

失调拼接式光学系统波前及像场统计特性研究

张永峰^{1,2,3}, 鲜浩^{1,2*}

¹中国科学院自适应光学重点实验室, 四川 成都 610209;

²中国科学院光电技术研究所, 四川 成都 610209;

³中国科学院大学, 北京 100049

摘要 下一代地基或天基大型望远镜系统多采用拼接式主镜实现。受多个误差源的干扰, 拼接式主镜中的子镜面容易偏离设计位置而发生刚性失调, 其中, 子镜沿着光轴方向的 piston 误差和绕子镜面内旋转轴的 tip/tilt 误差尤为突出, 对拼接式主镜系统的成像质量产生了严重的影响。从统计的角度出发, 解析研究了由 piston 误差及 tip/tilt 误差导致的失调非连续波前的统计特性; 推导了失调拼接式光学系统的像场质心; 基于 Maréchal 近似, 结合失调波前的统计特性, 计算了斯特列尔比。研究结果进一步丰富了人们对拼接式成像系统性能的理解。

关键词 成像系统; 拼接镜; 失调误差; 统计特性; 波前; 像场质心; 斯特列尔比

中图分类号 TH751

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201939.1111004

Statistical Properties of Wavefront and Image Field of Misaligned Segmented Optical Systems

Zhang Yongfeng^{1,2,3}, Xian Hao^{1,2*}

¹Key Laboratory of Adaptive Optics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China;

²Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China;

³University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

Abstract The segmented primary mirror is employed to construct the next-generation ground- and space-based large telescopes. Because of many disturbances, the segmented mirrors within the segmented primary mirror easily deviate from the desired position, leading to rigid misalignment. In particular, the piston error of segmented mirror along the direction of local optical axis and the tip/tilt error seriously affect the imaging quality. The statistical properties of the misaligned discontinuous wavefront caused by piston and tip/tilt errors and the centroid of the image field of the misaligned segmented optical system are analytically evaluated from a statistical perspective. Further, the Strehl ratio is calculated based on the Maréchal approximation by combining the statistical properties from the random discontinuous wavefront. The results of this study can be used to improve the understanding of the performance of the segmented imaging system.

Key words imaging systems; segmented mirror; misalignment error; statistical properties; wavefront; centroid of image field; Strehl ratio

OCIS codes 110.6770; 260.1960; 110.3000

1 引 言

为了实现对暗弱天文目标的高分辨率观测, 需要建造配备有大型主镜的望远镜, 以有效提高系统分辨率, 增大系统集光面积^[1]。拼接式主镜的概念自 20 世纪 80 年代提出以来就备受天文仪器学家的

关注, 至今, 世界上已有多台 10 m 级光学望远镜落成或正在建设, 包括 Keck I/II^[2]、GTC^[3]、HET^[4]、SALT^[5]、TMT^[6]、E-ELT^[7]、JWST^[8] 等, 它们无一例外地均采用大量的六边形子镜拼接来实现等效大口径镜面。但是, 拼接式主镜也带来了极具挑战性的困难, 只有精确且稳定地保持各个子镜间

收稿日期: 2019-06-14; 修回日期: 2019-07-11; 录用日期: 2019-07-29

基金项目: 国家自然科学基金(11873008, 61008038)、国家重点研发计划(2016YFB0501100)、中国科学院重点实验室创新基金(CXJJ-17S053)

* E-mail: xianhao@ioe.ac.cn

共面,才能使拼接式系统达到与之相当口径的系统的衍射极限,否则,其成像性能仅可等效于单个子镜^[9]。

一般情况下,拼接式主镜中的每个子镜背部均安装了位移驱动器,可使每个子镜主动地进行刚性运动,包括:沿着局部光轴的平移(piston)、绕子镜面内两个互相垂直轴的旋转(tip/tilt)、沿着子镜面内两个互相垂直轴的平移,以及子镜面内的旋转,其中,对系统成像影响最为突出的当属 piston 及 tip/tilt 误差。针对这两种类型失调误差对系统成像质量的影响,国内外学者已进行了大量的研究^[9-14],研究对象主要集中于斯特列尔比(R_{strehl})和调制传递函数,而对拼接镜失调波前、像场质心指标,特别是二者的统计特性,均未予以关注。

本文首先给出了失调拼接镜的成像理论,在此基础上解析研究了失调波前的统计特性;解析研究了像场质心与失调误差间的关系;根据失调波前的统计特性,采用 Maréchal 近似,分析了失调系统的 R_{strehl} 。本文的研究结果可进一步加深人们对拼接式系统成像性能的理解。

2 失调拼接镜成像理论原理

假设拼接式主镜由 M 环子镜(中心子镜为第 0 环)构成,其子镜数目为 N , $N=3M(M+1)+1$,当中心子镜缺失时,其数量为 $N=3M(M+1)$ 。典型的由六边形子镜构成的拼接式主镜(含中心子镜)如图 1 所示,其 $M=3, N=37$ 。

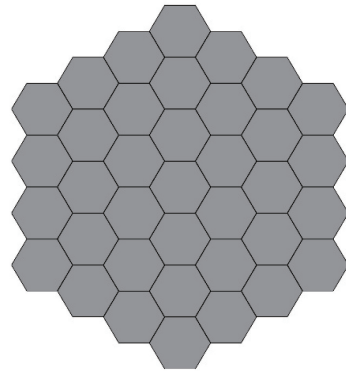


图 1 典型的拼接镜结构

Fig. 1 Typical structure of segmented mirror

根据傅里叶光学原理,在单位振幅的平行光照射下,拼接式主镜的广义光瞳函数可表示为

$$P(x, y) = \sum_{l=1}^N H(x - x_l, y - y_l) \times \exp[-jk\phi_l(x - x_l, y - y_l)], \quad (1)$$

