

非对称高斯势二能级体系的跃迁频率和自发辐射率

辛伟, 尹洪武, 额尔敦朝鲁*

河北科技师范学院凝聚态物理研究所, 河北 秦皇岛 066004

摘要 采用 Pekar 变分法研究了双参量非对称高斯势二能级体系中电子态的概率密度、跃迁频率及体纵光学声子自发辐射率, 并讨论了其单参量抛物势近似。数值结果表明: 选用双参量非对称高斯势描写量子点中电子的受限效应能够更恰当地反映电子态的波动性、电子运动的统计规律性及声子自发辐射率的量子化特性, 而其单参量抛物势近似给出的结果较为简单和粗糙。材料的色散及电声耦合对二能级体系中电子态的概率分布、量子跃迁频率和体纵光学声子自发辐射率的影响不能忽略。

关键词 光学器件; 量子点; 非对称高斯势; 色散; 电声耦合; 跃迁频率; 自发辐射率

中图分类号 O469

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201939.1223002

Transition Frequency and Spontaneous Emission Rate in the Asymmetric Gaussian Potential Two-Level System

Xin Wei, Yin Hongwu, Eerdunchaolu*

*Institute of Condensed Matter Physics, Hebei Normal University of Science & Technology,
Qinhuangdao, Hebei 066004, China*

Abstract The probability density, the transition frequency and the longitudinal optical (LO) phonon spontaneous emission rate of electronic states in the two-parameter asymmetric Gaussian (AG) potential two-level system are studied by using the Pekar variational method, and their single-parameter parabolic potential approximation are discussed. Numerical results show that the selecting the two-parameter AG potential to describe the restricted effects of electron in quantum dot can more accurately reveal the quantization characteristics of the wave property of electronic states, the statistical regularity of electron motion and the LO phonons spontaneous emission rate, and the results given by the single parametric parabolic approximation are relatively sample and rough. The influence of dispersion and electron-phonon coupling of materials on the probability distribution, quantum transition frequency and the LO spontaneous emission rate in the two-level system cannot be ignored.

Key words optical devices; quantum dot; asymmetric Gaussian potential; dispersion; electron-phonon coupling; transition frequency; spontaneous emission rate

OCIS codes 230.5590; 250.5590; 270.5585

1 引 言

半导体量子点(QD)以其广阔的应用前景越来越受到人们的重视。电子态对 QD 的光电特性、输运性质等具有重要影响,因而处于 QD 中的电子态备受关注^[1-5]。然而,近年来,人们在量子点电子态的理论研究中,大多都简单地将 QD 当作理想的二维圆形来处理^[6-8]。实际上,QD 的形状与其生长条件有关,实验上已能做出几个分子层厚度的准二维 QD^[9],故把量子点描述成柱形或薄盘结构也许更为

准确^[10-12]。显然,QD 的厚度将对电子态产生哪些影响是一个有待理清的基本问题。QD 是一种准零维体系,位于 QD 中电子的三维受限和电声耦合,是该系统内的两个主要相互作用。对于 QD 中电子的三维受限而言,选取合适的受限势函数极为重要。长期以来,单参量的抛物势常被用来描述 QD 中电子的受限情况^[8,13-14]。然而,抛物势是一种过于简化的理想模型,其结果无疑是比较粗糙的。最近,有一些学者采用高斯势函数来描写电子在低维量子结构中的受限情况^[15-17],这是因为一些实验结果显示

收稿日期: 2019-06-06; 修回日期: 2019-07-13; 录用日期: 2019-08-08

基金项目: 国家自然科学基金(51902085)、内蒙古自治区自然科学基金(2019MS01011)

* E-mail: eerdunchaolu@163.com

电子真实的受限应非抛物形的阱状势^[18],而高斯势阱平滑且具有有限的阱深、阱宽,应该是一个很好的近似。但上述工作均未考虑介质的极化效应。由于低维量子结构具有较强的极化现象,且维度越低极化效应越明显,因此电声耦合强烈地影响着它们的输运及光学性质^[19]。近年来,低维纳米结构中声子效应的研究得到了一些学者的极大关注^[20-22]。然而,不难发现,近几年引入高局限定势研究低维结构中声子效应的工作大多集中于量子阱结构,而在 QD 领域的相关研究甚少。本文研究了双参量非对称高斯势二能级结构中电子的概率密度、跃迁频率及体纵光学(LO)声子自发辐射率的性质,填补了本领域某些研究空白。

