

# 基于双参数阈值函数和多层阈值的 X 射线 脉冲星信号消噪

高迎东\*, 王宏力, 由四海, 冯磊, 何贻洋

火箭军工程大学导弹工程学院, 陕西 西安 710025

**摘要** 在利用小波变换解决脉冲星含噪信号去噪问题时, 阈值的选择及阈值函数的构建决定去噪效果的优劣。首先结合小波变换的性质分析噪声小波分解系数的分布特性, 并结合软、硬阈值函数的构造特点构建了一种非线性的双参数阈值函数; 通过粒子群算法优化参数大小以使阈值函数可自适应地改变位置和弯曲程度, 进而得到良好的阈值函数去噪模型; 在分析噪声小波分解系数随分解层变化特点的基础上, 对统一阈值选取策略进行改进, 引入梯度衰减因子构造一种基于各分解层噪声均方差的阈值选取方法。实验结果表明, 相比于传统小波域消噪方法, 本文方法可以明显改善 X 射线脉冲星含噪信号的信噪比、峰值信噪比以及峰位误差, 为 X 射线脉冲星信号去噪提供了新思路。

**关键词** 探测器; X 射线脉冲星; 粒子群优化算法; 双参数阈值函数; 多层阈值

中图分类号 V448.2

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201939.1204001

## X-Ray Pulsar Signal Denoising Based on Two-Parameter Threshold Function and Multi-Layer Threshold

Gao Yingdong\*, Wang Hongli, You Sihai, Feng Lei, He Yiyang

College of Missile Engineering, Rocket Force University of Engineering, Xi'an, Shaanxi 710025, China

**Abstract** When we use wavelet transform to solve the denoising problem in pulsar noise signal, the choice of threshold and construction of threshold function determine the denoising effect. Herein, we analyze the distribution characteristics of noise wavelet decomposition coefficients by combining the wavelet transform properties. We construct a nonlinear two-parameter threshold function by combining the structural characteristics of the soft threshold and hard threshold functions. Furthermore, we use particle swarm algorithm to optimize the parameter size to change the position and bending degree of the threshold function adaptively, thereby obtaining a good threshold function denoising model. Based on the analysis on the variation in the noise wavelet decomposition coefficient with decomposition layer, the unified threshold selection strategy is improved. Then, a gradient attenuation factor is introduced to construct a threshold selection method based on the noise mean square error of each decomposition layer. The experimental results show that, compared to the traditional wavelet domain denoising method, the proposed method significantly improves the signal-to-noise ratio, peak signal-to-noise ratio, and peak-to-bit error of X-ray pulsar noise signals, supporting the new ideas of X-ray pulsar signal denoising.

**Key words** detectors; X-ray pulsar; particle swarm optimization algorithm; two-parameter threshold function; multi-layer threshold

**OCIS codes** 040.7480; 250.0040; 120.1880

## 1 引 言

X 射线脉冲星辐射的光子脉冲信号是一种典型的非平稳信号, 但由于受到 X 射线源散点噪声、宇宙背景噪声、太阳风暴等噪声的影响, 观测得到的 X

射线脉冲星信号需要经消噪处理才能被使用。小波变换作为一种多尺度时频分析的工具, 特别适合于非平稳信号的处理与分析<sup>[1]</sup>。

1994 年, Donoho 等<sup>[2]</sup>提出小波阈值去噪的概念, 利用小波阈值去除 X 射线脉冲星信号噪声的关

收稿日期: 2019-06-20; 修回日期: 2019-07-15; 录用日期: 2019-08-08

基金项目: 国家自然科学基金青年基金(61503391)、中国博士后科学基金(2017M613372)

\* E-mail: 15953169273@163.com

键在于阈值的选取以及阈值函数的确定。在阈值选取方面,最常用的有固定阈值、启发式阈值、极大极小阈值以及无偏风险估计阈值。朱晓明等<sup>[3]</sup>在固定阈值的基础上引入噪声均方差系数,达到了既净化脉冲星含噪信号又不丢失高频有用信息的目的,然而文中并未考虑噪声小波系数随分解层的增加而减小的因素<sup>[4]</sup>。目前脉冲星信号小波阈值去噪常用的阈值函数有软阈值函数、硬阈值函数以及软硬阈值折中函数<sup>[5]</sup>。硬阈值函数对小于阈值的小波系数全部置0,对大于阈值的小波系数进行保留,这种“一刀切”的处理策略势必会使得重构后的信号产生局部抖动,会在整个小波域内产生突变。软阈值函数将所有大于阈值的小波系数都减去一个阈值量,该函数虽然克服了硬阈值函数在阈值处不连续的缺点,但由于在整个小波域内小波系数改动较大,使得去噪后脉冲星信号的峰值信噪比较低。软硬阈值折中函数可以通过调节参数变成软阈值函数或硬阈值函数,其参数值控制了函数的位置,使其更能适应不同的含噪信号,但从本质上来讲,软硬阈值折中函数仍是软阈值函数或者硬阈值函数的一种推广,也属于对噪声小波系数进行线性去噪的范畴。近些年,随着二代小波的兴起,也有学者研究了基于二代小波变换的 X 射线脉冲星信号降噪问题<sup>[6]</sup>,由于二代小波不依赖于 Fourier 变换,而是在时域中完成对双正交小波的构造,相对于一代小波而言,二代小波算法简单,运算速度快,占用内存少,但是在改善信噪比方面并不明显。

鉴于噪声小波分解系数在阈值附近占比不可预测、其值依分解层的增大而变小的特点,以及当前利用小波变换解决脉冲星信号去噪的诸多问题,本文构建一种基于粒子群优化算法的双参数阈值函数,并提出一种基于各层噪声均方差的阈值选取方法。实验表明,采用本文方法去噪后的脉冲轮廓较其他方法更平滑、峰值误差更小、峰值信噪比更高。

## 2 小波阈值法去噪原理

对能量有限的信号  $f(x)$ ,其连续小波变换定义为

$$T_f(a, \tau) = \langle f(x), \varphi_{a,\tau}(x) \rangle = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbf{R}} f(x) \varphi^* \left( \frac{x-\tau}{a} \right) dx, \quad (1)$$

$$\varphi_{a,\tau}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \varphi \left( \frac{x-\tau}{a} \right), \quad (2)$$