式中: (x, y) 为主镜面内笛卡尔坐标; (x_l, y_l) 为第 l 个子镜的中心坐标; $H(\cdot)$ 为六边形子镜的孔径函数; k 为波数,其值等于 $2\pi/\lambda$, λ 为入射光波长; $\phi_l(\cdot)$ 为第 l 个子镜的光程差函数。当仅考虑 piston 及 tip/tilt 误差时, $\phi_l(x, y)$ 可表示为

$$\phi_l(x, y) = 2(p_l + t_{xl}x + t_{yl}y), \quad (2)$$

式中: p_l 为第 l 个子镜的 piston 误差,为长度单位; t_{xl} 及 t_{yl} 分别为绕 y 轴的 tip/tilt 误差和绕 x 轴的 tip/tilt 误差,单位为弧度。

在距离主镜 f 处的焦平面上的光场强度 $I(u, v)$ ^[15] 可表示为

$$I(u, v) = \frac{1}{(\lambda f)^2} \left| \iint P(x, y) \exp\left[-j \frac{k}{f}(ux + vy)\right] dx dy \right|^2, \quad (3)$$

式中: (u, v) 为像平面线坐标。将(1)式和(2)式代入(3)式,可得

$$\begin{aligned} I(u, v) &= \frac{1}{(\lambda f)^2} \left| \iint P(x, y) \exp\left[-j \frac{k}{f}(ux + vy)\right] dx dy \right|^2 = \\ &= \frac{1}{(\lambda f)^2} \left| \iint \left\{ \sum_{l=1}^N H(x - x_l, y - y_l) \exp[-jk\phi_l(x - x_l, y - y_l)] \right\} \exp\left[-j \frac{k}{f}(ux + vy)\right] dx dy \right|^2 = \\ &= \frac{1}{(\lambda f)^2} \left| \sum_{l=1}^N \exp\left[-j \frac{k}{f}(ux_l + vy_l)\right] \iint H(x, y) \exp[-jk\phi_l(x, y)] \exp\left[-j \frac{k}{f}(ux + vy)\right] dx dy \right|^2 = \\ &= \frac{1}{(\lambda f)^2} \left| \sum_{l=1}^N \exp\left[-j \frac{k}{f}(ux_l + vy_l)\right] \iint H(x, y) \exp[-j2k(p_l + t_{xl}x + t_{yl}y)] \exp\left[-j \frac{k}{f}(ux + vy)\right] dx dy \right|^2 = \\ &= \frac{1}{(\lambda f)^2} \left| \sum_{l=1}^N \exp\left\{-jk \left[\frac{1}{f}(ux_l + vy_l) + 2p_l \right] \right\} \iint H(x, y) \exp\left\{-j \frac{k}{f}[(u + 2t_{xl}f)x + (v + 2t_{yl}f)y] \right\} dx dy \right|^2. \end{aligned} \quad (4)$$

定义子镜衍射函数 $\tilde{H}(u, v)$ 为

$$\tilde{H}(u, v) = \iint H(x, y) \exp\left[-j \frac{k}{f}(ux + vy)\right] dx dy. \quad (5)$$

此时, (4)式可简写为

$$I(u, v) = \frac{1}{(\lambda f)^2} \left| \sum_{l=1}^N \tilde{H}(u + 2t_{xl}f, v + 2t_{yl}f) \exp\left\{-jk \left[\frac{1}{f}(ux_l + vy_l) + 2p_l\right]\right\} \right|^2. \quad (6)$$

3 波前统计特性分析

根据(1)式, 可将拼接式波前 $\Phi(x, y)$ 表达为

$$\Phi(x, y) = \sum_{l=1}^N H(x - x_l, y - y_l) \times \phi_l(x - x_l, y - y_l), \quad (7)$$

将拼接式孔径函数表示为

$$A(x, y) = \sum_{l=1}^N H(x - x_l, y - y_l). \quad (8)$$

分别讨论由 piston 误差及 tip/tilt 误差导致的波前的统计特性。拼接镜系统受到多个外界扰动源的影响, 各个子镜的失调状态是这些扰动源综合作用的结果。另外, 这些扰动源中不存在某个扰动源特别突出的情况。基于此, 本文假设: 同一子镜的 piston 及 tip/tilt 误差彼此独立, 且不同子镜间的失调误差也相互独立; 同一类型的误差统计特性相同, 具体表述为 $p_l \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\text{piston}}^2)$, $t_{xl} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\text{tx}}^2)$, $t_{yl} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\text{ty}}^2)$, 其中, σ_{piston} 为 piston 误差标准差, σ_{tx} 为绕 y 轴旋转的 tip/tilt 误差标准差, σ_{ty} 为绕 x 轴旋转的 tip/tilt 误差标准差, \sim 表示服从某种分布, $\mathcal{N}(\cdot)$ 表示正态分布。

3.1 piston 误差

仅含 piston 误差时, 拼接式波前表达式为

$$\Phi_{\text{piston}}(x, y) = 2 \sum_{l=1}^N p_l H(x - x_l, y - y_l), \quad (9)$$

此时的波前均值 $\bar{\Phi}_{\text{piston}}$ 为

$$\bar{\Phi}_{\text{piston}} = \frac{\iint A(x, y) \Phi_{\text{piston}}(x, y) dx dy}{\iint A(x, y) dx dy} = \frac{2 \sum_{l=1}^N p_l}{N}, \quad (10)$$

