

基于代数迭代的 Mojette 变换层析重建算法

王佳*, 张玉虹, 张维光

西安工业大学光电工程学院, 陕西 西安 710021

摘要 提出了一种基于代数迭代的 Mojette 变换层析重建算法。在确定最佳投影角度的基础上, 结合传统层析技术中的乘法代数迭代算法进行重建。利用该算法对轴对称火焰进行了层析重建。数值模拟结果表明, 与基于角的重建算法相比, 该算法在噪声较大情况下的层析重建质量更好。

关键词 图像处理; 层析成像技术; 代数迭代算法; Mojette 变换; 燃烧场成像

中图分类号 TP751.1

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201939.0211003

Mojette Transform Tomographic Reconstruction Algorithm Based on Algebraic Iteration

Wang Jia*, Zhang Yuhong, Zhang Weiguang

School of Optoelectronic Engineering, Xi'an Technological University, Xi'an, Shaanxi 710021, China

Abstract A Mojette transform tomographic reconstruction algorithm based on algebraic iteration is proposed. In the algorithm, the optimal projection angles are determined, and the multiplicative algebraic iterative algorithm in traditional tomography is adopted for reconstruction. The proposed algorithm is used to tomographic reconstruction of an axisymmetric flame. Numerical simulations show that, for the projections with high noise, the proposed algorithm has better reconstruction quality comparing with the Corner Based Inversion.

Key words image processing; tomographic imaging technique; algebraic iteration algorithm; Mojette transform; combustion field imaging

OCIS codes 100.6950; 100.3010; 100.3190; 280.1740

1 引 言

发射层析技术(ECT)是一种简单且有效的燃烧场诊断方法, 它将燃烧场发射光的强度测量与计算层析理论相结合, 根据多个方向的光强投影来定量重建被测燃烧场的三维发射强度, 并对燃烧场的物理参数进行三维反演与诊断^[1-2]。该技术直接利用光电成像系统接收燃烧场自身的辐射光强信号, 不需要外置探测光源。实验装置简单易实现, 具有很广泛的应用前景, 使得 ECT 技术成为近年来用于燃烧场层析检测的研究热点。

传统 ECT 的数学基础是 Radon 变换。在层析测量与重建中, 投影方向数越多, 重建质量越好。投影方向数不足时会出现辐射状伪影和边界模糊等现象。为了保证层析重建的质量, 现有的发射层析技

术需要采集多个视角方向的投影数据进行重建^[3-7]。然而, 实际上很多燃烧是在相对密闭空间内进行的, 这种结构限制了光学窗口进行多方向投影数据的采集, 投影数据的不足将严重影响待测场的重建质量, 是严重阻碍 ECT 实用化的原因之一。因此, 实现稀疏投影采样条件下的高精度层析重建, 对发射层析技术的研究具有重要的意义。

Mojette 变换是 Radon 变换的一种特殊离散形式, 其理论基础是由 Katz 等^[8]提出的离散角度概念和 Guédon 等^[9]提出的迭代算子共同构筑而成, 该变换在满足 Katz 引理的稀疏角度下即可被精确重建。Mojette 变换是一种冗余变换, 可以根据多个投影之间相互独立的特性对投影个数、投影角度等进行任意变换, 通过改变不同投影矢量下的采样率来控制冗余度的大小, 因此可以最大程度地避免投

收稿日期: 2018-08-30; **修回日期:** 2018-09-12; **录用日期:** 2018-09-25

基金项目: 国家自然科学基金(61701385)、中央高校基本科研业务费专项资金(30916014112-014)、陕西省教育厅专项科研计划(17JK0385)

* **E-mail:** wangjia1001@126.com

影信息的重复和冗余采样^[10]。Fayad 等^[11-12]的研究表明,基于 Mojette 变换的层析重建能够大大减小所需的投影角度并减少投影射线数,其重建所需的数据采集量远小于 Radon 变换所需的数据量,在稀疏角度下具有良好的重建性能。