式中:  $\forall f(x) \in L^2(\mathbf{R})$ ,其中  $x$  为自变量,  $\mathbf{R}$  为全体

实数,  $L^2(\mathbf{R})$  为 Hilbert 空间;  $\varphi_{a,\tau}(x)$  为小波基函数,其中  $a$  为伸缩因子,  $\tau$  为平移因子,通过  $a$  和  $\tau$  的连续变换来改变基函数的形状和位置,达到对  $f(x)$  进行时频分析的目的;  $\varphi^* \left( \frac{x-\tau}{a} \right)$  为  $\varphi \left( \frac{x-\tau}{a} \right)$  的共轭;  $T_f(a, \tau)$  为对函数  $f$  进行参数为  $a$  和  $\tau$  的小波变换;  $\frac{1}{\sqrt{|a|}} \varphi \left( \frac{x-\tau}{a} \right)$  为小波基函数  $\varphi_{a,\tau}(x)$  的表达式,  $\varphi$  可代表任意一种小波函数。由于计算机处理的信号多为离散信号,因此需要对伸缩因子  $a$  与平移因子  $\tau$  进行离散处理,进而得到离散小波变换,即

$$T_f(a_0^m, k\tau_0) = \langle f(x), \varphi_{a_0^m, k\tau_0}(x) \rangle = a_0^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbf{R}} f(x) \varphi^* (a_0^{-m} x - k\tau_0) dx, \quad (3)$$

式中:  $a = a_0^m$ ,  $\tau = ka_0^m \tau_0$ ,通常取  $a_0 = 2$ ,  $\tau_0 = 1$ ;  $m$  与  $a_0$  是将连续的伸缩因子  $a$  进行离散化的表示量,其中当  $a_0 = 2$  时,代表二进离散方案,与之对应的  $\tau_0$  设置为 1 是为使平移因子  $\tau$  可以得到与离散的伸缩因子  $a$  相对应的离散数据;  $k$  是连续的平移因子  $\tau$  进行二进离散时可调的参考系数。依系数不同,所选取的  $\tau$  的离散数据亦不同,以此得到性质较好的二进离散方案,即

$$T_f(m, k) = \langle f(x), \varphi_{m,k}(x) \rangle = 2^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbf{R}} f(x) \varphi^* (2^{-m} x - k) dx. \quad (4)$$

将信号  $f(x)$  与小波基函数  $\varphi_{m,k}(x)$  作内积得到的结果作为小波分解系数,常用  $w_{j,k}$  表示,即

$$w_{j,k} = T_f(m, k), \quad (5)$$

式中:  $j$  为小波分解的分解层。

通常,脉冲星信号中的噪声主要来自于宇宙背景噪声,噪声信号与有用信号满足可加性,则含噪脉冲星信号可以表示为

$$f(x) = s(x) + e(x), \quad (6)$$

式中:  $s(x)$  为有用信号;  $e(x)$  为噪声信号。依次对  $f(x)$ 、 $s(x)$ 、 $e(x)$  进行二进离散小波变换,得到小波分解系数  $w_{j,k}$ 、 $u_{j,k}$ 、 $v_{j,k}$ ,由于小波变换是一种线性变换,因而得到的小波分解系数满足

$$w_{j,k} = u_{j,k} + v_{j,k}. \quad (7)$$

由于噪声在整个频率段内均有分布,因此  $v_{j,k}$  在整个小波域内均存在且幅值较小,而有用信号的能量较为集中,因此  $v_{j,k}$  只在某些特定的点  $(j, k)$  处才存在且幅值较大。基于这一思想,可以在小波域内确定一个合适的阈值  $\lambda$ ,使较小幅值的  $w_{j,k}$  被置 0,而保留较大幅值的  $w_{j,k}$ ,则可以去除只由噪声信号构成的小

波系数,而后重构小波系数得到去噪后的信号<sup>[7]</sup>。

从以上的分析中不难看出,利用小波阈值法对含噪 X 射线脉冲星信号进行去噪的关键是阈值的确定和阈值函数的构建。如果阈值设置得过大,会将含有有用信号的小波系数也置 0,形成过扼杀;设置得过小则不能有效去除噪声的小波系数;当阈值设置得当时,需要合理构建阈值函数模型,使大于阈值的噪声小波系数得到有效去除。

### 3 基于粒子群算法的双参数阈值函数

#### 3.1 双参数阈值函数的构建

阈值函数的构建是小波去噪的核心内容。阈值函数值实质上是含噪小波系数的估计值,阈值函数表征了采用何种方式得到估计的小波系数。由于信号是连续的,相关性强且能量集中,所以由信号产生的小波系数常常集中在少数幅值较大的系数中,而噪声由于频率、能量谱相对分散,所以小波系数幅值较小。而小波变换作为一种线性变换,使得含噪小波系数  $w_{j,k}$  可分解为信号小波系数  $u_{j,k}$  与噪声小波系数  $v_{j,k}$  的和<sup>[(7)式]</sup>,只需设置阈值  $\lambda$  将  $v_{j,k}$  去除即可。如:硬阈值函数对大于阈值的含噪小波系数不作处理;软阈值函数对大于阈值的含噪小波系数减去一个阈值量  $\lambda$  后进行保留;软硬阈值折中函数对大于阈值的含噪小波系数减去一个介于 0 和  $\lambda$  之间的量后进行保留。硬阈值函数、软阈值函数、软硬阈值折中函数表达式分别为

$$\hat{w}_{j,k}^1 = \begin{cases} w_{j,k}, & |w_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |w_{j,k}| < \lambda \end{cases}, \quad (8)$$

$$\hat{w}_{j,k}^2 = \begin{cases} \text{sgn}(w_{j,k}) \cdot (|w_{j,k}| - \lambda), & |w_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |w_{j,k}| < \lambda \end{cases}, \quad (9)$$

$$\hat{w}_{j,k}^3 = \begin{cases} \text{sgn}(w_{j,k}) \cdot (|w_{j,k}| - a\lambda), & |w_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |w_{j,k}| < \lambda \end{cases}, \quad (10)$$

式中: $\hat{w}_{j,k}^1$ 、 $\hat{w}_{j,k}^2$ 、 $\hat{w}_{j,k}^3$  分别为小波分解系数  $w_{j,k}$  经硬阈值函数、软阈值函数、软硬阈值折中函数的估计值;  $\text{sgn}(\cdot)$  为符号表示式,当  $w_{j,k} > 0$  时,  $\text{sgn}(w_{j,k}) = 1$ ,当  $w_{j,k} < 0$  时,  $\text{sgn}(w_{j,k}) = -1$ 。它们的函数图像如图 1 所示。图 1 纵轴表示信号经软

阈值函数、硬阈值函数、软硬阈值折中函数的小波分解系数的估计值。

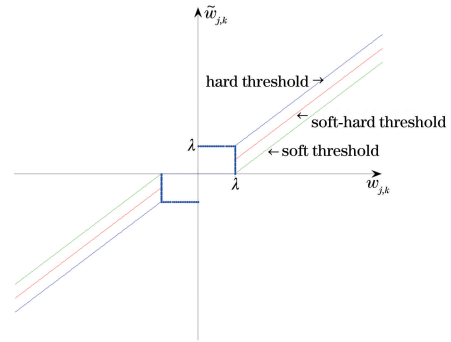


图 1 软阈值函数、硬阈值函数、软硬阈值折中函数对比图  
Fig. 1 Comparison of soft threshold function, hard threshold function, and soft and hard threshold compromise function

