

颗粒粒径分布测量反演算法的改进

王晨¹, 张彪^{1*}, 曹丽霞¹, 姚鸿熙², 许传龙^{1**}

¹东南大学能源与环境学院, 江苏 南京 210096;

²江苏啸峰环保科技股份有限公司, 江苏 南京 211111

摘要 综合奇异值截断法、奇异值修正法、Tikhonov 正则化思想及 Chahine 迭代算法, 提出一种改进的病态问题求解算法来测量颗粒系的粒径分布。结合 Backus-Gilbert 折中准则与奇异值最小原则确定了奇异截断值, 采用 L 曲线法确定了最优正则化参数, 并利用联合迭代反演法(SIRT)实现解的非负约束。模拟及实验结果表明, 该算法对单、双峰分布的测量误差均小于 3%, 其抗噪性能、测量准确性、时效性及粒径测量范围相较其他反演算法都有明显优势。

关键词 测量; 粒径分布; 改进算法; 近场散射; 病态问题; 非负约束

中图分类号 O436.2

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201939.0212009

An Improved Inversion Algorithm to Measure Particle Size Distribution

Wang Chen¹, Zhang Biao^{1*}, Cao Lixia¹, Yao Hongxi², Xu Chuanlong^{1**}

¹School of Energy and Environment, Southeast University, Nanjing, Jiangsu 210096, China;

²Jiangsu Xiaofeng Environmental Protection Technologies Co., Ltd., Nanjing, Jiangsu 211111, China

Abstract An improved solution algorithm of the ill-posed problem is proposed to measure the particle size distribution, which is combined with the truncated singular value decomposition (TSVD) method, the modified singular value decomposition method, the Tikhonov regularization method, and the Chahine iteration method. The singular cutoff value is determined by the Backus-Gilbert tradeoff criteria and the minimum principle of singular value. The optimal regularization parameters are determined by the L-curve method, and the simultaneous iterative reconstruction technique (SIRT) is adopted to realize the non-negative constraint of the solution. The simulation and experimental results show that the measurement errors of the single-peak and bimodal distributions are both less than 3% by the proposed algorithm. In addition, the proposed algorithm has obvious advantages superior to the other inversion algorithms in the anti-noise performance, measurement accuracy, timeliness, and measurement range of the particle size.

Key words measurement; particle size distribution; improved algorithm; near-field scattering; ill-posed problem; non-negative constraint

OCIS codes 120.5820; 290.2558; 290.5850

1 引 言

颗粒与化工、农业、环保、医学等领域息息相关, 获取颗粒的粒径信息能够提升产品质量, 在抑制环境污染、保障人体健康等方面均能发挥重大作用^[1]。细微颗粒的粒径通常借助相关物理关系间接测得, 其测量方法种类繁多, 国内外投入使用的颗粒测量仪器超过了 400 种。根据测量原理的不同, 粒径测量方法分为筛分法、显微镜法、电感应法、沉降法及

光散射法等^[2], 其中, 光散射法因其适用性强、时效性高、测量范围宽、测量重复性好、可在线测量等优势, 得到了广泛发展。结合光散射法与智能优化算法来测量细微颗粒的粒径大小及分布, 是目前应用最广泛的颗粒测量技术之一^[3-4]。在光散射信号的探测方面, 电荷耦合器件(CCD)图像传感器技术因其光电灵敏度高、像素尺寸小、空间分辨率高、与计算机传输便捷、小巧易安装等优点, 逐步替代了传统的光电探测器。在实际测量中, 传统的前向小角散

收稿日期: 2018-08-27; 修回日期: 2018-09-26; 录用日期: 2018-10-09

基金项目: 国家自然科学基金(51506030, 51676044)、江苏省重点研发计划(社会发展)(BE2018705)

* E-mail: zhangbiao@seu.edu.cn; ** E-mail: chuanlongxu@seu.edu.cn

射法在较小散射角内中心光和杂散光相对过强,采集信号的信噪比很低,影响测量的精确性^[5-6]。采用针尖装置消除中心光强,或采用空白测试并直接作差消除背景光强是常用的解决办法,但前者会因针尖衍射现象影响实际散射信号,后者会造成散射信号的丢失。针对这一缺陷,近场散射(NFS)技术被提出,它可在不安装中心针等复杂装置的前提下克服干扰信号的影响,提高测量精度,降低对测量环境洁净度的要求^[7]。

NFS法通过反演颗粒散射强度获得粒径分布,测量过程面临第一类 Fredholm 积分方程^[8],这是一个不适定问题,需要精确稳定的反问题求解算法。基于正则化思想降低方程组的病态特性,避免微小测量误差对结果的干扰^[9-10]。正则化参数^[11]的选取直接影响求解的精确度和稳定性,应用较多的方法有拟最优准则、图解-数值迭代法、广义交叉验证(GCV)准则法及 L 曲线法。除了正则化法外,基于奇异值分解(SVD)技术的求解算法同样得到广泛应用,典型的如奇异值修正法和奇异值截断(TSVD)法。此类方法的效果与奇异值的保留数量密切相关,该数量的选取依赖观测数据的先验信息,寻优方案需恰当选取^[12]。迭代算法也是不适定问题的有效解决办法之一,可以得到稳定的数值解。考虑颗粒粒径的非负特性,需要使用非负约束技术进行修