2 模型与方法

假设位于厚度为 L 的 QD 中的一个电子,沿 QD 生长方向及其垂直方向分别受到不同局域限定势的作用,并与介质中的 LO 声子相互作用,则 QD 中电声耦合体系的哈密顿量 H 可以写成^[21-22]

$$H = \frac{p^2}{2m_b} + V_P(\rho) + V_G(z) + \sum_k \hbar\omega_{LO} b^\dagger b_k + \sum_k [v_k b_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + v_k^* b_k^\dagger \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})], \quad (1)$$

其中,

$$V_G(z) = \begin{cases} -V_0 \exp\left(-\frac{z^2}{2L^2}\right), & z \geq 0 \\ \infty, & z < 0 \end{cases}, \quad (2)$$

$$V_P(\rho) = \frac{1}{2} m_b \omega_0^2 \rho^2,$$

式中: $V_G(z)$ 和 $V_P(\rho)$ 分别为非对称高斯势函数和抛

物势函数,它们分别表示电子沿 QD 生长方向(z 轴)及其垂直方向(x - y 平面)的受限效应; m_b 、 p 和 $\mathbf{r} = (z, \rho)$ 分别表示电子在晶体能带中的有效质量、动量和坐标, z 和 ρ 分别表示纵向坐标和横向坐标; \hbar 为普朗克常数; ω_{LO} 为 LO 声子频率; b_k^\dagger 和 b_k 分别表示波矢为 \mathbf{k} 的 LO 声子的产生和湮灭算符; v_k 和 v_k^* 分别表示电子与 LO 声子的耦合系数及其复共轭; V_0 为高斯势阱深度(高斯阱深); L 为高斯势阱的宽度; ω_0 表示抛物势的受限强度。

讨论变分函数 $U^{-1} H U$ 在试探波函数 $|\Psi\rangle$ 中的期待值 \bar{H} 的变分极值问题,变分原理表示为

$$\delta \bar{H} = \delta \langle \Psi | U^{-1} H U | \Psi \rangle = 0, \quad (3)$$

这里算符 U 是 Lee-Low-Pines 么正变换^[23]。假设高斯函数近似对体系的基态和第一激发态成立,则依据 Pekar 类型的变分法^[24],体系的基态和第一激发态试探波函数分别选为

$$|\Psi_0\rangle = \sqrt{2\lambda_0} \pi^{-1/4} \exp\left[-\frac{1}{2}\lambda_0^2(\rho^2 + z^2)\right] |0_{ph}\rangle, \quad (4)$$

$$|\Psi_1\rangle = 2\pi^{-1/4} \lambda_1^{3/2} z \exp\left[-\frac{1}{2}\lambda_1^2(\rho^2 + z^2)\right] |0_{ph}\rangle, \quad (5)$$

式中: λ_0 和 λ_1 为变分参数; $|0_{ph}\rangle$ 为 LO 声子的真空态,由 $b_k |0_{ph}\rangle = 0$ 确定。

将(4)、(5)式分别代入(3)式就可确定变分参数,经冗长计算后可分别得到体系的基态能量 $E_0 = \langle \Psi_0 | U^{-1} H U | \Psi_0 \rangle$ 和第一激发态能量 $E_1 = \langle \Psi_1 | U^{-1} H U | \Psi_1 \rangle$ 。由此可以构造一个二能级体系,则处于叠加态的电子的概率密度为

$$|\Psi(\rho, z, t)|^2 = \frac{1}{2} \left| \left[|\Psi_0\rangle \exp\left(-i\frac{E_0}{\hbar}t\right) + |\Psi_1\rangle \exp\left(-i\frac{E_1}{\hbar}t\right) \right] \right|^2 = \pi^{-3/2} \left\{ \lambda_0^3 \exp[-\lambda_0^2(\rho^2 + z^2)] + 2\lambda_1^5 z^2 \exp[-\lambda_1^2(\rho^2 + z^2)] + 2\sqrt{2}\lambda_0^{3/2}\lambda_1^{5/2} z \exp\left[-\frac{1}{2}(\rho^2 + z^2)(\lambda_0^2 + \lambda_1^2)\right] \cos(\omega_{01}t) \right\}, \quad (6)$$