从以上分析可知,三种阈值函数对大于阈值的含噪小波系数均是线性处理。而噪声小波系数与有用信号小波系数在大多数情况下都不是线性关系,比如高斯白噪声的小波分解系数也是高斯白噪声分布的。虽然这种分布特性的噪声小波系数在某一点处的值无法预测,但是随着含噪小波系数的增大,信号部分的小波系数占比越来越大,即所估计的系数值  $\hat{w}_{j,k}$  应趋近于真实值  $w_{j,k}$ 。构造的阈值函数应满足如下条件:

- 1) 在整个定义域内,阈值函数应关于原点对称,以保证对全部含噪小波系数进行同样的处理;
- 2) 在小于阈值的定义域内,函数估计值应为零;
- 3) 在大于阈值的定义域内,阈值函数单调且连续,以保证能对经小波变换后的系数进行反变换,进而恢复原信号;
- 4) 在阈值处,函数估计值可调,以补偿由阈值估计带来的误差影响;
- 5) 在大于阈值  $\lambda$  的邻域  $\Delta$  范围内,阈值函数应以一个可自适应调节的速度趋近于硬阈值函数,即  $\hat{w}_{j,k} \rightarrow w_{j,k}$ ;
- 6) 在大于  $\lambda + \Delta$  的定义域内,阈值函数应以较快的速度趋近于  $y = x$  渐近线。

在满足上述条件的基础上,利用软阈值函数、硬阈值函数、指数型阈值函数、软硬折中阈值函数构造的双参数阈值函数为

$$\hat{w}_{j,k} = \begin{cases} \text{sgn}(w_{j,k}) \cdot \left\{ |w_{j,k}| - c \frac{\lambda}{\exp[(|w_{j,k}| - \lambda)/(b \times \lambda)]} \right\}, & |w_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |w_{j,k}| < \lambda \end{cases}, \quad (11)$$

式中： $c$ 、 $b$  为阈值函数调节因子。其中  $c$  的作用是补偿由阈值设置不当而产生的误差， $b$  是阈值函数形状调节因子，通过调节  $b$  来解决噪声小波系数的比重随含噪小波系数的增大而减小的问题。其中  $0 \leq c \leq 1, 0 < b \leq 10$ 。当  $c=0$  时，此阈值函数变为硬阈值函数；当  $c=1$  时，阈值函数变为指数型阈值函数；当  $0 < c < 1$  时，此阈值函数变为类软硬阈值折中函数。当  $b > 10$  时，阈值函数形状改变不明显，其起始端处的斜率严格小于 1.1，这不仅会增加  $b$  的搜索范围，而且信噪比改善量微乎其微，使得阈值函数变为只受因子  $c$  控制的类软硬阈值折中函数，从而失去  $b$  的调节作用。下面通过数学公式来分析此阈值函数和调节因子  $c$ 、 $b$  的作用。

为简单起见，这里仅讨论  $w_{j,k} > 0$  且  $w_{j,k} \geq \lambda$  的情况，对于  $w_{j,k} < 0$  且  $-w_{j,k} \geq \lambda$  的情况亦然，假设  $w_{j,k}$  连续，则(11)式变为

$$\hat{w}_{j,k} = w_{j,k} - c \frac{\lambda}{\exp[(w_{j,k} - \lambda)/(b \times \lambda)]} \quad (12)$$

对  $w_{j,k}$  进行求导，得

$$\frac{d\hat{w}_{j,k}}{dw_{j,k}} = y' = 1 + \frac{c}{b} \times \exp\left(-\frac{w_{j,k} - \lambda}{b\lambda}\right), \quad (13)$$

式中： $y'$  是估计小波分解系数  $\hat{w}_{j,k}$  关于真实小波系数的一阶导  $w_{j,k}$ 。

因为  $\exp\left(-\frac{w_{j,k} - \lambda}{b\lambda}\right) \geq 0$ ，所以  $y' \geq 1$ ，当  $w_{j,k} \rightarrow +\infty$  时取 1，则此阈值函数的斜率将趋近于 1。当  $w_{j,k} = \lambda$  时， $\hat{w}_{j,k} = \lambda - c\lambda$ ，因为  $0 \leq c \leq 1$ ，可知当  $c=0$  和  $c=1$  时分别成为硬阈值函数和软阈值函数。当纯净信号所产生的小波系数  $u_{j,k}$  远大于噪声所产生的小波系数  $v_{j,k}$  时，则由噪声均方差估计的阈值  $\lambda$  也将远小于  $u_{j,k}$ 。当利用软阈值函数对此类含噪信号进行消噪时，由于在阈值  $\lambda$  处对估计的小波系数置 0，势必会使结果产生较大的方差及偏差，而当  $u_{j,k}$  与  $v_{j,k}$  相近时，利用硬阈值函数估计也会造成结果的不准确，因此需要设置调节因子  $c$ 。当  $0 < c < 1$  时，此阈值函数在  $\lambda$  附近的估计值介于软阈值函数与硬阈值函数之间，因此在不清楚噪声成分，即  $v_{j,k}$  在  $u_{j,k}$  中的占比时，通过调节  $c$  的值可以找到最佳  $u_{j,k}$  与  $v_{j,k}$  的比例，进而得到比较软、硬阈值函数更好的去噪效果。图 2 是  $b=1$  时， $c$  分别为 0.3、0.5、0.8 时的阈值函数图。

当  $c$  固定，讨论  $b$ ，其中  $0 < b \leq 10$ ，则

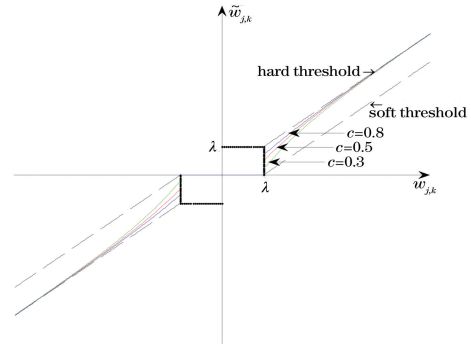


图 2  $b=1$  时， $c$  分别为 0.3、0.5、0.8 时的双参数阈值函数  
Fig. 2 Two-parameter threshold function when  $b=1$  and  $c=0.3, 0.5, 0.8$

$$y' = 1 + \frac{c}{b} \times \exp\left(-\frac{w_{j,k} - \lambda}{b\lambda}\right). \quad (14)$$