正。王雅静等^[13]将小波正则化反演与 TSVD 法结合,提出了多尺度动态光散射法;王天恩等^[14]提出了一种基于向量相似度测量的迭代算法。上述算法均被应用于双峰分布颗粒系的反演,但只在峰值粒径比小于 1:2.5 的双峰远距离分布情况下得到了验证,具有一定局限性。

本文基于 NFS 原理,融合 TSVD 法、奇异值修正法与 Tikhonov 正则化思想,提出了一种改进的病态问题反演算法。基于 Backus-Gilbert 折中准则和截断值最小原则确定了奇异截断值,利用 L 曲线法选取最优正则化参数,通过联合迭代反演(SIRT)法实现了非负约束,通过 Chahine 迭代算法计算得到收敛的求解结果。分析了噪声水平、粒径分布宽度及峰值数量对算法反演的影响,并将所提改进算法与其他算法进行比较。

2 测量原理

2.1 NFS 原理

NFS 测量颗粒粒径的系统结构如图 1 所示。激光束经空间滤波及准直后投射到待测颗粒群发生散射,散射光与透射光在样品近前处干涉叠加形成散斑图像,其经过显微透镜被 CCD 相机接收。对散斑图像进行傅里叶频谱分析得到角散射光强度,从而反演出颗粒的粒径信息^[15]。

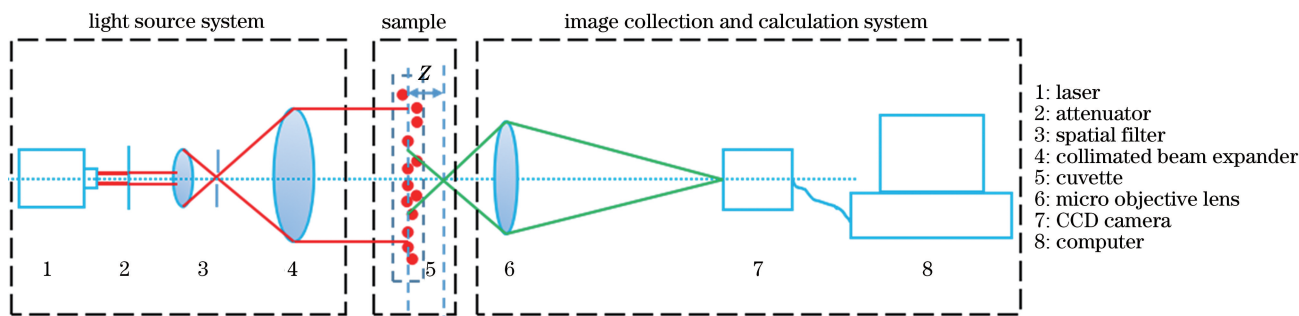


图 1 NFS 测量颗粒粒径的系统结构图

Fig. 1 Structural diagram of NFS setup for measuring particle size

图 2(a)所示为 CCD 拍摄的 NFS 图像,其中同心圆环及光的毛刺是显微透镜及周围环境引起的杂散光影响,消除影响后的差分信号图像如图 2(b)所示。差分信号由自相关技术得到散斑图像的二维功率谱,即远场散射强度,如图 2(c)所示。将二维功率谱图像沿半径按等比分环后得到一维远场散射的平均光强分布,如图 2(d)所示,即为反演所需的观测数据 $I_s(Q)$,其中 Q 为散射波矢的大小。

不考虑粒子间相关多散射现象,CCD 探测器接收到的散射光强可表示为

$$I_s(Q) = \int I_{\text{Mie}}(Q, D) N(D) dD, \quad (1)$$

式中: $I_{\text{Mie}}(Q, D)$ 表示直径为 D 的颗粒在散射波矢大小为 Q 时的 Mie 散射光强; $N(D)$ 为颗粒粒径的频率分布。(1)式是典型的第一类 Fredholm 积分方程^[16],其归一化形式为 $\mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{X}$,其中 \mathbf{I} 为散射光强分布的列向量, \mathbf{X} 为粒径分布的列向量, \mathbf{A} 为系数矩阵,其元素表示某粒径颗粒在某散射波矢时的散射光强。