其中,

$$\omega_{01} = \frac{E_1 - E_0}{\hbar} = \omega_{LO} \left\{ \frac{1}{2}(5\lambda_1^2 - 3\lambda_0^2) + \frac{\omega_0^2}{4} \left(\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_0^2} \right) - \frac{V_0}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{2L^2\lambda_1^2} \right)^{-3/2} - \left(1 + \frac{1}{2L^2\lambda_0^2} \right)^{-1/2} \right] - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha \left[\left(\frac{49}{20} + \frac{4}{\pi} \right) \frac{\lambda_1}{3} - \lambda_0 \right] \right\}, \quad (7)$$

式中: ω_{01} 为电子从第一激发态向基态的跃迁频率; α 为电声耦合强度(EPC strength); t 为时间。基于费

米黄金规则和偶级近似,在环境保持低温的情况下,引入声子色散关系 $\omega = \omega_{LO} - \eta c k^2$ (ω 为频率, c 为光

速, η 为色散系数, k 为波矢大小), 可得到 LO 声子的自发辐射率 ω ^[21] 为

$$\omega = \frac{e^2 \omega_{01}}{2\pi c \epsilon_0 \hbar \eta} |\langle \Psi_0 | \mathbf{r} | \Psi_1 \rangle|^2 = \frac{e^2 \omega_{01}}{2\pi c \epsilon_0 \hbar \eta} \frac{16\lambda_0^3 \lambda_1^5}{(\lambda_0^2 + \lambda_1^2)^5} \quad (8)$$

式中: ϵ_0 为真空介电常数; e 为电子电量。

3 结果与讨论

图 1~10 给出了二能级体系中电子的概率密度 $|\Psi(\rho, z, t)|^2$ 、跃迁频率 ω_{01} 和 LO 声子的自发辐射率 ω 曲线, 为了使这些数值曲线呈现的各物理量的变化规律具有普遍性, 图中分别以 ω_{LO} 、 $\hbar\omega_{LO}$ 和 $r_p = \sqrt{\hbar/(2m_b\omega_{LO})}$ 作为频率、能量和长度的单位。

图 1 表示概率密度 $|\Psi(\rho, z, t)|^2$ 在不同高斯阱深 V_0 下随其阱宽 L 的变化, 可以看出, $|\Psi(\rho, z, t)|^2$ 随 L 的变化规律在 L 的不同区域差异较大; 当 $L > 2.0r_p$ 时, $|\Psi(\rho, z, t)|^2$ 随 L 的增加而增大, 这是因为随着 L 增加, 电子的纵向受限减弱, 使得体系的能量 E 随高斯阱宽 L 的增大而减小, 而根据能量最低原理, 电子优先处于较低的能态; 当 L 一定时, $|\Psi(\rho, z, t)|^2$ 随高斯阱深 V_0 的增加而减小, 这是因为随着 V_0 增加, 电子的自陷加大, 致使体系的能量 E 随 V_0 的增加而增大; 当 $L < 2.0r_p$ 时, $|\Psi(\rho, z, t)|^2$ 随 L 的减小而振荡变化, 这一结果与量子力学理论相吻合, 因为电子的受限越强, 电子态的波动性越凸显。

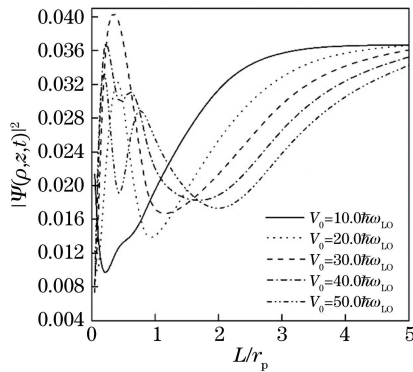


图 1 概率密度 $|\Psi(\rho, z, t)|^2$ 在不同高斯阱深 V_0 下随高斯阱宽 L 的变化

Fig. 1 Probability density $|\Psi(\rho, z, t)|^2$ versus the well width L under different the well depths V_0 of the AG potential