为方便后续表示，将  $\frac{1}{b}$  用  $y_1$  表示，将  $\exp\left(-\frac{1}{b}\right)$

用  $y_2$  表示，分别对两式进行求导，有  $y'_1 = -\frac{1}{b^2}$ ，

$y'_2 = \frac{1}{b^2} \exp\left(-\frac{1}{b}\right)$ 。因为  $b > 0$ ，所以  $0 <$

$\exp\left(-\frac{1}{b}\right) < 1, \frac{1}{b^2} > \frac{1}{b^2} \exp\left(-\frac{1}{b}\right)$ 。

由此可知随着  $b$  的减小， $y_1$  减小的速率要大于  $y_2$  ( $y_1$  与  $y_2$  仅是  $\frac{1}{b}$  与  $\exp\left(-\frac{1}{b}\right)$  的简化表示，无特

殊物理意义) 增加的速率，因此，当  $c$ 、 $w_{j,k}$ 、 $\lambda$  均不改变时， $y'$  随着  $b$  的减小而减小。注意到，在  $w_{j,k} = \lambda$

时， $y' = 1 + c/b$ ，即  $b$  越小，对应的起始位置处的斜率越大，当  $b$  不变时， $y'$  又随着小波系数  $w_{j,k}$  的增加而减小，由此可见，当  $b$  较小时，虽然在  $w_{j,k} = \lambda$  处有较大的斜率值，但随着  $w_{j,k}$  的增加以及  $b$  的影响，阈值函数很快就能接近斜率为 1 的渐近线。当  $b$  较大时，有相对应的效果。由此可见，通过调节  $b$  的值就可以控制阈值函数的形状，即通过调节  $b$  来控制阈值函数对含噪小波系数压缩的渐变程度。

图 3 为当  $c=0.5$  时， $b$  分别为 0.5、1、5 时的图像。从图中可以看出，随着  $b$  的减小，阈值函数形状发生明显弯曲，从直观角度分析，函数的弯曲程度就决定了此阈值函数以何种程度对含噪小波系数进行消噪处理。比如  $b$  值较大，则以缓变的方式进行消噪，即对大于阈值  $\lambda$  的含噪小波系数  $w_{j,k}$ ，以斜率为  $k_1$  的一次函数近似处理，这适用于噪声小波系数  $v_{j,k}$  在  $w_{j,k}$  中的比例较平稳、变化幅度不大的情况，

其中  $k_1$  为一次函数的斜率;当  $b$  值较小时,在阈值  $\lambda$  的一定范围内,函数急剧变化,变化程度取决于阈值  $\lambda$  处  $u_{j,k}$  与  $v_{j,k}$  的各自占比关系,当  $u_{j,k}$  占比多时,可知噪声影响较小,则可将  $b$  值设置得小一些,以使得阈值函数能更快地以  $k_1=1$  的斜率进行消噪处理。

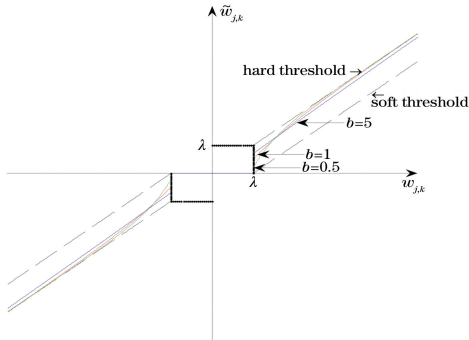


图 3  $c=0.5$  时,  $b$  分别为 0.5、1、5 时的双参数阈值函数  
Fig. 3 Two-parameter threshold function when  $c=0.5$  and  $b=0.5, 1, 5$

采用本文含参阈值函数对脉冲星信号进行去噪的关键在于解决参数的最佳匹配问题,即如何确定  $c$ 、 $b$  的值使得去噪后的信号能够获得更好的轮廓,同时,考虑到脉冲星导航的实时性要求,选取的算法应具备三个特点:精度高、收敛速度快、简单易实现且适合处理较少参数。通过对比各种优化算法,本文选取参数调节少、搜索速度快的粒子群优化(PSO)算法。

### 3.2 粒子群优化算法的基本原理

PSO 算法是模拟群体智能所建立起来的一种进化算法。其基本原理是,首先 PSO 初始化一群没有质量和体积只有速度和位置的随机粒子,且每个粒子都有一个由适应度函数所决定的适应值,即在  $D$  维空间中的位置向量,在每一次迭代中,粒子通过跟踪两个极值(个体极值  $p_{best}$  和全局极值  $g_{best}$ )来更新自己的速度和位置,并最终找到最优解<sup>[8]</sup>。在第  $d$  维度中,粒子速度和位置更新公式为

$$\mathbf{V}_{id}^{t+1} = \omega \cdot \mathbf{V}_{id}^t + c_1 \cdot \text{rand}(n') \cdot (p_{best_i} - \mathbf{X}_{id}^t) + c_2 \cdot \text{rand}(n') \cdot (g_{best} - \mathbf{X}_{id}^t), \quad (15)$$

$$\mathbf{X}_{id}^{t+1} = \mathbf{X}_{id}^t + \mathbf{V}_{id}^{t+1}, \quad (16)$$

式中:  $\mathbf{V}_{id}^t$  为  $t$  时刻第  $i$  个粒子在  $d$  维中的速度分量;  $\mathbf{V}_{id}^{t+1}$  为更新后第  $i$  个粒子的速度分量;  $\omega$  为惯性权重,其值较大时,能使粒子在  $\mathbf{V}_{id}^t$  方向上保持较高的速度,具有较强的全局寻优能力;  $c_1$  和  $c_2$  为学习因子,其中  $c_1$  表征第  $i$  个粒子自我学习的能力,即向自己历史最优解  $P_i$  靠近的能力,而  $c_2$  表征第  $i$  个

粒子社会学习的能力,即向全局中的最优解  $G_i$  靠近的能力;  $\mathbf{X}_{id}^t$  为  $t$  时刻第  $i$  个粒子在  $d$  维中的位置分量;  $\mathbf{X}_{id}^{t+1}$  为更新后第  $i$  个粒子的位置分量;  $\text{rand}(n')$  为产生 0 到 1 的随机数,  $n'$  为随机数的个数;  $t$  为 PSO 算法进行第  $t$  次的迭代运算。

为使 PSO 算法有更快的收敛速度,引入收敛因子  $K$ ,则(16)式更新为

$$\mathbf{V}_{id}^{t+1} = K [\mathbf{V}_{id}^t + c_1 \cdot \text{rand}(n') \cdot (p_{best_i} - \mathbf{X}_{id}^t) + c_2 \cdot \text{rand}(n') \cdot (g_{best} - \mathbf{X}_{id}^t)], \quad (17)$$

式中:  $K = \frac{2}{|2 - \varphi - \sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}|}$ ,  $\varphi = c_1 + c_2$ ,  $\varphi > 4$ 。