2.2 Chahine 迭代算法

迭代算法是非线性方程组常用的求解办法之

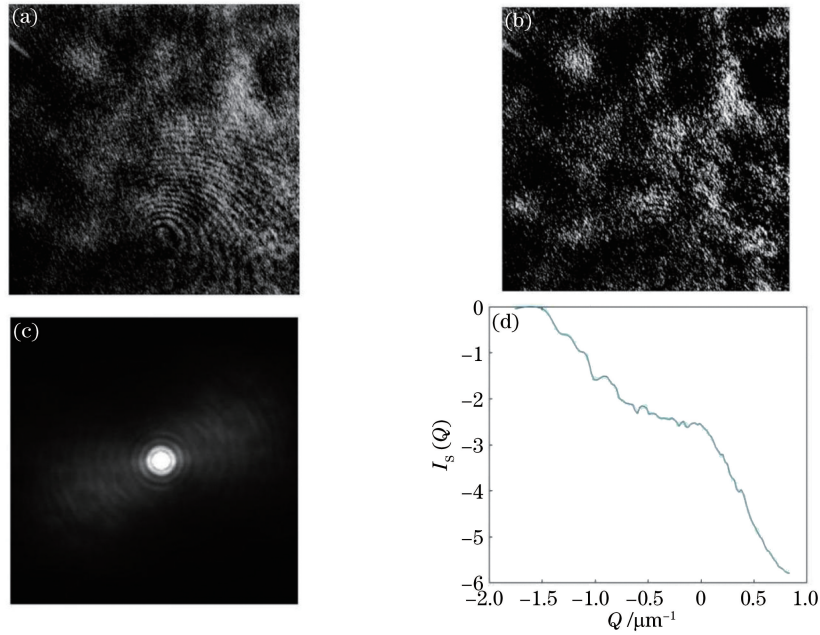


图 2 NFS 颗粒粒径的测量过程。(a) NFS 图像;(b)差分图像;(c)功率谱图像;(d)散射光强度
Fig. 2 Process of measurement of particle size by NFS. (a) NFS image; (b) difference image; (c) image of power spectrum; (d) scattered light intensity

一,典型的有代数重建法(ART),投影迭代算法等。Chahine 循环算法最初被用于测量大气温度分布,近年来在光散射法测量颗粒粒径分布领域得到了发展^[17]。其迭代格式为

$$\begin{cases} \mathbf{I}^k = \mathbf{A}\mathbf{X}^k \\ \mathbf{r}^k = \mathbf{I} / \mathbf{I}^k \\ \mathbf{c}^k = (\mathbf{A}^T \mathbf{r}^k) ./ \text{sum}(\mathbf{A}^T) \\ \mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{c}^k * \mathbf{X}^k \end{cases} \quad (2)$$

式中:上标 k 代表第 k 次迭代; $\text{sum}(\mathbf{A}^T)$ 为矩阵 \mathbf{A}^T 列向量的元素之和; \mathbf{r} 、 \mathbf{c} 为迭代过程的中间变量;./表示两向量中各对应元素相除;*表示两向量中各对应元素相乘。该方法的收敛速度较快,经过多次迭代后便能得到一个相对稳定的解。由迭代公式可知,只要迭代初始值为非负值,迭代终值必然为正。此方法的缺陷是当颗粒粒径级数较多时,结果曲线振荡严重,且对多峰分布曲线的反演效果不理想,需要进一步改进。

2.3 改进算法

利用 Lanczos 的 SVD 理论分解系数矩阵 \mathbf{A} ,得到 $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$,其中 \mathbf{u}_i 、 \mathbf{v}_i 分别为 \mathbf{A} 的左、右奇异值矩阵列向量, λ_i 为递减排列的奇异值, n 为矩阵 \mathbf{A} 的秩。 $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{I} / \lambda_i$ 为方程的广义解,若矩阵 \mathbf{A} 存在很小的 λ_i ,则观测数据 \mathbf{I} 中的微小噪声在近似解中被极度放大,导致测量系统的稳定性降低,属于

严重病态问题。

\mathbf{A} 的较大奇异值及相应向量对应数值模型中的可靠部分,否则为不可靠部分。TSVD 法直接删除过小奇异值对应的特征向量,可避免观测数据中的微小噪声被放大,但在消除不可靠组分的同时会造成信息损失,降低解估计的分辨率^[18]。奇异值修正法对全部奇异值及相应特征向量给予修正,导致确定成分发生畸变^[19]。综合这两种方法,考虑引入滤波因子修正数值解,通过 TSVD 法将全部奇异值分为相对较大和较小的两部分,仅让修正参数作用于模型的不可靠部分,使其受到抑制,可靠部分不发生畸变。定义该滤波因子为

$$\tau_i = \begin{cases} 1, 1 \leq i \leq k' \\ \lambda_i / (\lambda_i + \alpha), k' \leq i \leq n \end{cases} \quad (3)$$

式中:修正参数 α 取最优正则化参数; k' 为截断处的序号。Tikhonov 正则化方法^[20] 为不定方程组构造改进的系数矩阵的广义逆,当正则化参数选取偏大时,反演曲线过于光滑,分布宽度偏大,反之会导致振荡与毛刺,本研究采用 L 曲线法计算取值。此时的谱分解形式为

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{I}}{\lambda_i} \mathbf{v}_i + \sum_{i=k'+1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \alpha} \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{I}}{\lambda_i} \mathbf{v}_i \quad (4)$$