图 2 描绘了概率密度 $|\Psi(\rho, z, t)|^2$ 在不同电声耦合强度 α 下随抛物势范围 R_0 的变化。由图 2 可以看出, R_0 对 $|\Psi(\rho, z, t)|^2$ 的影响比较简单, 尤

其是当 $R_0 > 2.0r_p$ 时, R_0 对 $|\Psi(\rho, z, t)|^2$ 的影响可以忽略, 只有当 $R_0 < 2.0r_p$ 时, $|\Psi(\rho, z, t)|^2$ 才出现了一个弯曲, 这是由单参量抛物势本身过于简单所致。另外, 在给定的 R_0 下, $|\Psi(\rho, z, t)|^2$ 随 α 的增加而减小, 这是因为电声耦合越强, 体系的能量越大。

比较图 1 和图 2 不难看出, 相较于单参量抛物势, 选择双参量高斯势描写 QD 中电子的受限, 能够更恰当地揭示低维纳米结构的量子化特性。

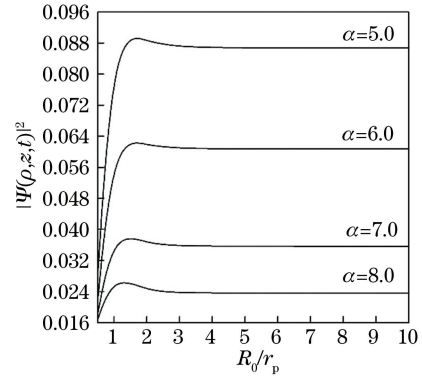


图 2 概率密度 $|\Psi(\rho, z, t)|^2$ 在不同电声耦合强度 α 下随抛物势范围 R_0 的变化

Fig. 2 Probability density $|\Psi(\rho, z, t)|^2$ as a function of the range R_0 of the parabolic potential at different EPC strengths α

图 3 描绘了概率密度 $|\Psi(\rho, z, t)|^2$ 在不同电声耦合强度 α 下随时间 t 的变化。由图 3 可以看出, $|\Psi(\rho, z, t)|^2$ 随 t 呈周期性振荡变化。由(6)式知, $|\Psi(\rho, z, t)|^2$ 的相位变化取决于时间 t 的余弦函数 $\cos \omega_{01}t$, 从物理上讲, 这是电子波动性的一个表现。另外, 从图 3 还可以看出: 各 $|\Psi(\rho, z, t)|^2-t$ 曲线的振幅随 α 的增大而显著减小, 这是因为电声耦合越强, 体系的能量越大, 而根据能量最低原理, 电子优先处于较低的能态; 另外, 各 $|\Psi(\rho, z, t)|^2-t$ 曲线的时间周期也随 α 的增大而显著减小, 这是因为 $|\Psi(\rho, z, t)|^2$ 随 α 的增加而减小, 意味着电子处于 $\Psi(\rho, z, t)$ 态的时间随电声耦合强度的增加而减小, 即 $\Psi(\rho, z, t)$ 态的时间周期缩短。由此可见, 声子效应对 QD 中的电子态具有重要影响。

图 4 揭示了概率密度 $|\Psi(\rho, z, t)|^2$ 在不同高斯阱深 V_0 下随电子纵向坐标 z 的变化。由图 4 可以看出, 在 $z > 2.7r_p$ 的区域, $|\Psi(\rho, z, t)|^2 \approx 0$, 而在 $z < 2.7r_p$ 区域, $|\Psi(\rho, z, t)|^2$ 随 z 的减小显著增大, 并出现起伏。另外, 与图 1 类似, $|\Psi(\rho, z, t)|^2-z$ 曲线的振荡振幅随阱深 V_0 的增加而减小。这些都属于 QD 限定势下处于束缚态电子应有的波动性表

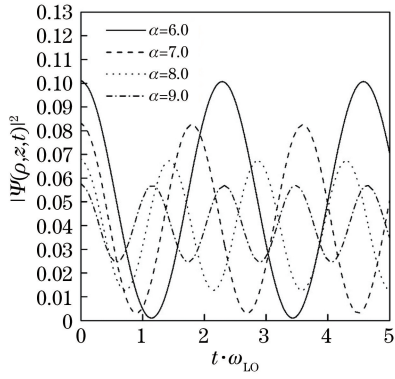


图 3 概率密度 $|\Psi(\rho, z, t)|^2$ 在不同电声耦合强度 α 下随时间 t 的变化

Fig. 3 Probability density $|\Psi(\rho, z, t)|^2$ as a function of the time t at different EPC strengths α