### 3.3 适应度函数的选取

适应度函数是评价粒子是否为最优适应度值的一个量化指标,本文选取信噪比  $R_{SNR}$  作为适应度函数来评价含参阈值函数中  $a$ 、 $b$  选取的好坏。

$$R_{SNR} = 10 \lg \left[ \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i)^2} \right], \quad (18)$$

式中:  $x_i$  为标准脉冲星信号;  $\hat{x}_i$  为去噪后脉冲星信号;  $n$  为 X 射线脉冲光子的数量。

对此适应度函数的可行性进行分析:小波变换将含噪信号分解成含噪小波系数  $w_{j,k}$ ,在小波基和分解层确定的情况下,对  $w_{j,k}$  采用本文含有参数  $c$  和  $b$  的阈值函数进行去噪处理得到消噪小波系数  $\hat{w}_{j,k}$ ,去噪过程中影响  $\hat{w}_{j,k}$  的因素只有参数  $c$  和  $b$ ,则重构  $\hat{w}_{j,k}$  得到的  $\hat{x}_i$  也只与  $c$  和  $b$  相关,由于标准脉冲星信号  $x_i$  不改变,因此  $c$  和  $b$  的最佳匹配问题就等价于去噪后脉冲星信号能够取得最大信噪比的问题。

### 3.4 利用 PSO 算法优化含参阈值函数的流程

步骤 1: 确定空间维数、群体大小,明确粒子位置和速度的边界值,初始化相关参数。

解空间由  $c$  和  $b$  两个参数构成,则空间维数  $D=2$ 。对于解决一般性的问题,通常将群体规模取为 10~30,对较难或特定类别的问题可以取 100~200,本文属于一般性问题,将群体规模取为 15 就足以搜索到理想的  $c$  和  $b$  的值。由于  $0 \leq c \leq 1$ ,  $0 < b \leq 10$ ,则粒子位置边界设置为  $X_{i1max} = 1$ ,  $X_{i1min} = 0$ ,  $X_{i2max} = 10$ ,  $X_{i2min} = 0$ ,  $X_{i1max}$  与  $X_{i1min}$  代表第一个粒子的最大与最小位置边界值,即  $c$  粒子的边界值,  $X_{i2max}$  与  $X_{i2min}$  代表第二个粒子的最大与最小位置边界值,即  $b$  粒子的边界值。粒子的速度决定了当前位置与最好位置的区域分辨率,粒子飞行的速度过大会使其越过极点,速度过小则不能对整个搜索

空间进行足够的探索。粒子的最大飞行速度通常取为搜索空间的 10%~20%<sup>[9]</sup>,为使得搜索结果不陷入局部最优,本文搜索空间取 20%,为使得算法结果可以快速收敛并保证参数的精度要求,将最小速度设为搜索空间的 1%,即  $V_{i1\max} = 0.2, V_{i1\min} = 0.01, V_{i2\max} = 2, V_{i2\min} = 0.01$ ,其中  $V_{i1\max}$  与  $V_{i1\min}$  是第一个粒子  $c$  的最大、最小搜索速度的边界值,  $V_{i2\max}$  与  $V_{i2\min}$  是第二个粒子  $b$  的最大、最小搜索速度的边界值。

步骤 2: 将  $c_1$  和  $c_2$  设为相等值以表示对两个引导方向的同等重视, Suganthande 的实验表明将  $c_1$  和  $c_2$  设为 2 附近的常数值可以得到较好的解<sup>[10]</sup>。通常情况下,将  $\varphi$  设为 4.1,由(17)式及以上分析可得  $\varphi = 4.1, K = 0.729, c_1 = 2.05, c_2 = 2.05$ 。

步骤 3: 根据适应度函数[(18)式]初始化每个粒子的适应度值  $S_i^t$ ,将其对应的  $X_{id}^t$  赋给  $p_{\text{best}}$ ,即  $p_{\text{best}} = X_{id}^t$ ,并将初始化中所有粒子中最好的适应度值  $S_m^t = \max(S_i^t)$  所对应的  $X_{md}^t$  作为初始化的  $g_{\text{best}}$ ,即  $g_{\text{best}} = X_{md}^t$ 。

步骤 4: 根据(16)式和(17)式进行迭代,更新粒子的速度和位置,如若对第  $i$  个粒子更新后  $S_i^{t+1} > S_i^t$ ,则令  $p_{\text{best}_i} = X_{id}^{t+1}$ ,并将该次迭代产生的最大适应度值  $S_m^{t+1} = \max(S_i^{t+1})$  对应的粒子位置  $X_{md}^{t+1}$  作为更新后的  $g_{\text{best}}$ ,即  $g_{\text{best}} = X_{md}^{t+1}$ 。

步骤 5: 重复步骤 3~4 进行迭代,当在迭代过程中粒子的位置和速度超过限制时,令  $V_{i\max} = V_{id}, X_{i\max} = X_{id}$ ,其中  $V_{i\max}$  代表两个粒子的搜索速度边界值,  $X_{i\max}$  代表两个粒子位置的边界值,  $V_{id}$  和  $X_{id}$  分别代表利用粒子群迭代时第  $i$  次迭代后更新的搜索速度值与位置边界值。最后,通过最佳适应度值的增值阈值或者迭代次数来终止搜索。

## 4 小波基函数、分解层与阈值的确定

### 4.1 互相关系数法确定小波基和分解层

小波基函数与信号的相关性越大,则用小波基提取信号的时频信息就越准确。从某种意义上来看,小波分解系数表示的是小波基与信号的相似程度,因此可以求取小波系数与信号间的互相关系数,选择互相关系数大的值作为此信号的小波基,并将相应的分解层作为最佳分解层<sup>[11]</sup>。

互相关系数计算公式为

$$P = \frac{\text{cov}(s, g)}{\delta_s \delta_g} = \frac{\sum_{h=1}^n (s_h - \bar{s})(g_h - \bar{g})}{n \times \delta_s \delta_g} =$$

$$\frac{\sum_{h=1}^n (s_h - \bar{s})(g_h - \bar{g})}{\sqrt{\sum_{h=1}^n (s_h - \bar{s})^2 \times \sum_{h=1}^n (g_h - \bar{g})^2}}, \quad (19)$$

式中:  $P$  为互相关系数;  $s$  为低频段轮廓数据;  $g$  为真实信号数据;  $\text{cov}(s, g)$  为两个信号变量之间的协方差;  $\delta_s, \delta_g$  为两信号变量的标准差;  $s_h, g_h$  为两个信号变量在  $h$  处的值;  $\bar{g}$  为平均值。