Mojette 逆变换主要采用基于角的重建(CBI)算法,该算法为一种串行的求解模式^[13]。相比于 Radon 变换,基于 Mojette 变换的层析重建的一个缺点是对噪声的高灵敏度。目前已发展出多种算法来抑制其噪声灵敏度,例如基于最佳投影方向的 CBI 算法^[13]、基于联合代数迭代法(SART)的 SART-Mojette 算法^[14]等。然而,这些算法对实际探测目标的三维重建质量不高。

为了进一步提高基于 Mojette 变换层析的重建质量及其抗噪性能,本文提出了一种基于代数迭代的 Mojette 变换层析重建算法。该方法首先根据 CBI 算法原理确定出最佳投影方向,然后结合传统层析重建中的乘性代数迭代算法(MART)进行重建。模拟实验表明,该算法在大噪声情况下得到的层析重建质量较高。最后,利用该算法对一个轴对称火焰进行重建。

2 Mojette 变换及重建原理

2.1 Mojette 正变换

Mojette 变换为一种特殊离散形式的 Radon 变换,如图 1 所示。在 Mojette 变换中,用一对互质的整数对 (p_i, q_i) 来表示投影方向, $p_i \in \mathbb{Z}$ 和 $q_i \in \mathbb{Z}^+$ 分别表示图像水平方向和垂直方向的整数位移, $i \in \mathbb{Z}^+$ 表示第 i 个投影方向上的 Mojette 变换。该投影矢量对应的投影角度 $\theta_i = \arctan(q_i/p_i)$,且满足 $\theta_i \in (0, \pi)$ 。

Mojette 变换投影值为投影光线经过中心点的

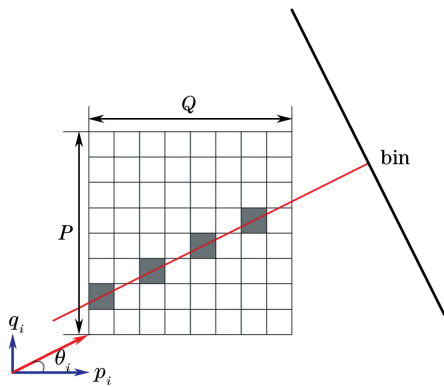


图 1 Mojette 变换原理图

Fig. 1 Schematic of Mojette transform

离散网格值的积分。对分辨率大小为 $P \times Q$ 的离散图像 f 在投影方向 (p_i, q_i) 进行 Mojette 变换,可以表示为

$$M_{p_i, q_i}(b) = \sum_{m=1}^P \sum_{n=1}^Q f(m, n) \delta[b - p_i(m-1) - q_i(n-1) - p_o], \quad (1)$$

式中: $f(m, n)$ 为待重建图像平面上坐标为 (m, n) 的像素灰度值; b 表示该点经过 Mojette 变换映射在探测器像元上的位置。由于探测器像元位置为正整数,需要引入探测器像元位置校正量 p_o 。当投影矢量 $p_i > 0$ 时, $p_o = 1$; 当投影矢量 $p_i < 0$ 时, $p_o = -(Q-1) \cdot p_i + 1$ 。

与 Radon 变换相似, Mojette 变换可以表示为

$$M_{p_i, q_i}(b) = \sum_{m=1}^P \sum_{n=1}^Q f(m, n) \omega_{p_i, q_i}(m, n, b), \quad (2)$$

式中: $\omega_{p_i, q_i}(m, n, b)$ 称为权重因子,表示在投影方向 (p_i, q_i) 下第 (m, n) 个网格对第 b 个投影像素的贡献。当 $p_i(m-1) + q_i(n-1) + p_o = b$ 时, $\omega_{p_i, q_i}(m, n, b) = 1$, 否则 $\omega_{p_i, q_i}(m, n, b) = 0$ 。