波前方差 $\sigma_{\Phi_{\text{piston}}}^2$ 为

$$\sigma_{\Phi_{\text{piston}}}^2 = \frac{\iint A(x, y) [\Phi_{\text{piston}}(x, y) - \bar{\Phi}_{\text{piston}}]^2 dx dy}{\iint A(x, y) dx dy} = \frac{4 \sum_{l=1}^N (p_l - \bar{\Phi}_{\text{piston}})^2}{N}. \quad (11)$$

很显然, $\bar{\Phi}_{\text{piston}}$ 与 $\sigma_{\Phi_{\text{piston}}}^2$ 均为随机变量, 且 $\bar{\Phi}_{\text{piston}} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{4\sigma_{\text{piston}}^2}{N}\right)$; 对于 $\sigma_{\Phi_{\text{piston}}}^2$, 定义如下随机变量:

$$S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{l=1}^N (p_l - \bar{\Phi}_{\text{piston}})^2. \quad (12)$$

由数理统计知识^[16]可知: $(N-1)S^2/\sigma_{\text{piston}}^2 \sim \chi^2(N-1)$, 即 $(N-1)S^2/\sigma_{\text{piston}}^2$ 服从自由度为 $N-1$ 的 χ^2 分布, 或者服从参数为 $\left(\frac{N-1}{2}, 2\right)$ 的 Γ 分布;

而 $\sigma_{\Phi_{\text{piston}}}^2 = \frac{4(N-1)S^2}{N}$, 故也服从 Γ 分布, 且相关的分布参数为 $\left(\frac{N-1}{2}, \frac{8\sigma_{\text{piston}}^2}{N}\right)$ 。根据上述推导, 可得到随机变量 $\bar{\Phi}_{\text{piston}}$ 及 $\sigma_{\Phi_{\text{piston}}}^2$ 的概率密度函数(PDF)为

$$f_{\bar{\Phi}_{\text{piston}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(2\sigma_{\text{piston}}/\sqrt{N})} \times \exp\left[-\bar{\Phi}_{\text{piston}}^2/(8\sigma_{\text{piston}}^2/N)\right], \quad (13)$$

$$f_{\sigma_{\Phi_{\text{piston}}}^2} = \frac{1}{(8\sigma_{\text{piston}}^2/N)^{(N-1)/2} \Gamma[(N-1)/2]} (\sigma_{\Phi_{\text{piston}}}^2)^{(N-3)/2} \times \exp\left[-\sigma_{\Phi_{\text{piston}}}^2/(8\sigma_{\text{piston}}^2/N)\right]. \quad (14)$$

采用数值仿真以验证以上解析结果。给定子镜环数 M (或子镜数目 N), 计算机生成 L 组 piston 误差数组 $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$, 根据(10)式及(11)式, 分别计算每个 piston 误差数组对应的波前均值 $\bar{\Phi}_{\text{piston}}$ 及波前方差 $\sigma_{\Phi_{\text{piston}}}^2$, 并对 L 组 $\bar{\Phi}_{\text{piston}}$ 及 $\sigma_{\Phi_{\text{piston}}}^2$ 分别进行统计并绘制归一化的频率密度曲线, 并分别与解析结果 $f_{\bar{\Phi}_{\text{piston}}}$ 及 $f_{\sigma_{\Phi_{\text{piston}}}^2}$ 进行比较。仿真结果如图 2 及图 3 所示。从图 2 和图 3 可以很明显地看出, 理论结果与数值仿真结果基本一致, 从而验证了理论结果的正确性。同时, 对于相同的 σ_{piston} , 子镜数目越大, $\bar{\Phi}_{\text{piston}}$ 的 PDF 曲线越窄, 对应的方差也越小, $\sigma_{\Phi_{\text{piston}}}^2$ 的峰值区向右移动, 其 PDF 曲线越窄, 对应的方差也越小; 对于相同的子镜数目, 随着 σ_{piston} 的增大, $\bar{\Phi}_{\text{piston}}$ 的 PDF 曲线越宽, 对应的方差也越大, $\sigma_{\Phi_{\text{piston}}}^2$ 的峰值区向右移动, 其 PDF 曲线越宽, 对应的方差也越大。

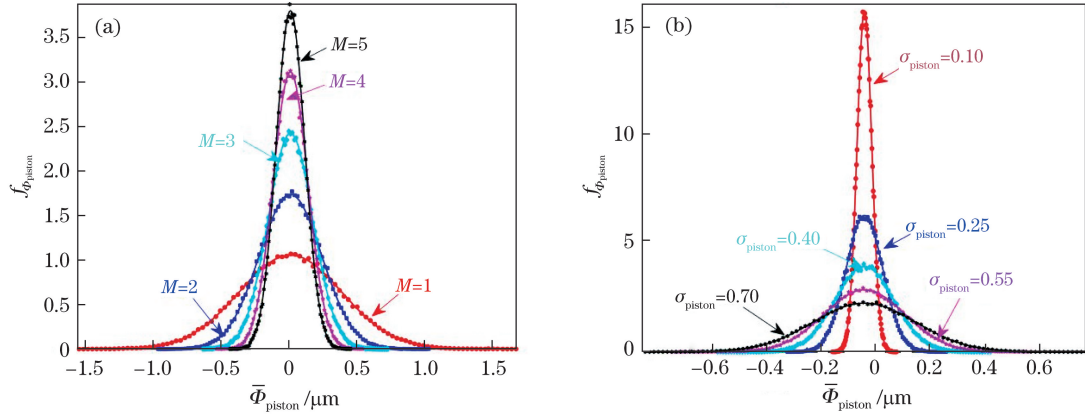


图 2 $\bar{\Phi}_{\text{piston}}$ 的频率密度曲线(散点数据所示)与理论 PDF 曲线(实线所示)的比较。(a) $\sigma_{\text{piston}} = 0.5 \mu\text{m}$, 子镜环数不同;
(b) 子镜环数 $M=4$, σ_{piston} 不同