### 4.2 基于各分解层噪声均方差的阈值选取方法

小波去噪的核心之一是对阈值的估计。如果阈值过小,则不能有效滤除噪声;阈值过大,则将过扼杀地滤掉有用信号的一些重要特征<sup>[12]</sup>。X 射线脉冲星信号去噪中常采用的阈值估计式为  $\lambda = \delta \sqrt{2 \lg n}$ ,其中  $\delta$  为噪声的均方差。其不足之处是没有考虑噪声小波系数会随分解层的变化而对所有分解层上的小波系数采用统一阈值进行去噪。如图 4 所示,对 B0531+21 的含噪脉冲星信号中的噪声成分进行小波分解,可发现其分解系数随分解层的增加而减小,从(4)~(7)式以及内积性质可知其能量值随分解层的增加而减小,即噪声均方差在各分解层的值互不相同,因此需要对每一分解层都确定一个阈值,新构建的阈值选取公式为

$$\lambda(j) = \delta(j) \frac{\sqrt{2 \lg[l(e_{nd} - j)]}}{\lg(j+1)} [1 + g(j)], \quad (20)$$

式中:  $\lambda(j)$  表示第  $j$  层的阈值;  $e_{nd}$  表示最后一个分界层;  $\delta(j) = \text{median}[|d(j)|]/0.6745$  表示第  $j$  层噪声均方差的估计值,  $d(j)$  表示第  $j$  分解层上的小波系数,  $\text{median}(\cdot)$  表示求均值;  $l$  表示信号经小波分解后存放各层系数个数的向量;  $l(e_{nd} - j)$  表示向量  $l$  中第  $e_{nd} - j$  个位置处的值,其值表示第  $j$  层的数据长度  $g(j) = \delta(j)^2 / \sum_{j=1}^n \delta(j)^2$  是第  $j$  层的噪声均方差估计值在总体噪声均方差估计值中的比重。

由(20)式可以看出新构建的阈值在每一分解层均不同,且与噪声均方差的估计值成正相关。一般地,噪声的小波系数随分解层的增加而减小,引入  $\lg(j+1)$  作为减小的梯度,同时考虑到脉冲星信号的复杂性及宇宙噪声的多样性会导致各层噪声均方差的估计值并不一定随分解层的增加而减小,因而引入均方差比重  $g(j)$ 。

## 5 实验结果与分析

本文选取脉冲星 PSR B0531+21 辐射的 X 射

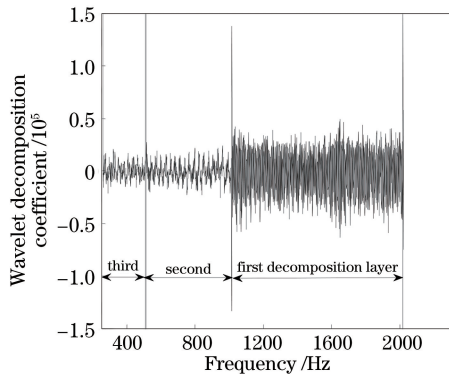


图 4 B0531+21 噪声信号经三层分解后的小波系数  
Fig. 4 Wavelet coefficients of B0531+21 noise signal after three-layer decomposition

线光子脉冲序列作为观测数据。实验前,先对观测数据进行历元折叠、消色散等预处理,得到如图 5 所示的含噪轮廓图。此脉冲星信号标准轮廓图取自欧洲脉冲星数据库<sup>[13]</sup>,如图 6 所示。

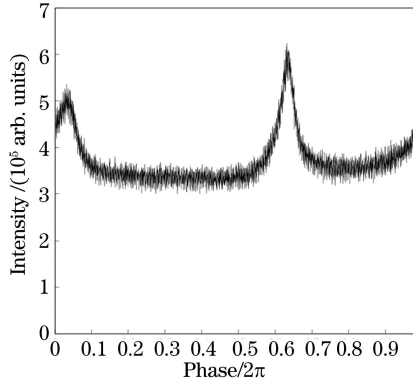


图 5 脉冲星 B0531+21 含噪信号轮廓  
Fig. 5 Noisy signal profile of B0531+21

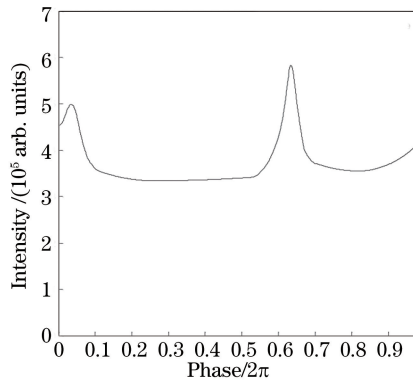


图 6 脉冲星 B0531+21 信号标准轮廓  
Fig. 6 Standard signal profile of B0531+21

含噪脉冲星信号依次从 db1 ~ db8, sym1 ~ sym8, coif1 ~ coif5 中选择小波基进行 1 ~ 8 层分解, dbN、symN、coifN 分别是 Daubechies 小波、Symlets 小波、Coiflets 小波,其中 N 代表各小波的

消失矩,如 db1 表示消失矩为 1 的 Daubechies 小波。而后根据(19)式对每个小波分解系数与标准信号数据求互相关系数,得到图 7~9 所示的折线图,图中横坐标表示分解层数。找到互相关系数  $P = 0.7612$  所对应的 db4 作为本文的小波基,相应的分解层为 5 层,虽然 sym7 小波基的相关系数达到了 0.7643,但过高的消失矩会使支撑长度增加,sym 系列小波基的支撑长度为  $2N - 1$ ,因此选用较低消失矩且具有较高相关系数的 db4 小波基。利用 PSO 算法优化含参阈值函数,经 195 次迭代后得到最大适应度值  $S_{\max} = 35.47$ ,此时参数  $a = 0.78, b = 2.7$ 。采用基于各层噪声均方差的阈值选取方法求取含噪信号的各层阈值。

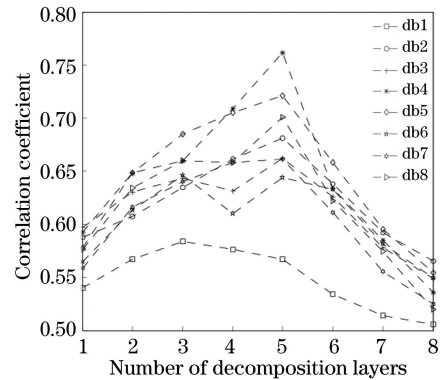


图 7 db 系列小波在 1~8 分解层下的相关系数  
Fig. 7 Correlation coefficient distribution of db wavelets under 1-8 decomposition layers

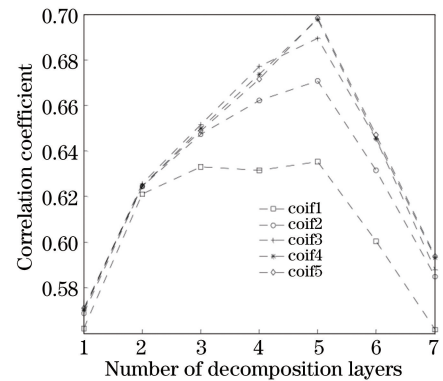


图 8 coif 系列小波在 1~8 分解层下的相关系数  
Fig. 8 Correlation coefficient distribution of coif wavelets under 1-8 decomposition layers