可以将 Mojette 变换表示为如下矩阵形式:

$$\mathbf{M} = \mathbf{Wf}, \quad (3)$$

式中: \mathbf{W} 为多个投影方向的权重因子组成的权重矩阵; \mathbf{M} 为多个方向的 Mojette 变换投影矩阵。

2.2 最优投影方向

在 Mojette 变换中,不同投影矢量 (p_i, q_i) 下的探测器像元个数 $B_i(P, Q, p_i, q_i)$ 和投影射线之间的间距 h_i 不同,对于分辨率 $P \times Q$ 的离散图像,可以表示为

$$\begin{cases} B_i(P, Q, p_i, q_i) = (Q-1)|p_i| + (P-1)|q_i| + 1 \\ h_i = \frac{1}{\sqrt{p_i^2 + q_i^2}} \end{cases}. \quad (4)$$

投影矢量满足 Katz 引理条件,即

$$\sum_{i=1}^M |p_i| \geq P \quad \text{or} \quad \sum_{i=1}^M |q_i| \geq Q, \quad (5)$$

则最少可通过 M 个投影角度完成精确重建。

通过 Katz 引理确定的极少投影角度的重建会导致投影更新次数过多,使得噪声在迭代求解过程中不断被放大,这极大地影响了重建质量。要减少噪声的累积,需要找到最优的投影方向,使每次迭代所求解出的像素数最多,即重建迭代次数最少。所提出的最优投影组合的确定方法如下:

1) 设重建物体分辨率为 $P \times Q$, 投影探测器分

辨率为 B , 所有的投影矢量组 $\mathbf{R}_{\text{proj}} = (p_i, q_i)$ 必须满足如下条件:

$$\begin{cases} B \geq (Q-1) |p_i| + (P-1) |q_i| + 1, \\ f_{\text{GCD}}(p_i, q_i) = 1, \end{cases} \quad (6)$$

式中: $f_{\text{GCD}}(p_i, q_i) = 1$ 表示 p_i 和 q_i 的最大公约数为 1, 即 p_i 和 q_i 互质。

2) 建立一个与重建物体相同分辨率的全 1 矩阵 \mathbf{A}_{ones} , 并设置一个空的数组 $\mathbf{R}_{\text{opt_proj}}$ 用以存储最优的投影矢量。

3) 根据(1)式计算全 1 矩阵 \mathbf{A}_{ones} 在 \mathbf{R}_{proj} 中不同投影矢量方向下的 Mojette 变换投影, 用 $M'_{p_i, q_i}(b)$ 表示; 计算投影中 $M'_{p_i, q_i}(b) = 1$ 的像素个数; 取像素个数最多的投影矢量为本次迭代所确定的最优投影, 并加入 $\mathbf{R}_{\text{opt_proj}}$ 。

4) 从投影矢量组 \mathbf{R}_{proj} 中删除该投影矢量, 并将全 1 矩阵 \mathbf{A}_{ones} 中对应于 $M'_{p_i, q_i}(b) = 1$ 的像素点赋

值为 0, 即通过该投影矢量重建出的像素在以后的计算中不再考虑。

5) 计算矩阵 \mathbf{A}_{ones} 中所有数值的和, 如果为 0, 表明所有像素都已被重建, 结束投影矢量的选择; 否则重复步骤 2)~5)。

6) $\mathbf{R}_{\text{opt_proj}}$ 为最优的投影矢量组。

2.3 代数迭代重建算法

代数迭代重建算法 (ART) 是层析技术中最常用的重建方法, 对少量投影角度的层析重建具有较高的精度, 抗噪声能力强、灵活性高^[15]。它基于最小范数的准则进行线性方程组的求解, 基本思路是从 f 的一个初始猜测 $f^{(0)}$ 开始, 循环地用约束条件向解空间投影, 当第 k 次迭代时达到预期的收敛条件, 即 $f^{(k)}$ 足够接近真实解 f 时, 迭代将停止。乘型代数迭代算法 (MART) 具有较快的收敛速度。利用 MART 进行求解^[7], 其具体步骤为

