Matlab 2016a 对算法进行验证。采用型号为 HANDYSCAN 300 的便携式激光扫描仪对三组物件进行两次不同的数据采集,在配套软

件 Vxelements 中导出数据。扫描仪采集的三组物体如图 8 所示。利用所提 MARVC 算法、ICP 算法、Scale-ICP 算法以及 CPD 算法进行配准后,各组扫描数据的配准结果如表 9 所示。

从图 8 可以看到扫描的物体和配准后物体的详细情况,发现所提 MARVC 算法确实能够有效地对实际扫描点云进行配准。通过表 9 中配准后的实验数

表 7 不同干扰环境下各算法的 RMSE

Table 7 RMSE for different algorithms under different interference environments

mm

Proportion of lost points		10%			20%		
Signal-to-noise ratio		15 dB	20 dB	25 dB	15 dB	20 dB	25 dB
Bunny	ICP	0.9852	0.9460	0.9371	0.9886	0.9808	1.005
	Scale-ICP	1.4010	1.5680	1.6530	1.5020	1.6020	1.6670
	CPD	0.4449	0.2958	0.3768	0.3990	0.3561	0.3141
	MARVC	0.3976	0.2366	0.1414	0.3952	0.2398	0.2104
Horse	ICP	5.5390	5.2670	5.1220	23.3880	9.7710	9.2740
	Scale-ICP	6.1890	4.8690	9.4320	18.5440	9.5680	9.1640
	CPD	5.7380	4.5980	3.2550	5.4770	3.4740	3.5850
	MARVC	4.6890	3.2150	2.1490	4.7420	2.6170	2.1290

表 8 不同干扰环境下各算法的配准时间

Table 8 Registration time for different algorithms under different interference environments

s

Proportion of lost points		10%			20%		
Signal-to-noise ratio		15 dB	20 dB	25 dB	15 dB	20 dB	25 dB
Bunny	ICP	1023.0880	918.7300	914.6390	830.3700	779.6490	846.3800
	Scale-ICP	31.0410	20.2570	17.1920	31.8360	17.3670	17.8140
	CPD	182.9190	204.9210	210.1450	170.3430	170.8650	171.7440
	MARVC	3.4680	3.3600	4.3160	4.1900	7.5390	4.8620
Horse	ICP	470.2290	428.7340	510.2460	747.7910	232.7110	412.3490
	Scale-ICP	45.0120	35.2130	84.9230	56.1270	44.2320	62.5230
	CPD	397.9310	492.1960	716.1470	405.0180	402.9340	297.3500
	MARVC	1.8410	1.7860	1.7430	1.4060	2.4450	1.5570

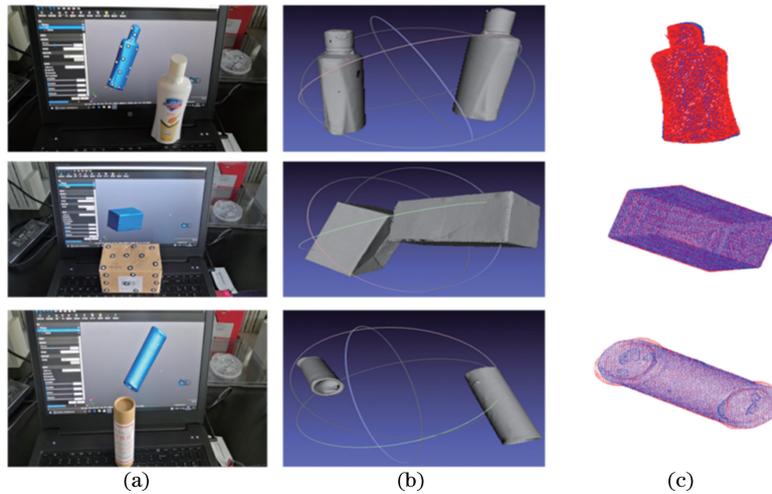


图 8 便携式激光扫描仪所扫描的实物、所采集的数据与配准效果。(a)三组物体;(b)数据;(c) MARVC 算法配准效果

Fig. 8 Actual objects scanned by portable laser scanner, obtained data, and registration effects. (a) Three groups of objects; (b) obtained data; (c) registration effects by MARVC algorithm