Fig. 2 Comparison between frequency density function (shown as scattered points) and theoretical PDF (shown as solid line) of $\bar{\Phi}_{\text{piston}}$. (a) For different ring number of segmented mirror, when $\sigma_{\text{piston}} = 0.5 \mu\text{m}$; (b) for different σ_{piston} , when ring number of segmented mirror $M=4$

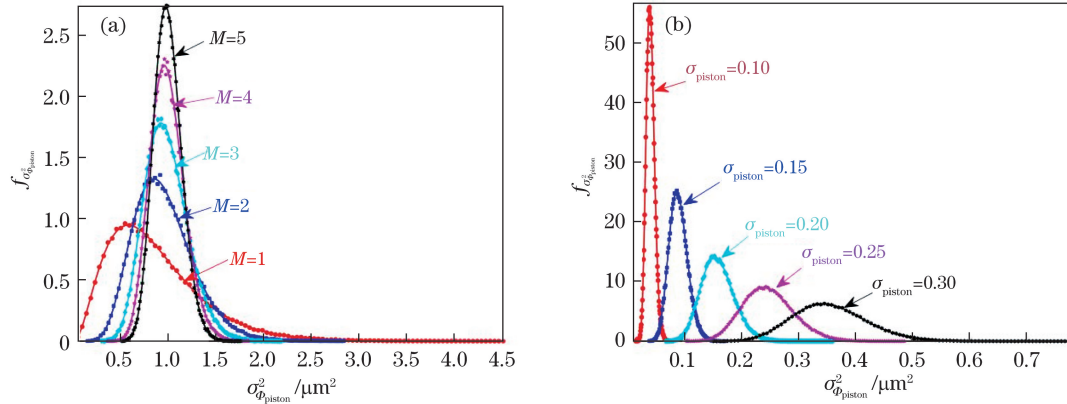


图 3 $\sigma_{\Phi_{\text{piston}}}^2$ 的频率密度曲线(散点数据所示)与理论 PDF 曲线(实线所示)的比较。(a) $\sigma_{\text{piston}} = 0.5 \mu\text{m}$, 子镜环数不同;
(b) 子镜环数 $M=4$, σ_{piston} 不同

Fig. 3 Comparison between frequency density function (shown as scattered points) and theoretical PDF (shown as solid line) of $\sigma_{\Phi_{\text{piston}}}^2$. (a) For different ring number of segmented mirror, when $\sigma_{\text{piston}} = 0.5 \mu\text{m}$; (b) for different σ_{piston} , when ring number of segmented mirror $M=4$

3.2 tip/tilt 误差

仅含 tip/tilt 误差时, 拼接式波前表达式为

$$\Phi_t(x, y) = 2 \sum_{l=1}^N [t_{xl}(x - x_l) + t_{yl}(y - y_l)] H(x - x_l, y - y_l). \quad (15)$$

此时的波前均值 $\bar{\Phi}_t$ 表示为

$$\bar{\Phi}_t = \frac{\iint A(x, y) \Phi_t(x, y) dx dy}{\iint A(x, y) dx dy} = 0. \quad (16)$$

波前方差 $\sigma_{\Phi_t}^2$ 表示为

$$\sigma_{\Phi_t}^2 = \frac{\iint A(x, y) [\Phi_t(x, y) - \bar{\Phi}_t]^2 dx dy}{\iint A(x, y) dx dy} = \frac{1}{N} \frac{5}{6} s^2 \sum_{l=1}^N (t_{xl}^2 + t_{yl}^2), \quad (17)$$

式中: s 为六边形子镜的边长。由(16)及(17)式可知, 仅含 tip/tilt 误差的拼接式波前的均值恒为 0, 与 tip/tilt 误差所服从的概率分布规律、子镜数目等因素无关; 至于仅含 tip/tilt 误差的拼接式波前的方差, 其与当前拼接式倾斜波前的实现相关, 是一个与 tip/tilt 误差所服从的概率分布规律、子镜数目及边长相关的随机变量。下面将考虑 $\sigma_{\Phi_t}^2$ 所服从的统计规律。

由数理统计知识^[16]可知, $t_{xl}^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, 2\sigma_{lx}^2\right)$, $t_{yl}^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, 2\sigma_{ly}^2\right)$ 。此处, 进一步假设 $\sigma_{lx}^2 = \sigma_{ly}^2 = \sigma_l^2$, 由随机变量间的独立性可得到, $\sigma_{\phi_t}^2 \sim \Gamma\left(N, \frac{5}{3N}s^2\sigma_l^2\right)$, 也就是说, 随机变量 $\sigma_{\phi_t}^2$ 的 PDF 为

$$f_{\sigma_{\phi_t}^2} = \frac{1}{\left(\frac{5}{3N}s^2\sigma_l^2\right)^N \Gamma(N)} (\sigma_{\phi_t}^2)^{N-1} \exp\left[-\sigma_{\phi_t}^2 / \left(\frac{5}{3N}s^2\sigma_l^2\right)\right]. \quad (18)$$