$$\begin{cases} f^{(0,0)} = f^{(0)} \\ f_i^{(k,j+1)} = f_i^{(k,j)} \times \left[1 - \frac{\varepsilon \omega_{ij}}{\sum_{i=1}^{P \times Q} (\omega_{ij})^2} \left(1 - \frac{M_j}{\sum_{i=1}^{P \times Q} \omega_{ij} f_i^{(k,j)} \right) \right] \\ f^{(k+1,0)} = f^{(k,B)} \end{cases} \quad 1 \leq j \leq B, \quad (7)$$

式中: $f^{(0)} \neq 0$ 为设定的初始值; $f_i^{(k,j)}$ 的上标表示第 k 次迭代的第 j 条投影射线, 下标 i 表示第 i 个重建网格; B 表示总的投影射线所对应的像素个数; ε 为松弛因子, $\varepsilon \in (0, 1)$; C 为迭代终止阈值, 决定了重建的精度, 当 $|f^{(k)} - f^{(k-1)}| \leq C$ 时, 迭代终止。

3 数值模拟

利用传统层析技术中常用的合成 Shepp-Logan 模型来验证算法的性能。模拟图像的分辨率为 $64 \text{ pixel} \times 64 \text{ pixel}$, 假设探测器的最大像素数为 1024。根据 2.2 节中的方法确定出的最优投影矢量为

$$\begin{cases} \mathbf{p} = (7, -7, 11, -11, 5, -5, 7, -7) \\ \mathbf{q} = (9, 9, 5, 5, 11, 11, 8, 8) \end{cases} \quad (8)$$

利用(1)式计算该投影条件下的 Mojette 变换。为了比较算法在不同噪声水平下的重建质量, 在投影中加入 4 种不同强度的高斯噪声, 噪声均值为 0, 方差 σ 分别为 0.001, 0.002, 0.004, 0.008。

首先, 利用 CBI 进行重建, 结果如图 2 所示。可以看出, 当噪声较小时, CBI 算法能够较好地重建出被测物体; 随着噪声的增大, 重建质量严重恶化。这是由于 CBI 算法为一种完全重建算法, 即当噪声

为 0 时, 可以精确重建出待测物体。噪声的影响会在 CBI 重建过程中进行累积。当噪声较小时, 重建误差也较小; 随着噪声的增大, 重建误差也会增大。

利用 MART 算法进行重建, 结果如图 3 所示。

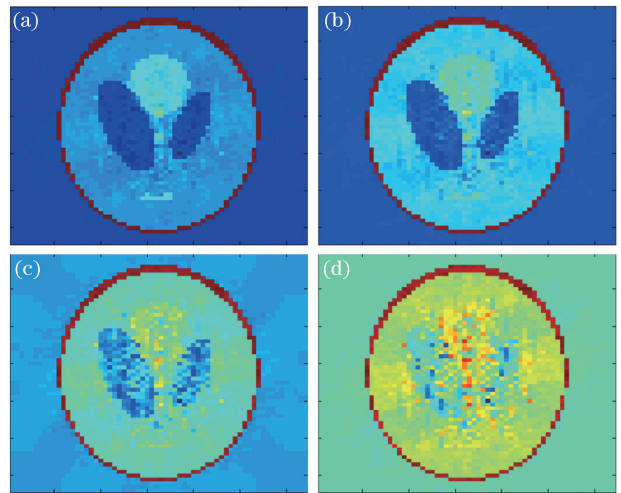


图 2 CBI 重建结果。(a) $\sigma = 0.001$; (b) $\sigma = 0.002$;
(c) $\sigma = 0.004$; (d) $\sigma = 0.008$

Fig. 2 Reconstruction results by CBI. (a) $\sigma = 0.001$;
(b) $\sigma = 0.002$; (c) $\sigma = 0.004$; (d) $\sigma = 0.008$