据可以看出,在处理实际点云时,MARVC 算法的时间效率可能有一点降低,但是仍然能够完成点云的配准。同时,MARVC 配准后的 RMSE 比较小,这间接地说明在扫描点云时,这类仿射现象是客观存在的,也说明了所提算法在实际使用场景中具备

一定的有效性。

6 结 论

对存在多向仿射变换前提下的点云进行配准研究,解决了多向仿射变换下的点云尺度配准问题。

表 9 三组物体的各算法配准结果

Table 9 Registration effects of three groups of objects for different algorithms

Object No.	Parameter	MARVC	ICP	Scale-ICP	CPD
Object 1	RMSE /mm	0.5974	2.4375	3.8148	0.7934
	Time /s	5.773	634.755	6.608	64.099
Object 2	RMSE /mm	0.5724	7.4200	7.4088	3.1088
	Time /s	4.835	446.558	4.632	47.154
Object 3	RMSE /mm	0.6431	8.9753	9.4262	0.6919
	Time /s	6.703	827.352	16.724	242.237

在点云多向仿射变换、采样率不同(随机丢失)以及附带白噪声干扰等情况下,分析了 MARVC、文献[4]所提算法、ICP 以及 Scale-ICP 等算法的点云配准性能。实验结果表明,相比其他配准算法, MARVC 算法针对此类配准问题不仅能够成功地完成配准,并且还拥有较小的配准 RMSE 和更少的配准时间消耗。从数学理论上论述了点云随机丢失时所提算法的适用性,说明 MARVC 算法也可以将 ICP 和诸多改进的 ICP 配准算法拓展至多向仿射点云的配准中,在配准不同型号、不同尺寸等常见的物体上具有重要应用价值。

所提 MARVC 算法适用于采集比较完整且较均匀的扫描点云,具备一定的抗干扰能力。针对点云仅存在部分重叠的局部配准,仍具有一定的研究意义。算法中利用 Newton 迭代容易使得算法收敛到非真解的位置,后续的研究将会缩小此类非真解位置的吸引子的作用域,以提升算法的稳定性和精度。

参 考 文 献

- [1] Besl P J, McKay N D. A method for registration of 3D shapes [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1992, 14(2): 239-256.
- [2] Ge X M. Automatic markerless registration of point clouds with semantic-keypoint-based 4-points congruent sets [J]. ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing, 2017, 130: 344-357.
- [3] Bueno M, González-Jorge H, Martínez-Sánchez J, *et al.* Automatic point cloud coarse registration using geometric keypoint descriptors for indoor scenes[J]. Automation in Construction, 2017, 81: 134-148.
- [4] Ji S J, Ren Y C, Ji Z, *et al.* An improved method for registration of point cloud[J]. Optik-International Journal for Light and Electron Optics, 2017, 140: 451-458.
- [5] Huang X S, Zhang J, Fan L X, *et al.* A systematic approach for cross-source point cloud registration by preserving macro and micro structures [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2017, 26(7): 3261-3276.
- [6] Byun S, Jung K, Im S, *et al.* Registration of 3D scan data using image reprojection[J]. International Journal of Precision Engineering and Manufacturing, 2017, 18(9): 1221-1229.
- [7] He Y, Liang B, Yang J, *et al.* An iterative closest points algorithm for registration of 3D laser scanner point clouds with geometric features [J]. Sensors, 2017, 17(8): 1862.
- [8] Ying S H, Peng J G, Du S Y, *et al.* A scale stretch method based on ICP for 3D data registration [J]. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 2009, 6(3): 559-565.
- [9] Makovetskii A, Voronin S, Kober V, *et al.* Affine registration of point clouds based on point-to-plane approach[J]. Procedia Engineering, 2017, 201: 322-330.
- [10] Ho J, Peter A, Rangarajan A, *et al.* An algebraic approach to affine registration of point sets[C]. IEEE International Conference on Computer Vision, 2009: 1335-1340.
- [11] Kannala J, Rahtu E, Heikkila J. Affine registration with multi-scale autoconvolution [C]. IEEE International Conference on Image Processing, 2005: 8836017.
- [12] Du S Y, Zheng N N, Meng G F, *et al.* Affine registration of point sets using ICP and ICA [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2008, 15: 689-692.
- [13] Jiang J, Cheng J, Chen X L. Registration for 3-D point cloud using angular-invariant feature [J]. Neurocomputing, 2009, 72(16/17/18): 3839-3844.
- [14] Li R Z, Yang M, Liu Y Y, *et al.* An uniform simplification algorithm for scattered point cloud[J]. Acta Optica Sinica, 2017, 37(7): 0710002.
李仁忠, 杨曼, 刘阳阳, 等. 一种散乱点云的均匀精简算法[J]. 光学学报, 2017, 37(7): 0710002.
- [15] Sharp G C, Lee S W, Wehe D K. ICP registration using invariant features [J]. IEEE Transactions on

- Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2002, 24 (1): 90-102.
- [16] Yuan H, Da F P, Lin T. Research on algorithm of point cloud coarse registration[C]. IEEE International Conference on Computer and Communications, 2016: 1335-1339.
- [17] Bae K H. Evaluation of the convergence region of an automated registration method for 3D laser scanner point clouds[J]. Sensors, 2009, 9(1): 355-375.
- [18] Cheng L, Tong L H, Li M C, *et al.* Semi-automatic registration of airborne and terrestrial laser scanning data using building corner matching with boundaries as reliability check [J]. Remote Sensing, 2013, 5 (12): 6260-6283.
- [19] Zhou W Z, Chen G L, Du S S, *et al.* An improved iterative closest point algorithm using clustering[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2016, 53 (5): 051202.
周文振, 陈国良, 杜珊珊, 等. 一种聚类改进的迭代最近点配准算法[J]. 激光与光电子学进展, 2016, 53(5): 051202.
- [20] Yang J L, Li H D, Campbell D, *et al.* Go-ICP: a globally optimal solution to 3D ICP point-set registration [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2016, 38 (11): 2241-2254.
- [21] Rangarajan A, Chui H L, Mjolsness E, *et al.* A robust point-matching algorithm for autoradiograph alignment[J]. Medical Image Analysis, 1997, 1(4): 379-398.
- [22] Luo B, Hancock E R. Structural graph matching using the EM algorithm and singular value decomposition [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2001, 23 (10): 1120-1136.
- [23] Joshi A, Lee C H. On the problem of correspondence in range data and some inelastic uses for elastic nets [J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1995, 6(3): 716-723.
- [24] Wells M W III. Statistical approaches to feature-based object recognition[J]. International Journal of Computer Vision, 1997, 21(1/2): 63-98.
- [25] Cross A D J, Hancock E R. Graph matching with a dual-step EM algorithm [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1998, 20 (11): 1236-1253.
- [26] Myronenko A, Song X B. Point set registration: coherent point drift [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2010, 32 (12): 2262-2275.
- [27] Jian B, Vemuri B C. Robust point set registration using Gaussian mixture models [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2011, 33(8): 1633-1645.
- [28] Ma J Y, Zhao J, Jiang J J, *et al.* Non-rigid point set registration with robust transformation estimation under manifold regularization[C]. AAAI Conference on Artificial Intelligence, 2017: 4218-4224.
- [29] Li N, Cheng P, Sutton M A, *et al.* Three-dimensional point cloud registration by matching surface features with relaxation labeling method[J]. Experimental Mechanics, 2005, 45(1): 71-82.
- [30] Wang C, Shu Q, Yang Y X, *et al.* Quick registration algorithm of point clouds using structure feature [J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38 (9): 0911005.
王畅, 舒勤, 杨赞秀, 等. 利用结构特征的点云快速配准算法[J]. 光学学报, 2018, 38(9): 0911005.