采用与验证 piston 误差统计规律相同的方法, 验证(18)式的正确性, 其结果如图 4 所示。由图 4

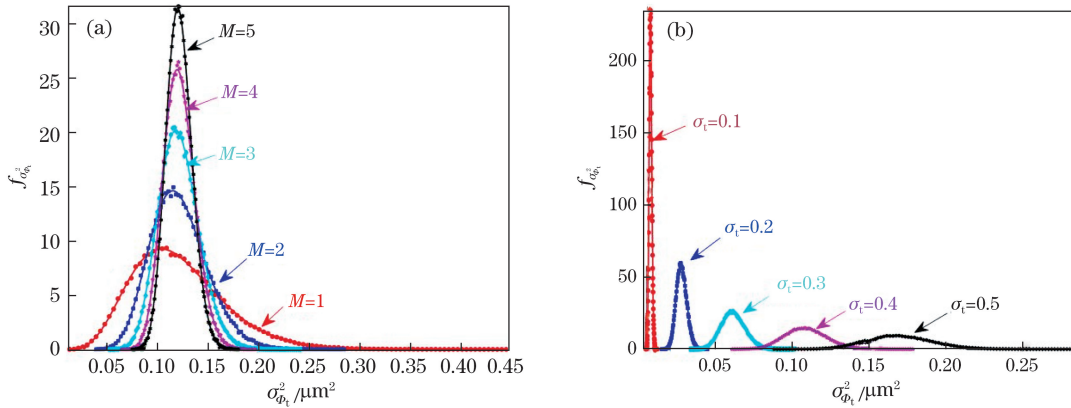


图 4 $\sigma_{\phi_t}^2$ 的频率密度曲线(散点数据所示)与理论 PDF 曲线(实线所示)的比较。(a) $\sigma_l = 0.3 \mu\text{rad}$, 子镜环数不同; (b) 子镜环数 $M=4$, σ_l 不同

Fig. 4 Comparison between frequency density function (shown as scattered points) and theoretical PDF (shown as solid line) of $\sigma_{\phi_t}^2$. (a) For different ring number of segmented mirror, when $\sigma_l = 0.3 \mu\text{rad}$; (b) for different σ_l , when ring number of segmented mirror $M=4$

表 1 随机变量 $\bar{\Phi}_{\text{piston}}$, $\sigma_{\phi_{\text{piston}}}^2$, $\sigma_{\phi_t}^2$ 的 PDF、均值及标准差

Table 1 PDF, average value, and standard deviation for random variables $\bar{\Phi}_{\text{piston}}$, $\sigma_{\phi_{\text{piston}}}^2$, and $\sigma_{\phi_t}^2$

Random variable	PDF	Average	Standard deviation
$\bar{\Phi}_{\text{piston}}$	$\mathcal{N}\left(0, \frac{4\sigma_{\text{piston}}^2}{N}\right)$	0	$\frac{2}{\sqrt{N}}\sigma_{\text{piston}}^2$
$\sigma_{\phi_{\text{piston}}}^2$	$\Gamma\left(\frac{N-1}{2}, \frac{8\sigma_{\text{piston}}^2}{N}\right)$	$\frac{4(N-1)}{N}\sigma_{\text{piston}}^2$	$\frac{4}{N}\sqrt{2(N-1)}\sigma_{\text{piston}}^2$
$\sigma_{\phi_t}^2$	$\Gamma\left(N, \frac{5}{3N}s^2\sigma_l^2\right)$	$\frac{5}{3}s^2\sigma_l^2$	$\frac{5}{3\sqrt{N}}s^2\sigma_l^2$

4 像场质心分析

拼接镜系统像场的质心坐标($\langle u \rangle$, $\langle v \rangle$)的计算式为

$$\langle u \rangle = \frac{\iint u I(u, v) du dv}{\iint I(u, v) du dv}, \quad (19)$$

可知, 理论曲线与数值仿真曲线基本一致, 进而验证了理论(18)式的正确性。

3.3 小结

随机变量 $\bar{\Phi}_{\text{piston}}$, $\sigma_{\phi_{\text{piston}}}^2$, $\sigma_{\phi_t}^2$ 的 PDF、均值及标准差如表 1 所示。根据表 1 可以得到如下三个结论: $\sigma_{\phi_t}^2$ 的均值与子镜数目无关; $\sigma_{\phi_{\text{piston}}}^2$ 的均值及三个随机变量的标准差(std)均与子镜数目有关; 随着子镜数目的增大, 三个随机变量的标准差均趋于 0, 从而, 在子镜数目足够大时, 三个随机变量的取值为常数。图 5 所示为表 1 中 5 个量(即 3 个随机变量的均值及标准差)与子镜数目 N 及标准差 σ_{piston} (或 σ_l) 的关系图。图 5 明确地印证了此处给出的三个结论。

$$\langle v \rangle = \frac{\iint v I(u, v) du dv}{\iint I(u, v) du dv}. \quad (20)$$

利用帕塞瓦尔定理, 同时假设拼接式主镜均匀照明, (19)式及(20)式可化简为^[17]

$$\langle u \rangle = \frac{f}{S_{\text{AP}}} \iint P(x, y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} dx dy, \quad (21)$$