其中松弛因子 $\epsilon=0.8$, 重建阈值 $C=10^{-4}$ 。结果表明, MART 算法在不同强度噪声条件下具有相同的重建质量。这是由于重建精度由阈值 C 所决定, 一旦重建误差满足阈值条件, 迭代重建就会终止。因此, 如果重建阈值 C 确定, 不同噪声条件下的重建精度是不变的。

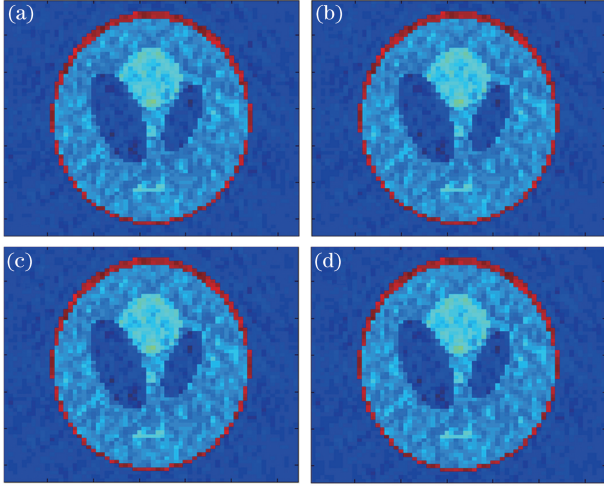


图 3 MART 重建结果。(a) $\sigma=0.001$; (b) $\sigma=0.002$; (c) $\sigma=0.004$; (d) $\sigma=0.008$

Fig. 3 Reconstruction results by MART. (a) $\sigma=0.001$; (b) $\sigma=0.002$; (c) $\sigma=0.004$; (d) $\sigma=0.008$

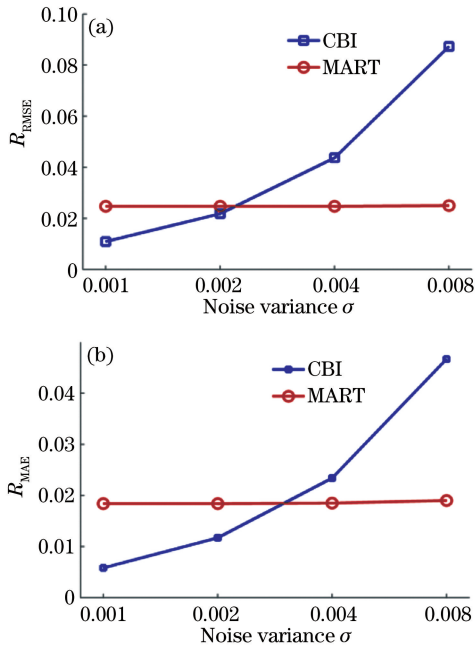


图 4 两种算法的重建误差。(a) RMSE; (b) MAE

Fig. 4 Reconstruction errors by CBI and MART.

(a) RMSE; (b) MAE

为了定量评价算法的重建性能, 在此计算了不同重建结果的均方根误差 (RMSE) 和平均绝对误差 (MAE):

$$\begin{cases} R_{\text{RMSE}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (f_i - f'_i)^2}{N^2}}, \\ R_{\text{MAE}} = \frac{\sum |f_i - f'_i|}{N} \end{cases}, \quad (9)$$

式中: f_i 和 f'_i 分别为原始图像和重建图像中第 i 个像素的像素值; N 为图像中总的像素数。两种算法在不同噪声条件下的重建误差如图 4 所示。结果表明, 当噪声较小时, CBI 算法具有较高的重建精度, 随着噪声的增大, CBI 的重建误差急剧增大, 且 MART 算法在不同强度噪声下的重建误差基本不变。因此, 所提出的 MART 算法具有较强的抗噪性能。