奇异截断值 λ_k 的选择与系数矩阵和观测噪声水平有关。在高噪声条件下,取较大截断值可减小噪声的影响;反之,取较小截断值可保留更多有效模

型信息^[21]。截断后的广义逆矩阵为 $\mathbf{A}^* = \sum_{\lambda_i \geq \lambda_k} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T / \lambda_i$, 引入分辨率矩阵 $\mathbf{R} = \mathbf{A}^* \mathbf{A}$ 和协方差矩阵 $\text{cov}[\mathbf{X}] = \sigma^2 \mathbf{A}^* (\mathbf{A}^*)^T$ 。分辨率和协方差是互相矛盾的评价参数, 综合 Backus-Gilbert 折中理论与截断值最小原则, 定义泛函 e 为

$$e = \|\mathbf{R} - \mathbf{E}\|_2^2 + \|\text{cov}[\mathbf{X}]\|_2^2 + \lambda_k^2, \quad (5)$$

式中: \mathbf{E} 为单位矩阵。使 e 取最小值的 λ_k 即最佳奇异截断值。SVD 法得到的数值解可能包含负分量, 不符合实际, 采用王忠东等^[22] 提出的改善 ART 收敛性能的 SIRT 算法来实现非负条件约束。用很小的正数代替 \mathbf{X} 的所有负分量, 得到新的非正则化解 \mathbf{X}_α^0 。正演计算观测值 \mathbf{I} 的偏差得到修正量 $\Delta \mathbf{X}_0$ 。修正数值解 $\mathbf{X}_\alpha^s = \mathbf{X}_\alpha^0 + \Delta \mathbf{X}_0$, 若 \mathbf{X}_α^s 还有负分量, 则按上述步骤重新计算, 直到全部分量满足非负条件为止。改进算法的具体过程为: 由谱分解系数矩阵 \mathbf{A} 建立广义逆矩阵, 确定最优正则化参数 α 和奇异截断值 λ_k 后建立改进的滤波因子, 计算初始数值解, 用 SIRT 算法对该解进行非负约束后, 并将结果作为 Chahine 迭代算法的初始值进行迭代计算。

3 结果与讨论

3.1 数值模拟

为验证改进算法的性能, 分别用 Chahine 迭代法、TSVD 算法和所提改进算法对满足 Johnson-SB 模型的单、双峰分布颗粒群进行数值模拟。取 He-Ne 激光器的入射光波长 $\lambda = 632.8 \text{ nm}$, 颗粒对于分散介质(水)的折射率 $m = 1.55 - 0.1i$, 最大散射角 $\theta = 40.5^\circ$ 。为评价反演效果, 使用粒径分布误差 ϵ 来表征计算误差, 利用粒径分布相关系数 R 来表征分布曲线的相近程度, 其表达式分别为

$$\epsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^K (X_{\text{real},i} - X_{\text{cal},i})^2} / \sqrt{\sum_{i=1}^K X_{\text{real},i}^2} \times 100\%, \quad (6)$$

$$R = \frac{\sum_{i=1}^K (X_{\text{real},i} - \bar{X}_{\text{real}})(X_{\text{cal},i} - \bar{X}_{\text{cal}})}{\left[\sum_{i=1}^K (X_{\text{real},i} - \bar{X}_{\text{real}})^2 \sum_{i=1}^K (X_{\text{cal},i} - \bar{X}_{\text{cal}})^2 \right]^{1/2}} \times 100\% \quad (7)$$

式中: $X_{\text{real},i}$ 为解向量的真实元素值; $X_{\text{cal},i}$ 为解向量的数值模拟计算得到元素值; K 为解向量的元素个数; \bar{X}_{real} 为解向量的真实元素平均值; \bar{X}_{cal} 为解向量的数值模拟计算得到元素平均值。

假定单峰分布颗粒的平均粒径 $\mu_1 = 40 \text{ }\mu\text{m}$, 分布宽度 $\sigma_1 = 10$, 对理论散射光强加入误差限 $\gamma = 3\%$

的随机噪声, 3 种算法的反演结果 $X(D)$ 如图 3 所示。Chahine 算法在低粒径区域($0 \sim 36 \text{ }\mu\text{m}$)反演准确, 在高粒径区域偏离真实值, 峰值频率过小, 总体误差高达 24.35%, 曲线相似度为 95.83%。TSVD 算法的反演误差为 18.14%, 曲线相似度增大至 97.55%, 克服了 $56 \text{ }\mu\text{m}$ 后反演曲线虚飘的缺陷, 然而曲线分布宽于真实值, $0 \sim 20 \text{ }\mu\text{m}$ 内出现了振荡。所提改进算法的反演结果与真实值吻合, 振荡程度及峰值粒径偏差程度都明显低于前两种算法, 反演误差为 7.18%, 曲线相似度为 99.03%, 说明与另外两种算法相比, 本文算法在反演粒径单峰分布时具有显著优势。