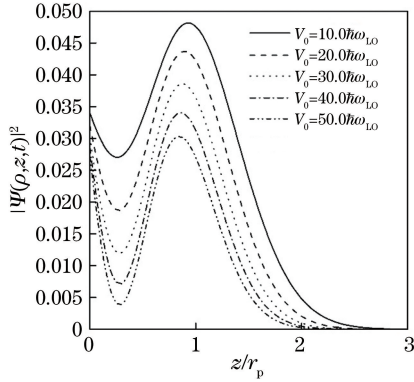


图 4 概率密度 $|\Psi(\rho, z, t)|^2$ 在不同高斯阱深 V_0 下随坐标 z 的变化

Fig. 4 Probability density $|\Psi(\rho, z, t)|^2$ as a function of the coordinate z at different well widths L of the AG potential

现,这也意味着采用高斯势描写电子的受限效应能够充分展现 QD 中电子态的波动性和电子运动的统计规律性。

图 5 表示了电子的跃迁频率 ω_{01} 在不同高斯阱深 V_0 下随高斯阱宽 L 的变化。由图 5 可以看出, ω_{01} 随阱宽 L 的变化呈非对称“高斯分布”,并随高斯阱深 V_0 的增加而增大。量子尺寸效应使得在 L 的不同区域内 ω_{01} 随 L 的变化形式有所不同:当 L 较大时, ω_{01} 随 L 的减小而单调增大至一个最大值,这是因为随着 L 减小,基态电声耦合因粒子纵向运动空间被压缩而增强的幅度大于激发态的幅度,致使能级间隔 $E_1 - E_0$ 随 L 的增加而增大;当 L 较小时, ω_{01} 随 L 的减小而迅速减小,这是因为当 L 较小时随 L 的减小 3D 将转变为 2D,这时 LO 声子数锐减且不再起主导作用,导致 $E_1 - E_0$ 迅速减小。另外,在 L 一定时, ω_{01} 随 V_0 的增加而增大,这是由 E_1

$-E_0$ 随 V_0 的增加而增大所致。

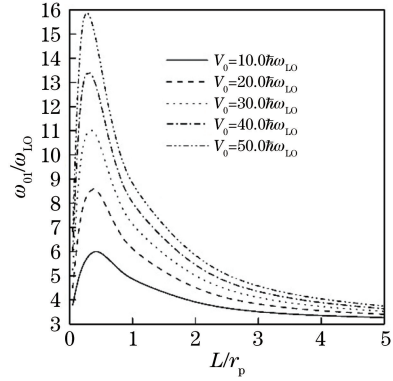


图 5 跃迁频率 ω_{01} 在不同高斯阱深 V_0 下随高斯阱宽 L 的变化

Fig. 5 Transition frequency ω_{01} versus the well width L under different the well depths V_0 of the AG potential

图 6 描绘了跃迁频率 ω_{01} 在不同耦合强度 α 下随抛物势范围 R_0 的变化规律。由图 6 可以看出, ω_{01} 随 R_0 的减小而增大,这是因为随着束缚势范围减小,电子在 x - y 平面内的受限增大。不过与图 2 类似, ω_{01} 随 R_0 减小而增大只有在 $R_0 < 1.5r_p$ 区域比较明显,而当 $R_0 > 1.5r_p$ 时, ω_{01} 无明显变化。另外,在给定的 R_0 下, ω_{01} 随 α 的增加而增大,这是因为激发态的电声耦合比基态的电声耦合弱,因而能级差 $E_1 - E_0$ 随电声耦合强度的增加而增大。

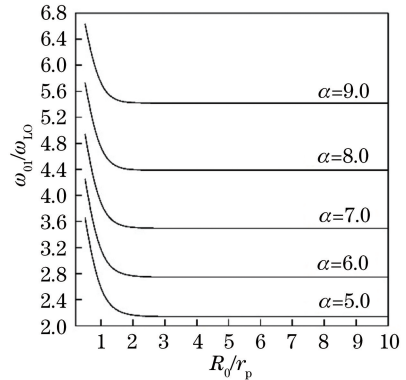


图 6 跃迁频率 ω_{01} 在不同电声耦合强度 α 下随抛物势范围 R_0 的变化

Fig. 6 Probability density $|\Psi(\rho, z, t)|^2$ versus the the range R_0 of the parabolic potential under different EPC strengths α