4 实验结果

为了验证该算法的重建质量及精度, 在此对轴对称丙烷火焰进行层析重建。使用轴对称火焰有以下原因: 1) 该实验的目的是检验算法的可行性及精度, 因此需要排除其他因素引起的不确定性, 例如多个相机的位置和强度标定误差, 曝光时间对投影强度的影响等; 2) 算法的重建性能是相同的, 如果能够准确地重建轴对称火焰, 则它也适用于任意燃烧场的测量; 3) 多个相机的层析系统需要解决同步触发、位置标定等关键技术问题, 这将在后面的研究中进行讨论。因此, 重建的实验对象为本生灯所产生的稳定轴对称丙烷火焰。

利用一个电荷耦合器件 (CCD) 相机记录火焰发光强度投影。该 CCD 相机由镜头 (Computar M0814-MP2, CBC 株式会社, 日本, 焦距为 12 mm, 最大孔径为 8.4 mm) 和黑白 CCD 组成 (Guppy Pro F-125B, Allied Vision Technologies, 德国, 分辨率为 $1292 \text{ pixel} \times 964 \text{ pixel}$, 像素尺寸为 $3.75 \mu\text{m}$)。在镜头和 CCD 之间放置一个 $(431.5 \pm 10) \text{ nm}$ 的单波长滤光片, 对中间组分 CH^* 的发光强度进行成像。该相机正对着火焰进行拍摄, 曝光时间为 1 ms。

为了减少重建中的数据量, 提高计算效率, 从拍摄的投影中截取出 238×128 个像素的有效区域进行重建, 如图 5(a) 所示。对不同高度的 4 个火焰横截面进行重建。重建区域被划分为 64×64 的网格, 网格大小为 0.4 mm。首先, 确定最优的投影矢量组, 结果与 (6) 式相同; 其次, 从投影图像中提取出该横截面所对应的一维投影数据, 并利用最小二乘拟合方法将该投影的像素数和投影间隔拓展为与 Mojetette 变换相同; 然后将该投影转换为 Mojetette 变

换投影^[13,16];最后分别利用 CBI 和 MART 算法进行重建,结果如图 5 所示。

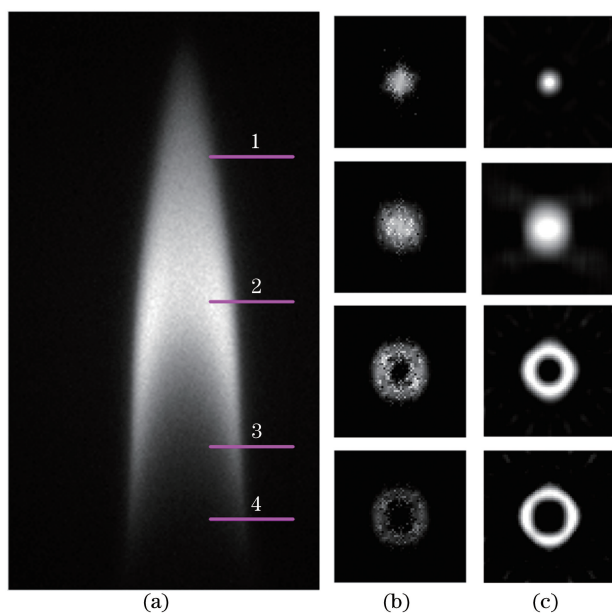


图 5 轴对称火焰重建结果。(a)投影图;(b) CBI 重建;
(c) MART 重建

Fig. 5 Tomographic reconstructions for axisymmetric flame. (a) Projection image; (b) results by CBI; (c) results by MART

由图 5 可以看出,利用 CBI 和 MART 算法都能够较好地重建出火焰的燃烧结构。然而,利用传统 CBI 算法重建的结果中具有较强的离散噪声,而 MART 算法具有更好的重建效果。