当分布宽度 $\sigma = 5$ 时, 反演结果如图 4 所示, 可以看出, 窄分布下 Chahine 算法仍存在高粒径区域虚飘和峰值粒径过低的现象。TSVD 算法的反演结果的区域偏宽、峰值偏小, 且在非峰值区域有严重的振荡与伪峰现象, 反演误差达到 28.09%, 远高于 $\sigma = 10$ 时的反演结果, 说明 TSVD 算法对窄分布粒径的反演效果较差。所提改进算法的反演结果无虚

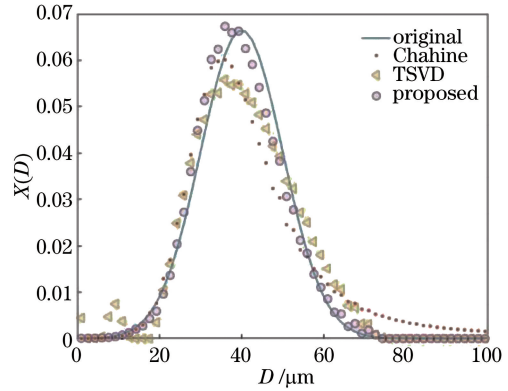


图 3 噪声 $\gamma = 3\%$ 时单峰分布粒径反演曲线
Fig. 3 Inversion results of single peak particle size distribution with noise $\gamma = 3\%$

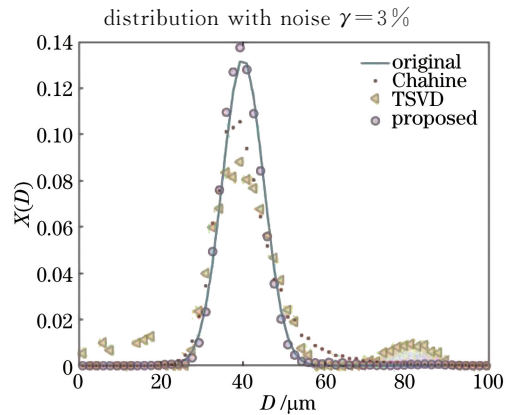


图 4 分布宽度 $\sigma = 5$ 时单峰分布粒径反演曲线
Fig. 4 Inversion results of single peak particle size distribution with width $\sigma = 5$

飘与伪峰,峰值粒径偏差小,反演误差为 6.12%,曲线相似度达 99.56%,直观反映了其对窄分布和高粒径区域的反演优越性。

设置双峰颗粒的粒径分布参数依次为 $r=0.5$, $\mu_1=30\ \mu\text{m}$, $\sigma_1=4$, $\mu_2=60\ \mu\text{m}$, $\sigma_2=3$, 此时峰值粒径比 $\beta=1:2$, 对理论散射光强分别加入误差限 $\gamma=0$ 、0.05%、0.10%、0.50% 的随机噪声。表 1 所示为 3 种算法在不同噪声水平下反演的误差和相关系数, 双峰分布粒径对噪声的敏感程度高于单峰分布粒径, 图 5 所示为 $\gamma=0.5\%$ 时 3 种算法对双峰分布粒径的反演结果。可以看到: 无论有无噪声, Chahine 算法的误差都很大, 高粒径的第二个峰反演失效, 且峰间隙处结果偏高; TSVD 算法在低噪声水平下反演理想, 但随着噪声的增大, 精度快速降低, 峰值间隙和第一个峰处反演结果基本理想, 但第二个峰的曲线区域偏宽、峰值偏小, 高粒径区域存在伪峰; 所提改进算法提高了对第二个峰的反演能力, 避免了伪峰与振荡的不稳定现象, 具备更高的抗噪性能。

表 1 不同噪声水平下的双峰分布粒径反演结果

Table 1 Inversion results of bimodal particle size distributions at different noise levels

$\gamma / \%$		0	0.05	0.10	0.50
Chahine	$\epsilon / \%$	57.28	57.26	52.38	52.35
	$R / \%$	76.37	76.39	76.40	81.49
TSVD	$\epsilon / \%$	6.57	10.44	16.98	32.94
	$R / \%$	99.01	96.53	95.24	92.77
Proposed	$\epsilon / \%$	4.44	7.96	9.67	15.92
	$R / \%$	99.88	99.53	98.96	98.60

当颗粒峰值粒径分别为 $\mu_1=50\ \mu\text{m}$ 、 $\mu_2=60\ \mu\text{m}$, 峰值粒径比 $\beta=1:1.2$ 时, 3 种算法的反演结果如图 6 所示。当峰值粒径间隔减小后, Chahine 算法和 TSVD 算法均失去了对双峰的分辨能力, 反演结果严重失真。所提改进算法依然能清晰地区别