对含噪 X 射线脉冲星信号分别利用本文方法、软阈值函数、硬阈值函数与软硬阈值折中函数进行去噪,分别得到去噪后脉冲星信号轮廓图,如图 10~13 所示。从图中可以直观分析出,软阈值函数由于在去噪过程中总与含噪小波分解系数存在一个阈值差量,因而轮廓曲线相较于其他去噪方法整体偏低,

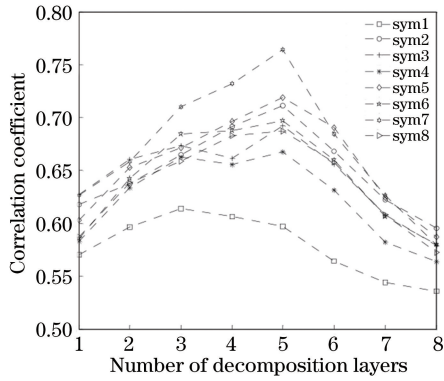


图 9 sym 系列小波在 1~8 分解层下的相关系数

Fig. 9 Correlation coefficient distribution of sym wavelets under 1-8 decomposition layers

但由于软阈值函数的连续性,其轮廓相较于硬阈值函数去噪轮廓更为平滑。硬阈值函数虽然在脉冲峰处有比软阈值函数和软硬阈值折中函数更高的峰值信噪比,但峰位误差较大,且边缘效应较为明显,在轮廓尾部的小波峰处产生较大畸变。而经本文方法去噪后的轮廓在平滑段的局部抖动降低且在脉冲峰处的峰值和峰位均更接近标准信号。

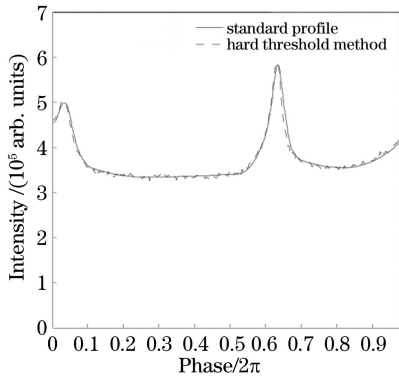


图 10 硬阈值法去噪轮廓与标准轮廓比照图

Fig. 10 Comparison of denoising profile of hard threshold method and standard profile

为进一步量化本文的阈值函数以及阈值选取方法的优越性,选取  $R_{SNR}$ ,  $R_{PSNR}$ ,  $R_{EPP}$  作为评价指标,通过控制变量的方法分别与其他 3 种阈值函数及 4 种常规阈值选择方法进行比较,得到图 14~16 的柱状图。各指标定义为

$$R_{SNR} = 10 \lg \left[ \frac{\sum x^2}{\sum (x - \hat{x})^2} \right], \quad (21)$$

$$R_{PSNR} = 10 \lg \left[ n \cdot \frac{\max(x^2)}{\sum (x - \hat{x})^2} \right], \quad (22)$$

$$R_{EPP} = \sqrt{(P_0 - P_{peak})^2}, \quad (23)$$

式中:  $x$  为标准脉冲星信号数据;  $\hat{x}$  为去噪后脉冲星

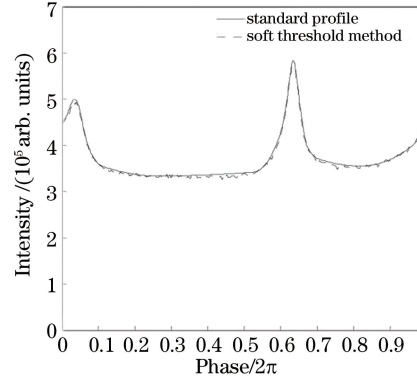


图 11 软阈值法去噪轮廓与标准轮廓比照图

Fig. 11 Comparison of denoising profile of soft threshold method and standard profile

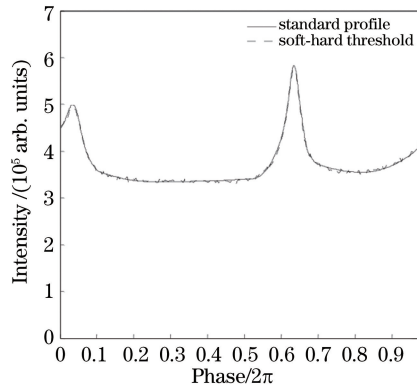


图 12 软硬阈值折中法去噪轮廓与标准轮廓比照图

Fig. 12 Comparison of denoising profile of soft-hard threshold compromise method and standard profile

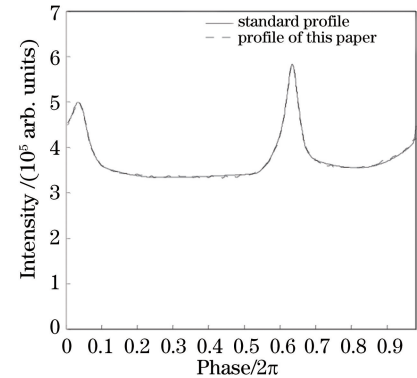


图 13 本文方法去噪轮廓与标准轮廓比照图

Fig. 13 Comparison of denoising profile of proposed method and standard profile

信号数据;  $P_0$  为标准脉冲轮廓脉冲峰的位置;  $P_{peak}$  为消噪后脉冲轮廓脉冲峰的位置。从(21)~(23)式易知,  $R_{SNR}$ ,  $R_{PSNR}$  越大,  $R_{EPP}$  越小, 则去噪效果越好。