图 7 给出了声子自发辐射率 ω 在不同电声耦合强度 α 下随高斯阱宽 L 的变化。由图 7 可以看出, ω 随阱宽 L 的变化呈非对称“高斯分布”,并随 α 的增大而减小。即:在一个较小 L (记作 L_{th} , $0.5r_p < L_{th} < 0.8r_p$) 处出现 ω 的最大值(峰值)

ω_{\max} : 当 $L > L_{th}$ 时, ω 随 L 的减小而显著增大, 表明高斯阱宽越窄, 量子限定效应越强, 致使电声耦合减弱, 进而使声子自发辐射易发; 当 $L < L_{th}$ 时, ω 随 L 的减小而迅速减小, 这是因为随着 L 减小, QD 趋近二维结构, 使得其中的 LO 声子数迅速减少。另外, 在给定的 L 下, ω 随 α 的增加而减小, 这是因为电声耦合越强, 声子模的自陷越深, 声子的状态稳定, 这与文献[13]的结论一致。

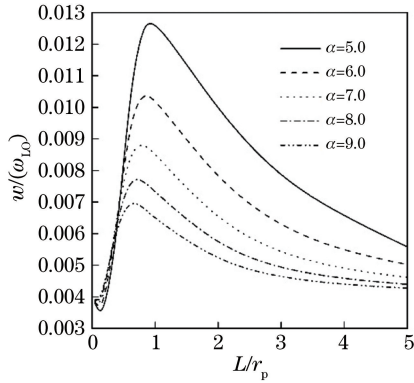


图 7 自发辐射率 ω 在不同电声耦合强度 α 下随高斯阱宽 L 的变化

Fig. 7 Spontaneous emission rate ω as a function of the well width L of the AG potential at different EPC strengths α

图 8 显示了声子自发辐射率 ω 在不同高斯阱深 V_0 下随高斯阱宽 L 的变化。由图 8 可以看出, ω 随 V_0 的增加而增大, 这表明越深的高斯势阱对电子的限制效应越强, 越能削弱电声耦合, 进而增大声子的自发辐射率。

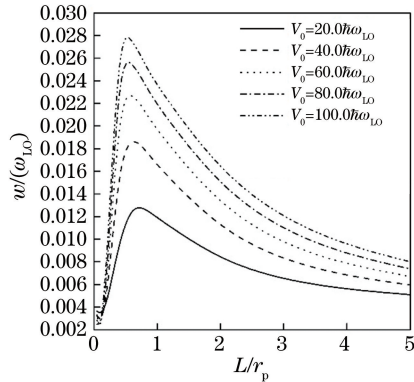


图 8 自发辐射率 ω 在高斯势不同阱深 V_0 下随阱宽 L 的变化

Fig. 8 Spontaneous emission rate ω versus the well width L under different the well depths V_0 of the AG potential

图 9 显示出了声子自发辐射率 ω 在不同电声耦合强度 α 下随抛物势范围 R_0 的变化规律。由图

9 可以看出, ω 随 R_0 的减小而增大, 这是因为 R_0 越小, 意味着电子的横向受限越强, 越能减弱电声耦合, 进而增大声子的自发辐射率。由图 9 还可以看出, ω 随 R_0 的减小而增大的幅度只在 $R_0 < 2.5r_p$ 区域内显著, 当 $R_0 > 2.5r_p$ 时 ω 的变化不明显。比较图 9 与图 7、8 不难看出, 与双参量非对称高斯势给出的声子自发辐射规律 ($\omega-L$) 相比, 单参量抛物势给出的声子自发辐射规律 ($\omega-R_0$ 曲线) 显得简单、粗糙。不过, 当两种限定势范围 (R_0 和 L 的取值) 较大时, 二者的变化规律相同。其根本原因是, 非对称高斯势 $V_G(z) = -V_0 \exp[-z^2/(2L^2)]$ 在 $z/L \ll 1$ 条件下的一级近似就是抛物势 $V_p(z) = V_0 z^2/(2L^2)$ 。