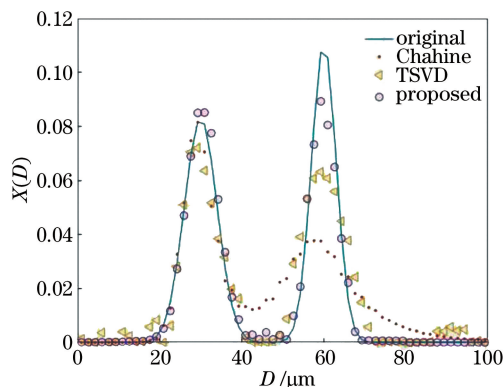


图 5 噪声 $\gamma=0.5\%$ 时双峰分布粒径反演曲线
Fig. 5 Inversion results of bimodal particle size distribution with noise $\gamma=0.5\%$

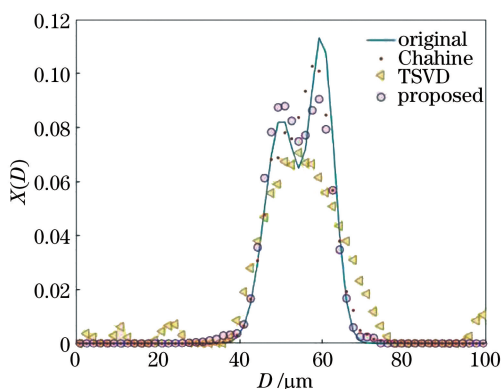


图 6 粒径比 $\beta=1:1.2$ 时双峰分布粒径反演曲线
Fig. 6 Inversion results of bimodal particle size distribution with particle size ratio $\beta=1:1.2$

双峰, 且没有振荡和伪峰现象, 与真实曲线的相似度达到 98.96%, 表明本文算法在间隔较近的双峰分布曲线的反演中具有更高的优越性。

3.2 实验研究

利用所提改进算法来测量国家标准颗粒溶液, 搭建了基于 NFS 原理的颗粒粒径测量系统, 实验装置平台如图 7 所示。标准颗粒规格分别为 GBW (E)120028 ($40\ \mu\text{m}$) 和 GBW (E)120047 ($70\ \mu\text{m}$), 以

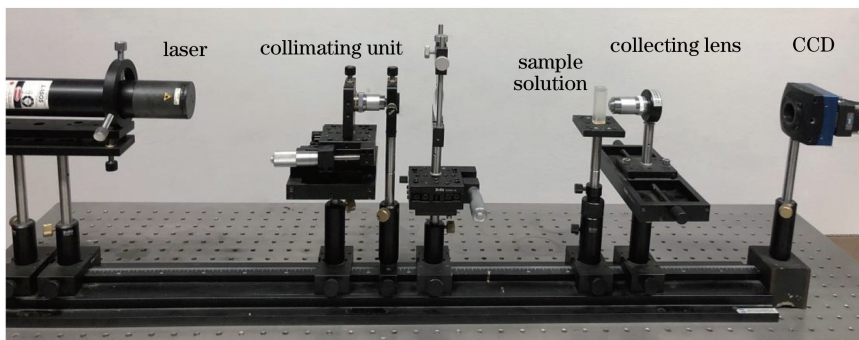


图 7 NFS 粒径测量实验装置

Fig. 7 Experimental setup for particle size measurement by NFS

水为分散剂,其相对折射率 $m = (1.596 - 0.1i) / 1.33$ 。设定 CCD 的拍摄频率为 50 frame/s,采集图像共 500 帧,信号采集时间为 10 s。

图 8 所示为标准颗粒粒径为 40 μm 的单峰分布测量结果,分布概率 N 大于 10% 的粒径集中在 37.3~42.25 μm , 占总数的 82.97%, 计算得到颗粒群的平均粒径为 39.92 μm , 从开始处理计算机采集到的 NFS 图像到生成颗粒粒径分布的测量结果,共耗时 58 s。多次测量后统计得到 40 μm 标准颗粒溶液粒子群的测量粒径为 (40.23 ± 1.5) μm , 与标准颗粒检测标定结果 (40 ± 0.6) μm 相比,测量误差为 0.58%, 故所提改进算法在测量单峰分布粒径时具有较高的稳定性。

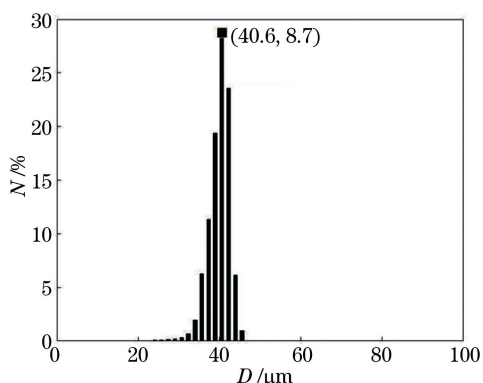


图 8 标准颗粒粒径为 40 μm 时粒径概率分布
Fig. 8 Particle size probability distribution of standard particle with particle size of 40 μm