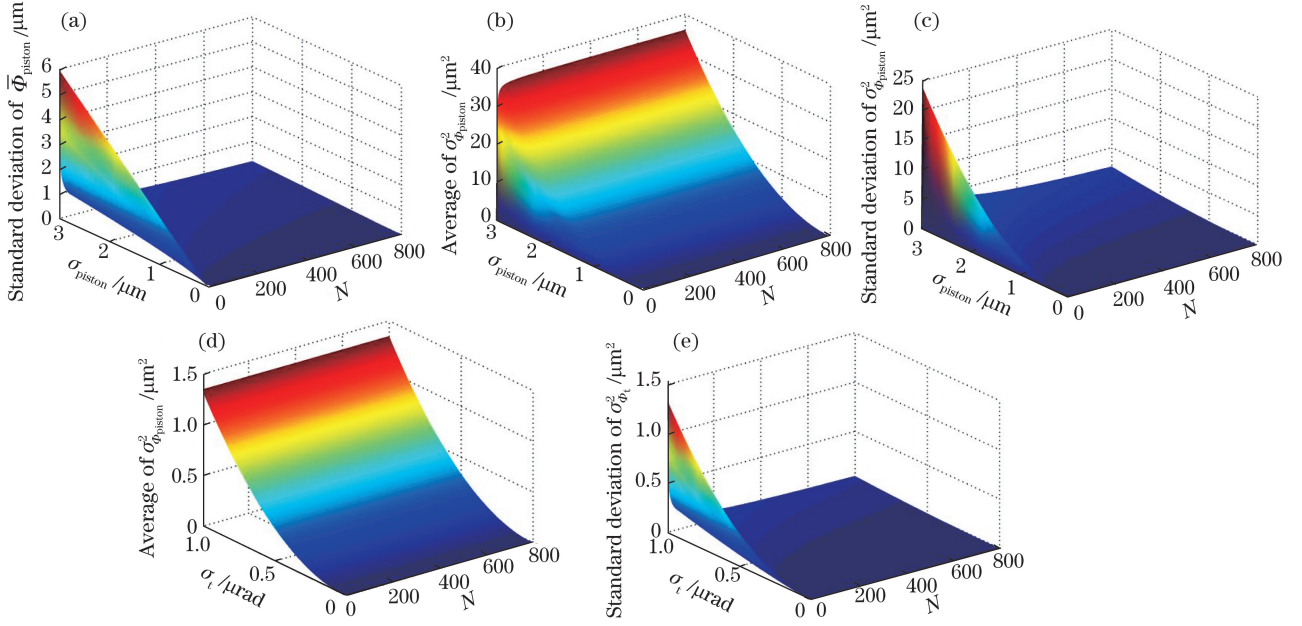


图 5 表 1 中的量与子镜数目 N 和标准差 σ_{piston} (或 σ_t) 的关系图。(a) $\overline{\Phi}_{\text{piston}}$ 标准差；
(b) $\sigma_{\Phi_{\text{piston}}}^2$ 均值；(c) $\sigma_{\sigma_{\Phi_{\text{piston}}}^2}$ 标准差；(d) $\sigma_{\Phi_t}^2$ 均值；(e) $\sigma_{\sigma_{\Phi_t}^2}$ 标准差

Fig. 5 Quantities listed in Table 1 as functions of segmented mirror number N and standard deviation σ_{piston} (or σ_t).
(a) Standard deviation of $\overline{\Phi}_{\text{piston}}$; (b) average of $\sigma_{\Phi_{\text{piston}}}^2$; (c) standard deviation of $\sigma_{\Phi_{\text{piston}}}^2$; (d) average of $\sigma_{\Phi_t}^2$;
(e) standard deviation of $\sigma_{\Phi_t}^2$

$$\langle v \rangle = \frac{f}{S_{\text{AP}}} \iint P(x, y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} dx dy, \quad (22)$$

式中: S_{AP} 为孔径光阑的透光面积。可见, 像场质心坐标与孔径上波前的平均斜率呈正比关系。对于 piston 误差, 有

$$\langle u \rangle_{\text{piston}} = \frac{f}{S_{\text{AP}}} \iint P(x, y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} dx dy = 0, \quad (23)$$

$$\langle v \rangle_{\text{piston}} = \frac{f}{S_{\text{AP}}} \iint P(x, y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} dx dy = 0. \quad (24)$$

也就是说, 对于只存在 piston 误差的拼接式系统, 其像场质心恒与焦点重合, 不随 piston 误差的变化而变化。对于 tip/tilt 误差, 有

$$\langle u \rangle_{\text{tip/tilt}} = \frac{f}{S_{\text{AP}}} \iint P(x, y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} dx dy = \frac{2f}{N} \sum_{l=1}^N t_{xl}, \quad (25)$$

$$\langle v \rangle_{\text{tip/tilt}} = \frac{f}{S_{\text{AP}}} \iint P(x, y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} dx dy = \frac{2f}{N} \sum_{l=1}^N t_{yl}. \quad (26)$$

拼接式系统的像场质心与各个子镜对应方向上的倾斜量有关, 数值上正比于各个子镜倾斜量的均值。鉴于各子镜倾斜的随机性, $\langle u \rangle_{\text{tip/tilt}}$ 及 $\langle v \rangle_{\text{tip/tilt}}$ 为随机变量, 在独立性假设下, 很容易获得其服从的

统计规律, $\langle u \rangle_{\text{tip/tilt}} \sim \mathcal{N}[0, (2f\sigma_t)^2/N]$, $\langle v \rangle_{\text{tip/tilt}} \sim \mathcal{N}[0, (2f\sigma_t)^2/N]$ 。

5 斯特列尔比统计特性

根据定义, 斯特列尔比 R_{strehl} 可表示为

$$R_{\text{strehl}} = \frac{I_{\text{aberration}}(0, 0)}{I_{\text{ideal}}(0, 0)}, \quad (27)$$

式中: $I_{\text{aberration}}(0, 0)$ 及 $I_{\text{ideal}}(0, 0)$ 分别为含像差系统及衍射受限系统像场中心的强度值。为了计算这两个物理量, 令(6)式中 p_l ($l=1, 2, \dots, N$)、 t_{xl} ($l=1, 2, \dots, N$)、 t_{yl} ($l=1, 2, \dots, N$) 均为零, 且 $u=v=0$, 可得到 $I_{\text{ideal}}(0, 0)$; 令(6)式中 $u=v=0$, 可得到 $I_{\text{aberration}}(0, 0)$ 。因而, 在失调拼接系统中, 其斯特列尔比为

$$R_{\text{strehl}} = \frac{4}{27N^2 s^4} \left| \sum_{l=1}^N \tilde{H}(2t_{xl}f, 2t_{yl}f) \exp(-j2kp_l) \right|^2. \quad (28)$$