5 结 论

为了提高 Mojette 变换层析重建的精度及其抗噪性能,提出了一种基于代数迭代的重建算法。该算法首先基于减少迭代次数的思想确定最佳投影角度,然后结合传统层析技术中的 MART 算法进行重建。该算法的重建精度受阈值所决定,因此在不同噪声水平下都能取得较好的重建结果。与传统 CBI 算法相比,所提的算法更适用于实际测量中存在较大噪声的层析重建。最后,通过对轴对称火焰的层析重建,进一步证实了该算法具有较好的重建质量。

参 考 文 献

- [1] Denisova N, Tretyakov P, Tupikin A. Emission tomography in flame diagnostics[J]. *Combustion and Flame*, 2013, 160(3): 577-588.
- [2] Wan X, Gao Y Q, He X D. Three-dimensional flame temperature field reconstruction with multi-wavelength radiation computed tomography[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, 23(9): 1099-1104.
- [3] 万雄, 高益庆, 何兴道. 多光谱辐射层析重建三维火焰温度场[J]. *光学学报*, 2003, 23(9): 1099-1104.
- [3] Brisley P M, Lu G, Yan Y, *et al.* Three-dimensional temperature measurement of combustion flames using a single monochromatic CCD camera [J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2005, 54(4): 1417-1421.
- [4] Ishino Y, Ohiwa N. Three-dimensional computerized tomographic reconstruction of instantaneous distribution of chemiluminescence of a turbulent premixed flame [J]. *JSME International Journal Series B*, 2005, 48(1): 34-40.
- [5] Floyd J, Geipel P, Kempf A M. Computed tomography of chemiluminescence (CTC): Instantaneous 3D measurements and phantom studies of a turbulent opposed jet flame[J]. *Combustion and Flame*, 2011, 158(2): 376-391.
- [6] Li X S, Ma L. Volumetric imaging of turbulent reactive flows at kHz based on computed tomography [J]. *Optics Express*, 2014, 22(4): 4768-4778.
- [7] Wang J, Song Y, Li Z H, *et al.* Multi-directional 3D flame chemiluminescence tomography based on lens imaging[J]. *Optics Letters*, 2015, 40 (7): 1231-1234.
- [8] Katz M B, Gordon R. Questions of uniqueness and resolution in reconstruction from projections [J]. *Physics Today*, 1979, 32(12): 52-56.
- [9] Guédon J P, Normand N. The Mojette transform: the first ten years [C]. *International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, 2005: 79-91.
- [10] Ji W P, Shen L S. Mojette transform and its applications to image processing[J]. *Measurement & Control Technology*, 2007, 26(3): 68-71.
- [10] 计文平, 沈兰荪. Mojette 变换及其应用[J]. *测控技术*, 2007, 26(3): 68-71.
- [11] Fayad H, Guédon J P, Svalbe I, *et al.* Applying Mojette discrete Radon transforms to classical tomographic data [J]. *Proceedings of SPIE*, 2008, 6913: 69132S.
- [12] Hou W, Zhang C S. Parallel-beam CT reconstruction based on mojette transform and compressed sensing [J]. *International Journal of Computer and Electrical Engineering*, 2013, 5(1): 83-87.
- [13] Li M J. The study on computed tomography image reconstruction algorithm based on compressed sensing theory[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2015.
- [13] 李梦婕. 基于压缩感知理论的计算机层析图像重建

- 算法[D]. 大连: 大连理工大学, 2015.
- [14] Servières M, Normand N, Guédon J P, *et al.* The Mojette transform: discrete angles for tomography [J]. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 2005, 20: 587-606.
- [15] Song Y, Zhang B, He A Z. A novel iterative algorithm for moiré tomography [J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, 26(3): 367-372.
- 宋旸, 张斌, 贺安之. 一种新的叠栅层析迭代算法 [J]. *光学学报*, 2006, 26(3): 367-372.
- [16] Recur B, der Sarkissian H, Servières M, *et al.* Validation of Mojette reconstruction from Radon acquisitions [C]. *IEEE International Conference on Image Processing*, 2013: 1041-1045.