将粒径为 40 μm 和 70 μm 的标准混合颗粒作为待测溶液,其峰值粒径比为 1:1.75。采用 TSVD 算法和所提改进算法反演得到的测量结果分别如图 9 和图 10 所示。在图 9 中,分布曲线的两个峰值分别在 48.85 μm 和 63.7 μm 处,与检定标准值之间的误差分别为 22.12% 和 9%。低概率粒径区域的峰值粒径偏大,高概率粒径区域的峰值粒径则偏小,测量结果几乎不能区别双峰,且在 20 μm 和 94 μm 附近出现伪峰,整体测量精度低。双峰分布溶液的粒径测量误差较大,其主要原因是两种粒径在混合时发生团聚现象,造成多次散射,且不同粒径颗粒沉降速度的差异使得颗粒系不能达到绝对分散,而反演算法的不良特性也会造成测量结果的伪峰与振荡和两峰交汇处的刻画失效。在图 10 中,双峰峰值处粒径分别为 38.95 μm 和 70.3 μm ,与检定标准值之间的误差分别为 2.63% 和 0.43%,均低于 3%,测得的粒径分布曲线中双峰区分清晰,故所提改进算法在双峰峰值粒径间隔较近时的反演结果优于 TSVD 算法。

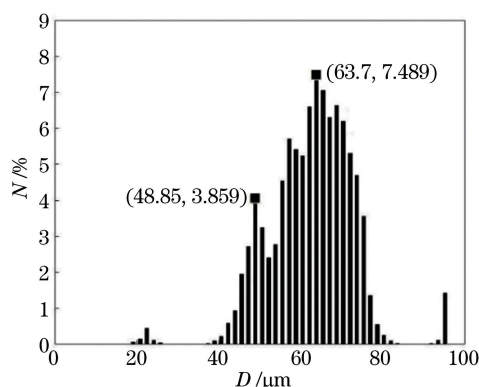


图 9 TSVD 算法得到的混合溶液的粒径概率分布
Fig. 9 Particle size probability distribution of bimodal latex spheres with TSVD algorithm

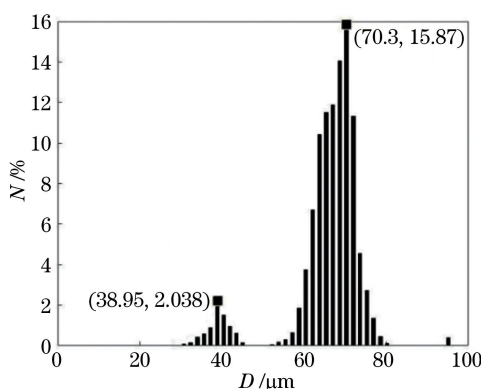


图 10 本文算法得到的混合溶液的粒径概率分布
Fig. 10 Particle size probability distribution of mixed solution by proposed algorithm

4 结 论

提出一种针对 NFS 法测量颗粒粒径的改进反演算法,在阐述该算法的实现步骤后,通过数值模拟和实验验证得出结论:改进算法不但提高了反演的精度和速度,还削弱了正则化参数的选取对解的绝对影响,提高了算法的稳定性,反演曲线相似度可达 97% 以上。数值模拟结果表明,改进算法能够有效抑制反演结果对噪声的敏感度。在高噪声水平下,粒径分布的反演效果优于 Chahine 算法和 TSVD 算法,尤其对于双峰分布颗粒系,在相同噪声水平下其测量精度比 TSVD 算法高约一倍。实验结果表明,改进算法对颗粒群的粒径分布适用性更加广泛,降低了窄分布颗粒群在高概率粒径区域的反演失真程度,且在峰值粒径比大于 1:2 时对近距离双峰的区别能力更优。改进算法提高了粒径反演效率,降低了对测量环境的要求,对被测颗粒溶液浓度的适用性更强。