仅含 piston 误差时, 其斯特列尔比为

$$R_{\text{strehl}} = \frac{1}{N^2} \left| \sum_{l=1}^N \exp(-j2kp_l) \right|^2. \quad (29)$$

仅含 tip/tilt 误差时, 其斯特列尔比为

$$R_{\text{strehl}} = \frac{4}{27N^2 s^4} \left| \sum_{l=1}^N \tilde{H}(2t_{xl}f, 2t_{yl}f) \right|^2. \quad (30)$$

当像差比较小时,根据 Maréchal 近似, R_{strehl} 又可表示为

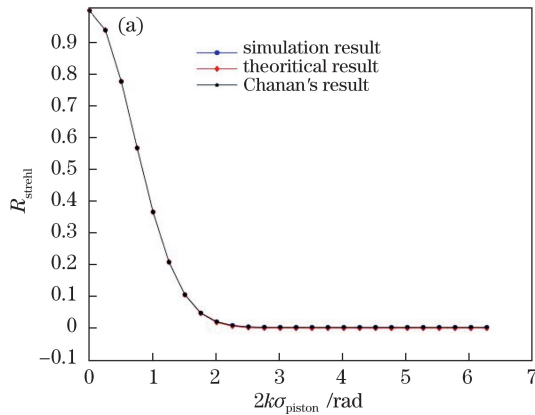
$$R_{\text{strehl}} = \exp[-(k\sigma_{\text{wf}})^2], \quad (31)$$

式中: σ_{wf} 为像差的均方误差。对于 piston 误差, σ_{wf} 为 $\sigma_{\phi_{\text{piston}}}$; 对于 tip/tilt 误差, σ_{wf} 为 σ_{ϕ_t} 。考察 R_{strehl} 的系综平均性质,则有

$$\langle R_{\text{strehl,p}} \rangle = \int_0^\infty \exp[-(k\sigma_{\phi_{\text{piston}}})^2] f_{\sigma_{\phi_{\text{piston}}}}^2 d\sigma_{\phi_{\text{piston}}}^2 = \frac{1}{(1 + 8k^2\sigma_{\text{piston}}^2/N)^{\frac{N-1}{2}}}, \quad (32)$$

$$\langle R_{\text{strehl,t}} \rangle = \int_0^\infty \exp[-(k\sigma_{\phi_t})^2] f_{\sigma_{\phi_t}}^2 d\sigma_{\phi_t}^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{5}{3N}k^2s^2\sigma_t^2\right)^N}. \quad (33)$$

另外,Chanan 等^[9]也计算 piston 误差影响下的系综



平均斯特列尔比,其结果为

$$\langle R_{\text{strehl,c}} \rangle = \frac{1 + (N-1)\exp[-(2k\sigma_{\text{piston}})^2]}{N}. \quad (34)$$

Yaitskova 等^[11]计算了 tip/tilt 误差影响下的系综平均斯特列尔比,其结果为

$$\langle R_{\text{strehl,y}} \rangle = 1 - \kappa^2 + \frac{\kappa^4}{4} \left(1 + \gamma' + \frac{2}{N}\right), \quad (35)$$

式中: $\kappa = \sqrt{5/3}ks\sigma_t$, γ' 为形状因子, $\gamma' = 168/125$ 。需要强调的是,要使得(35)式的结果不大于 1, κ^2 需要满足以下条件:

$$\kappa^2 \leq \frac{4}{1 + \gamma' + 2/N} < \frac{4}{1 + \gamma'} \approx 1.70, \quad (36)$$

而这一条件直接限制了(35)式的适用范围。

为了验证(32)式与(33)式的正确性,本文进行了仿真实验, piston 误差仿真结果如图 6 所示, tip/tilt 误差仿真结果如图 7 所示。

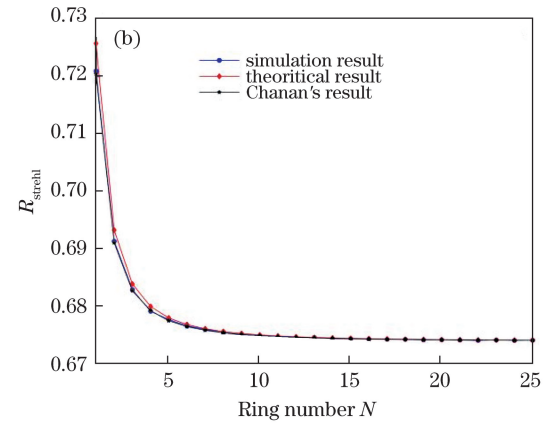


图 6 piston 误差斯特列尔比与标准差 σ_{piston} 及子镜数目 N 的关系图。(a) $N=331$; (b) $\sigma_{\text{piston}}=0.1 \mu\text{m}$

Fig. 6 Strehl ratio of piston error as a function of standard deviation σ_{piston} and segmented mirror number N .

(a) $N=331$; (b) $\sigma_{\text{piston}}=0.1 \mu\text{m}$

从图 6 可以很清楚地看到,文献[9]的计算结果与数值仿真结果几乎一致,本文由 Maréchal 近似导出的解析结果虽然与数值仿真结果有偏差,但是偏差极小;从图 7 可以得出结论, Yaitskova 等^[11]的推导等式只适合于较小的子镜 tip/tilt 误差,而随着 tip/tilt 误差的增大,其偏差也逐渐增大,甚至出现完全背离理想情况的上升趋势,更印证其适用范围的局限性,而本文由 Maréchal 近似导出的解析结果在趋势上基本与数值仿真结果一致,只是在 tip/tilt 误差较大时存在明显的偏差,这是由 Maréchal 近似的小像差假设导致的,但相对 Yaitskova 等^[11]推导的表达式,则准确得多,可用于含 tip/tilt 误差拼接式系统的性能预测。