从图中可以看出,在本文基于各层噪声均方差的阈值选取方法下,各阈值函数均能得到较好的性能指标。其中本文构建的双参数阈值函数的指标得



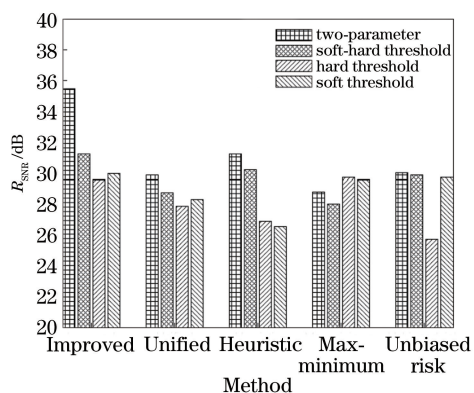


图 14 信噪比柱状图

Fig. 14 Signal-to-noise ratio histogram

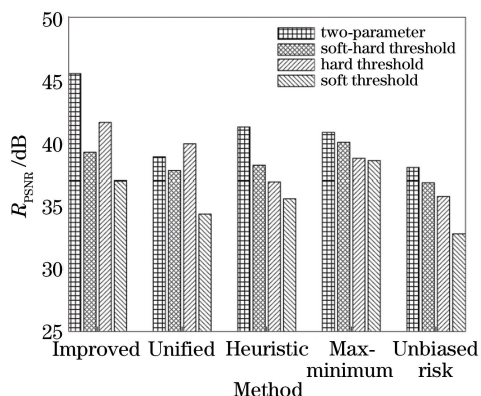


图 15 峰值信噪比柱状图

Fig. 15 Peak signal-to-noise ratio histogram

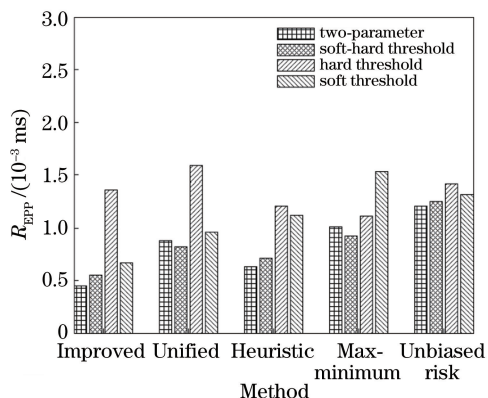


图 16 峰位误差柱状图

Fig. 16 Peak position error histogram

到改善,去噪后信噪比较其他阈值函数普遍提高了 4~8 dB;峰值信噪比达到了 45.47 dB,相比原始信噪比改善了约 21 dB,而较其他方法也提高了 5~12 dB;峰位误差维持在  $10^{-5}$  s 内,可以达到  $4.5 \times 10^{-6}$  s,较硬阈值函数去噪提高了 66.91%。由此可见,在基于各层噪声均方差的阈值选取下采用 PSO 优化含参阈值函数进行去噪的方法要优于传统软阈值函数、硬阈值函数、软硬阈值折中函数在四种基本

阈值选取准则下的消噪,其中 Unbiased risk、Maximum、Heuristic、Unified、Improved 分别是无偏风险阈值准则、最大最小阈值准则、启发式阈值准则、固定阈值准则以及本文提出的改进阈值选取准则。

## 6 结 论

针对阈值估计误差及噪声小波系数的占比随含噪小波系数的增大而减小的情况,提出一种基于 PSO 算法的双参数阈值函数,通过 PSO 算法优化两个参数值以自适应地调整阈值函数的形状和位置,进而得到去噪效果更好的阈值函数模型。针对传统 X 射线脉冲星小波去噪中阈值选取过于单一的问题,在分析噪声均方差、噪声小波系数以及分解层三者间关系的基础上,提出基于各层噪声均方差的阈值选取方法。实验结果表明,本文阈值函数所采用的非线性去噪方式比软、硬阈值函数的线性方式去噪效果要更好,基于各层噪声均方差的多层阈值比单独的统一阈值更准确,本文将两者结合后进行去噪的信噪比、峰值信噪比和峰位误差相比其他方法得到了显著改善,为 X 射线脉冲星信号消噪提供了新思路,具有一定的实用价值。

## 参 考 文 献

- [1] Xue M F, Li X P, Liu Y M, *et al.* Denoising of X-ray pulsar observed profile using biorthogonal lifting wavelet transform [J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2016, 27(3): 514-523.
- [2] Donoho D L, Johnstone I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage *Biometrika*[J]. 1994, 81: 425-455.
- [3] Zhu X M, Liao F C, Tang Y Y. Pulsar signal denoising based on wavelet transformation[J]. *Acta Astronomica Sinica*, 2006, 47(3): 328-335. 朱晓明, 廖福成, 唐远炎. 基于小波分析的脉冲星信号消噪处理[J]. *天文学报*, 2006, 47(3): 328-335.
- [4] Su Z, Xu L P, Wang Y, *et al.* Pulsar weak signal denoising based on improved wavelet spatial correlation filtering [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2010, 32(12): 2500-2505. 苏哲, 许录平, 王勇, 等. 改进小波空域相关滤波的脉冲星微弱信号降噪[J]. *系统工程与电子技术*, 2010, 32(12): 2500-2505.
- [5] Wang L, Ke X Z, Ni G R. Research on noise reduction for millisecond pulsar signal based on wavelet transform [J]. *Astronomical Research & Technology*, 2008, 5(1): 49-54.

- 汪丽, 柯熙政, 倪广仁. 基于小波变换的脉冲星弱信号的去噪方法研究[J]. 天文研究与技术, 2008, 5(1): 49-54.
- [6] Liu X P, Li X P, Sun H F. X-ray pulsar signal denoising using lifting scheme wavelet[J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(3): 0304002.
- 刘秀平, 李小平, 孙海峰. 提升小波的 X 射线脉冲星信号降噪[J]. 光学学报, 2013, 33(3): 0304002.
- [7] Gokhale M Y, Khanduja D K. Time domain signal analysis using wavelet packet decomposition approach [J]. International Journal of Communications, Network and System Sciences, 2010, 3(3): 321-329.
- [8] del Valle Y, Digman M, Gray A, *et al.* Enhanced particle swarm optimizer for power system applications [C]//2008 IEEE Swarm Intelligence Symposium, September 21-23, 2008, St. Louis, MO, USA. New York: IEEE, 2008: 10390014.
- [9] Eberhart, Shi Y H. Particle swarm optimization: developments, applications and resources [C]// Proceedings of the 2001 Congress on Evolutionary Computation (IEEE Cat. No. 01TH8546), May 27-30, 2001, Seoul, Korea. New York: IEEE, 2001: 81-86.
- [10] Suganthan P N. Particle swarm optimiser with neighbourhood operator[C]//Proceedings of the 1999 Congress on Evolutionary Computation-CEC99 (Cat. No. 99TH8406), July 6-9, 1999, Washington, DC, USA. New York: IEEE, 1999: 1958-1962.
- [11] Li B, Xia H. Feature recognition of cracked rotor of RCP based on optimal wavelet basis[J]. Journal of Vibration and Shock, 2014, 33(21): 207-212.
- 李彬, 夏虹. 基于最优小波基的主泵裂纹转子特征识别研究[J]. 振动与冲击, 2014, 33(21): 207-212.
- [12] Zhang J J, Feng Y. Research on wavelet denoising of discharge signal of layered threshold power cable[J]. Electronic Measurement Technology, 2018, 41(5): 68-72.
- 张俊杰, 冯俞. 分层阈值电力电缆局放信号的小波去噪研究[J]. 电子测量技术, 2018, 41(5): 68-72.
- [13] Khoo J, Hobbs G, Manchester R N, *et al.* Using the Parkes pulsar data archive [J]. Astronomical Research and Technology, 2012, 9(3): 229-236.