参 考 文 献

- [1] Riefler N, Wriedt T. Intercomparison of inversion algorithms for particle sizing using Mie scattering[J]. Particle & Particle Systems Characterization, 2008, 25(3): 216-230.
- [2] Cai X S, Su M X, Shen J Q. Particle size measurement technology and application[M]. Beijing: Chemical Industry Press, 2010: 18-34.
蔡小舒, 苏明旭, 沈建琪. 颗粒粒度测量技术及应用[M]. 北京: 化学工业出版社, 2010: 18-34.
- [3] Wang Y W. Light scattering theory and application[M]. Beijing: Science Press, 2013: 42-68.
王亚伟. 光散射理论及其应用技术[M]. 北京: 科学出版社, 2013: 42-68.
- [4] Yang Y F, Yang H, Zheng G, *et al.* Progress of particle size measurement by laser diffraction and scattering[J]. Optical Technique, 2011, 37(1): 19-24.
杨依枫, 杨晖, 郑刚, 等. 衍射散射式颗粒粒度测量法的研究新进展[J]. 光学技术, 2011, 37(1): 19-24.
- [5] Ferri F. Use of a charge coupled device camera for low-angle elastic light scattering[J]. Review of Scientific Instruments, 1997, 68(6): 2265-2274.
- [6] Wang S M, Lu Y, Ye M. Measurement of the particle mean size by the ratio of the scattering light intensified at small angles near-forward[J]. Journal of Wuhan University (Natural Science Edition), 1997, 43(5): 691-696.
王式民, 陆勇, 叶茂. 前向小角散射法测量颗粒平均尺寸[J]. 武汉大学学报(自然科学版), 1997, 43(5): 691-696.
- [7] Magatti D, Alaimo M D, Potenza M A C, *et al.* Dynamic heterodyne near field scattering[J]. Applied Physics Letters, 2008, 92(24): 2547.
- [8] Maleknejad K, Aghazadeh N, Mollapourasl R. Numerical solution of Fredholm integral equation of the first kind with collocation method and estimation of error bound[J]. Applied Mathematics & Computation, 2006, 179(1): 352-359.
- [9] Morozov V A. Methods for solving incorrectly posed problems[M]. New York: Springer Verlag, 2006: 103-121.
- [10] Carstensen C, Praetorius D. Averaging techniques for the effective numerical solution of Symm's integral equation of the first kind[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2006, 27(4): 1226-1260.
- [11] Wang B E. Study on numerical methods of discrete ill-posed problem in inverse problem[D]. Xi'an: Xi'an University of Technology, 2006: 25-28.
- [12] Ma T, Chen L W, Wu M P, *et al.* The selection of regularization parameter in downward continuation of potential field based on L-curve method[J]. Progress in Geophysics, 2013, 28(5): 2485-2494.
马涛, 陈龙伟, 吴美平, 等. 基于L曲线法的位场向下延拓正则化参数选择[J]. 地球物理学进展, 2013, 28(5): 2485-2494.
- [13] Wang Y J, Dou Z, Shen J, *et al.* Multi-scale inversion combining TSVD-Tikhonov regularization for dynamic light scattering[J]. Chinese Journal of Lasers, 2017, 44(1): 0104003.
王雅静, 窦智, 申晋, 等. TSVD-Tikhonov 正则化多尺度动态光散射反演[J]. 中国激光, 2017, 44(1): 0104003.
- [14] Wang T E, Shen J Q, Lin C J. Vector similarity retrieval algorithm in particle size distribution analysis of forward scattering [J]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(6): 0629002.
王天恩, 沈建琪, 林承军. 前向散射颗粒粒径分布分析中的向量相似度反演算法[J]. 光学学报, 2016, 36(6): 0629002.
- [15] Potenza M A C, Pescini D, Magatti D, *et al.* A new particle sizing technique based on near field scattering[J]. Nuclear Physics B (Proceedings Supplements), 2006, 150(1): 334-338.
- [16] Kouzelis D, Candel S M, Esposito E, *et al.* Particle sizing by laser light diffraction: Improvements in optics and algorithms[J]. Particle & Particle Systems Characterization, 1987, 4(1/2/3/4): 151-156.
- [17] Ferri F, Bassini A, Paganini E. Modified version of the Chahine algorithm to invert spectral extinction data for particle sizing [J]. Applied Optics, 1995, 34(25): 5829-5839.
- [18] Li P, Wang C Y, Xu H Z, *et al.* Discussion on the application of singular value decomposition in geophysical inversion[J]. Progress in Natural Science, 2001, 11(8): 891-896.
李平, 王椿镛, 许厚泽, 等. 地球物理反演中奇异值分解应用的若干问题探讨[J]. 自然科学进展, 2001, 11(8): 891-896.
- [19] Wang Z J. Research on the regularization solutions of ill-posed problems in geodesy[D]. Wuhan: Institute of measurement and Geophysics of the Chinese Academy of Sciences, 2003: 34-36.
王振杰. 大地测量中不适定问题的正则化解法研究[D]. 武汉: 中国科学院测量与地球物理研究所, 2003: 34-36.
- [20] Xu X N, Li J C, Wang Z T, *et al.* The simulation

research on the Tikhonov regularization applied in gravity field determination of GOCE satellite mission[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2010, 39(5): 465-470.

徐新禹, 李建成, 王正涛, 等. Tikhonov 正则化方法在 GOCE 重力场求解中的模拟研究[J]. *测绘学报*, 2010, 39(5): 465-470.

- [21] Xiao L Z, Zhang H R, Liao G Z, *et al.* Inversion of NMR relaxation in porous media based on Backus-Gilbert theory [J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2012, 55(11): 3821-3828.

肖立志, 张恒荣, 廖广志, 等. 基于 Backus-Gilbert 理论的孔隙介质核磁共振弛豫反演[J]. *地球物理学报*, 2012, 55(11): 3821-3828.

- [22] Wang Z D, Xiao L Z, Liu T Y. A new method for multiexponential inversion of NMR relaxation signal and its application[J]. *Science in China (Series G)*, 2003, 33(4): 323-332.

王忠东, 肖立志, 刘堂宴. 核磁共振弛豫信号多指数反演新方法及其应用[J]. *中国科学 G 辑*, 2003, 33(4): 323-332.