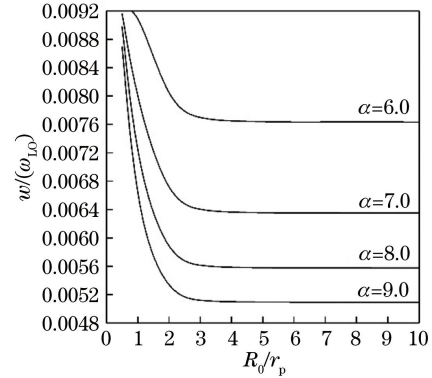


图 9 自发辐射率 ω 在不同电声耦合强度 α 下随抛物势范围 R_0 的变化

Fig. 9 Spontaneous emission rate ω as a function of the range R_0 of the parabolic potential at different EPC strengths α

图 10 给出了声子自发辐射率 ω 在不同色散系数 η 下随高斯阱宽 L 的变化规律。由图 10 可以看出, ω 随 η 的增加而减小, 这一结果与文献[13]的

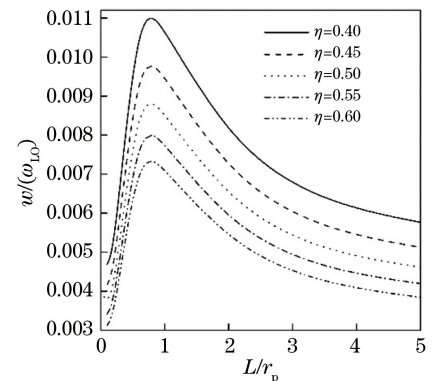


图 10 自发辐射率 ω 在不同色散系数 η 下随高斯阱宽 L 的变化

Fig. 10 Spontaneous emission rate ω as a function of the well width L of the AG potential at different the dispersion coefficients η

结论一致。色散系数 η 是材料本身的特征参量,因此,如果需要获得较大声子自发辐射率的 QD,就应选择色散系数 η 较大的材料来制备 QD,反之,就应选择色散系数 η 较小的材料来制备 QD。

4 结 论

选取非对称高斯限定势阱来描写量子点中电子在晶体生长方向的限定效应,结果表明:电子的概率密度随非对称高斯阱宽 L 的减小而显著振荡,随电子纵向坐标发生振荡变化,随时间作周期性振荡,随电声耦合强度的增加而减小;电子的跃迁频率和声子自发辐射率随非对称高斯阱宽的变化均呈非对称“高斯分布”,并随高斯阱深的增加而增大;电子的跃迁频率随耦合强度的增加而增大,而声子自发辐射率则随耦合强度或色散系数的增加而减小。本文结果将有助于揭示材料的色散和电声耦合影响以量子点为载体的二能级体系性质的机理。