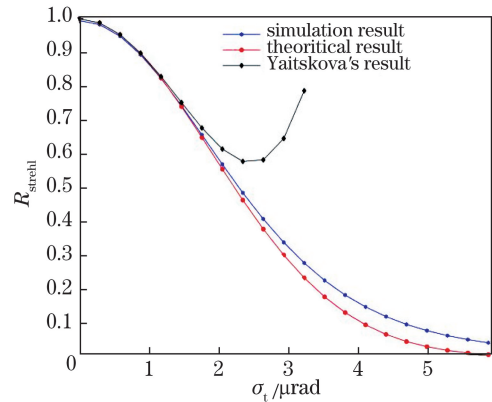


图 7 tip/tilt 误差斯特列尔比与标准差 σ_t 的关系图
Fig. 7 Strehl ratio of tip/tilt error as a function of standard deviation σ_t

6 结 论

拼接镜技术是建造下一代大型天文望远镜的关键技术,其采用大量小口径镜面拼接以实现等效的大型反射镜面,而子镜的刚性运动引入的 piston 误差及 tip/tilt 误差严重影响其成像性能。本文分别对 piston 误差及 tip/tilt 误差导致的失调非连续波前进行了理论推导,分析可知:piston 误差对应的波前均值服从正态分布,而方差服从 Γ 分布;tip/tilt 误差对应的波前均值恒为零,其方差也服从 Γ 分布。同时,理论推导了含 piston 误差及 tip/tilt 误差的拼接式系统的像场质心,分析可知:含 piston 误差的拼接式系统像场质心恒与焦点重合,而含 tip/tilt 误差的拼接式系统像场质心正比于各子镜倾斜量的均值,整体上服从正态分布。基于 Maréchal 近似,结合失调非连续波前的相关统计特性,理论计算了对应的斯特列尔比,与文献[9,11]的推导结果相比较,其具有很高的精度;同时指出,文献[11]的结果仅适用于小的 tip/tilt 误差,对于较大的 tip/tilt 误差可采用本文的解析公式。本文的解析分析将进一步丰富对拼接式系统成像性能的认识与理解。在下一步的工作中,将考虑子镜位置传感器的误差传播问题,即给定拼接镜系统的失调拼接波前,分析位置传感器系统的控制误差对校正后的拼接波前的性能影响。

参 考 文 献

- [1] Su D Q, Cui X Q. Active optics-key technology of the new generation telescopes[J]. Progress in Astronomy, 1999, 17(1): 1-14.
苏定强, 崔向群. 主动光学—新一代大望远镜的关键技术[J]. 天文学进展, 1999, 17(1): 1-14.
- [2] Chanan G A, Nelson J E, Mast T S. Segment alignment for the Keck telescope primary mirror[J]. Proceedings of SPIE, 1986, 628: 466-470.
- [3] Lefort B, Castro J. The GTC primary mirror control system[J]. Proceedings of SPIE, 2008, 7019: 70190I.
- [4] Palunas P, MacQueen P J, Booth J A, *et al.* Imaging performance of the Hobby-Eberly telescope [J]. Proceedings of SPIE, 2006, 6267: 62673V.
- [5] Stobie R, Meiring J G, Buckley D A H. Design of the southern African large telescope[J]. Proceedings of SPIE, 2000, 4003: 355-362.
- [6] Seo B J, Nissly C, Angeli G, *et al.* Investigation of primary mirror segment's residual errors for the thirty meter telescope[J]. Proceedings of SPIE, 2009, 7427: 74270F.
- [7] Sedghi B, Müller M, Dimmler M. Analyzing the impact of vibrations on E-ELT primary segmented mirror[J]. Proceedings of SPIE, 2016, 9911: 991111.
- [8] Perrin M D, Acton D S, Lajoie C P, *et al.* Preparing for JWST wavefront sensing and control operations [J]. Proceedings of SPIE, 2016, 9904: 99040F.
- [9] Chanan G, Troy M. Strehl ratio and modulation transfer function for segmented mirror telescopes as functions of segment phase error[J]. Applied Optics, 1999, 38(31): 6642-6647.
- [10] Yaitskova N, Dohlen K, Dierickx P. Diffraction in OWL: effects of segmentation and segments edge misfigure[J]. Proceedings of SPIE, 2002, 4841: 171-182.
- [11] Yaitskova N, Dohlen K. Tip-tilt error for extremely large segmented telescopes: detailed theoretical point-spread-function analysis and numerical simulation results[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2002, 19(7): 1274-1285.
- [12] Yaitskova N, Dohlen K, Dierickx P. Analytical study of diffraction effects in extremely large segmented telescopes [J]. Journal of the Optical Society of America A, 2003, 20(8): 1563-1575.
- [13] Mast T S, Nelson J E, Welch W J. Effects of primary mirror segmentation on telescope image quality[J]. Proceedings of SPIE, 1982, 332: 123-133.
- [14] Li B, Tang J L, Yu W H, *et al.* Effect of segmented errors on image quality of segmented telescope[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2017, 54(7): 071202.
李斌, 唐金龙, 于文豪, 等. 拼接误差对拼接镜成像质量的影响[J]. 激光与光电子学进展, 2017, 54(7): 071202.
- [15] Goodman J W. Introduction to Fourier optics[M]. 3rd ed. Englewood: Roberts & Company Publishers, 2005.
- [16] Sheng Z, Xie S Q, Pan C Y. Probability and statistics [M]. 4th ed. Beijing: Higher Education Press, 2008.
盛骤, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 4版. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [17] Mahajan V N. Line of sight of an aberrated optical system[J]. Journal of the Optical Society of America A, 1985, 2(6): 833-846.