参 考 文 献

- [1] Xue Y Z, Chen Z S, Ni H Q, *et al.* Resonantly driven exciton Rabi oscillation in single quantum dots emitting at 1300 nm[J]. Chinese Physics B, 2017, 26(8): 084202.
- [2] Li B X, Zheng J, Chi F. Rectification effect of the heat generation by electric current in a quantum dot molecular[J]. Chinese Physics Letters, 2014, 31(5): 057302.
- [3] Yao Q Z, Chen S H. Polaronic correction to the ground state energy and effective mass in a two- and three-dimensional quantum dot[J]. Journal of Low Temperature Physics, 2011, 162(1/2): 34-39.
- [4] Yang W H, Wang H L, Wang Z X, *et al.* Wavelength conversion efficiency of quantum dot semiconductor optical amplifier [J]. Acta Optica Sinica, 2017, 37(4): 0406005.
杨文华, 王海龙, 王兆翔, 等. 量子点半导体光放大器的波长转换效率[J]. 光学学报, 2017, 37(4): 0406005.
- [5] Wan J N, Lin Y, Zhong Y, *et al.* Effect of gold nanoparticles on fluorescence spontaneous emission of quantum dots[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2018, 55(7): 071601.
万佳宁, 林雨, 钟莹, 等. 金纳米颗粒对量子点荧光自发辐射的影响[J]. 激光与光电子学进展, 2018, 55(7): 071601.
- [6] Li W P, Xiao J L, Yin J W, *et al.* The energy levels of a two-electron two-dimensional parabolic quantum dot[J]. Chinese Physics B, 2010, 19(4): 047102.
- [7] Chen Y J, Xiao J L. Influences of the temperature on the parabolic quantum dot qubit in the magnetic field [J]. Journal of Low Temperature Physics, 2017, 186(3/4): 241-249.
- [8] Sun Y, Ding Z H, Xiao J L. Effects of temperature and magnetic field on the coherence time of a RbCl parabolic quantum dot qubit[J]. Journal of Electronic Materials, 2017, 46(1): 439-442.
- [9] Medeiros-Ribeiro G, Leonard D, Petroff P M. Electron and hole energy levels in InAs self-assembled quantum dots [J]. Applied Physics Letters, 1995, 66(14): 1767-1769.
- [10] Kash K, Scherer A, Worlock J M, *et al.* Optical spectroscopy of ultrasmall structures etched from quantum wells [J]. Applied Physics Letters, 1986, 49(16): 1043-1045.
- [11] Reed M, Randall J, Aggarwal R, *et al.* Observation of discrete electronic states in a zero-dimensional semiconductor nanostructure [J]. Physical Review Letters, 1988, 60(6): 535-537.
- [12] Chen C Y, Li W S, Teng X Y, *et al.* Polaron in a quantum disk [J]. Physica B: Condensed Matter, 1998, 245(1): 92-102.
- [13] Yin J W, Xiao J L, Yu Y F, *et al.* The effect of Coulomb potential to the decoherence of the parabolic quantum dot qubit[J]. Acta Physica Sinica, 2008, 57(5): 2695-2698.
尹辑文, 肖景林, 于毅夫, 等. 库仑势对抛物量子点量子比特消相干的影响[J]. 物理学报, 2008, 57(5): 2695-2698.
- [14] Bai X F, Xin W, Yin H W, *et al.* The properties of the ground state of the Fröhlich bipolaron with Rashba spin-orbit coupling in a quantum dot [J]. International Journal of Theoretical Physics, 2017, 56(5): 1673-1684.
- [15] Zhang Z H, Zou L L, Liu C L, *et al.* Electric field effect on the nonlinear optical properties in asymmetrical Gaussian potential quantum wells[J]. Superlattices and Microstructures, 2015, 85: 385-391.
- [16] Guo A X, Du J F. Linear and nonlinear optical absorption coefficients and refractive index changes in asymmetrical Gaussian potential quantum wells with applied electric field [J]. Superlattices and Microstructures, 2013, 64: 158-166.
- [17] Xie W. Two interacting electrons in a Gaussian confining potential quantum dot [J]. Solid State Communications, 2003, 127(5): 401-405.
- [18] Gu J, Liang J Q. Energy spectrum analysis of donor-center quantum dots[J]. Acta Physica Sinica, 2005, 54(11): 5335-5338.

- 谷娟, 梁九卿. 施主中心量子点能谱分析[J]. 物理学报, 2005, 54(11): 5335-5338.
- [19] Hai G Q, Peeters F M, Devreese J T. Polaron-cyclotron-resonance spectrum resulting from interface- and slab-phonon modes in a GaAs/AlAs quantum well[J]. Physical Review B, 1993, 47(16): 10358-10374.
- [20] Xiao W, Qi B, Xiao J L. Impurity effect of asymmetric Gaussian potential quantum well qubit [J]. Journal of Low Temperature Physics, 2015, 179 (3/4): 166-174.
- [21] Fotue A J, Kenfack S C, Tiotsop M, *et al.* Temperature, impurity and electromagnetic field effects on the transition of a two-level system in a triangular potential [J]. The European Physical Journal Plus, 2016, 131(4): 75.
- [22] Miao X J, Sun Y, Xiao J L. Effect of impurities on the properties of bound polarons in an asymmetric Gaussian confinement potential quantum well [J]. Journal of the Korean Physical Society, 2015, 67(7): 1197-1200.
- [23] Lee T D, Low F E, Pines D. The motion of slow electrons in a polar crystal [J]. Physical Review, 1953, 90(2): 297-302.
- [24] Pekar S I. Untersuchungen uber die elektronentheorie der kristalle[M]. Berlin: Akademie-Verlag, 1954.