

可调谐的非傍轴自加速光束

兰燕平¹, 赖松陶¹, 施逸乐¹, 任志君¹, 钱义先^{1,2*}

¹浙江师范大学物理与电子信息工程学院, 浙江 金华 321004;

²浙江省光场调控技术重点实验室, 浙江 杭州 310018

摘要 采用谱相位调制的方法, 在理论上提出可调谐非傍轴自加速光束的产生方法, 并通过实验对该理论进行验证。利用驻相近似和光学焦散线原理建立了谱相位与光束传输轨迹之间的数学模型。理论模拟和实验结果表明所提方法突破了传统傍轴近似的限制, 产生了非傍轴自加速光束。这类轨迹灵活可控的自加速光束在光学微粒操纵、微粒运输和引导、超分辨成像等领域具有潜在的应用价值。

关键词 物理光学; 光场调控; 自加速光束; 光学焦散线; 驻相近似; 相位调制

中图分类号 O436

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201939.1026001

Tunable Non-Paraxial Accelerating Beams

Lan Yanping¹, Lai Songtao¹, Shi Yile¹, Ren Zhijun¹, Qian Yixian^{1,2*}

¹College of Physics and Electronic Information Engineering, Zhejiang Normal University,
Jinhua, Zhejiang 321004, China;

²Key Laboratory of Optical Field Manipulation of Zhejiang Province, Hangzhou, Zhejiang 310018, China

Abstract Herein, a method for generating tunable nonparaxial accelerating beams is proposed theoretically by spectral phase modulation and verified experimentally. The mathematical model of the relationship between spectral phase and beam propagation trajectory is established based on the stationary phase approximation and the principle of optical caustics. Theoretical simulations and experimental results show that the proposed method overcomes the limitations of conventional paraxial approximation, and nonparaxial accelerating beams are generated. Such accelerating beams with flexible and tunable trajectories have potential applications in the areas of optical particle manipulation, particle transport and guidance, and super-resolution imaging.

Key words physical optics; optical field manipulation; accelerating beams; optical caustics; stationary phase approximation; phase modulation

OCIS codes 260.2110; 140.3300; 350.4855; 060.5060; 350.5500

1 引 言

近年来, 自加速光束的出现使激光光束在自由空间中沿弯曲轨迹传播成为可能^[1], 这类新型特殊光束无须依靠外场即能实现自加速, 而且还具有无衍射特性。因此, 在光学微粒的操作^[2-7]、微粒运输和引导^[4]、自弯曲等离子通道的产生^[8-9]、光子弹^[10]、激光成丝^[11]、自聚焦光束的产生^[12-13]以及超分辨成像^[14-15]等领域具有重要的应用。

最早发现的自加速光束是沿抛物线轨迹传输的艾里自加速光束^[16-17], 但是其传输轨迹受限于单一

的抛物线, 越来越多的学者对如何调控自加速光束的传输轨迹展开了研究。通过在传输介质中引入梯度势的方法可调控产生种类多样的自加速光束^[18-20], 如幂轨迹以及正弦、对数、指数等轨迹的自加速光束。但是这些自加速光束不能在自由空间中实现, 且制备这些自加速光束所需的材料相当困难。Zhang 等^[21]通过求解椭圆和抛物线坐标系下的亥姆霍兹方程, 先后得到了大角度弯曲的沿椭圆轨迹传播的马蒂尔光束和沿抛物线轨迹的韦伯光束。Kaminer 等^[22]也将直角坐标系下的亥姆霍兹方程转化到极坐标系下, 得到了沿着圆轨迹传播的半贝

收稿日期: 2019-04-10; 修回日期: 2019-05-14; 录用日期: 2019-06-21

基金项目: 浙江省自然科学基金(LY17A040002)、国家自然科学基金(61377014, 11674288)、浙江省光场调控技术重点实验室开放基金(ZFOFM2019004)

* E-mail: qianyixian@zjnu.edu.cn

塞尔光束。这种通过求解波动微分方程或亥姆霍兹方程产生自加速光束的方法并不容易实现,因为这类偏微分方程的自加速无衍射解析解十分稀少。

自加速光束与折叠突变^[23-24]紧密联系,从几何光学的观点出发,自加速光束与一簇几何相切光线形成的焦散线有关,故自加速光束也称为焦散光束。Greenfield等^[25]通过光学焦散线方法构建实空间相位,并产生了沿任意凸轨迹传播的自加速光束。Penciu等^[26]则在Greenfield等研究的基础上通过振幅和相位调制产生了非傍轴自加速光束。也有一些学者根据自加速轨迹函数推算入射面上的相位分布,并提出了上述求解过程的迭代算法,分别得到了一维、二维以及自聚焦光束^[27],该方法实际上也属于通过构建实空间相位产生自加速光束的范畴。

将焦散线的概念应用到傅里叶空间,利用谱相位调制的方法可产生自加速光束。Chremmos等^[13]利用相位调制方法产生了具有自加速特性的突然自聚焦光束和自散焦光束。另外,利用空间谱相位梯度的概念,可产生多路径的自加速光束^[28]。本文利用驻相近似法^[29-30]和光学焦散线原理^[31-32],建立傅里叶空间相位与光束传输轨迹的数学模型,产生具有普遍意义的沿任意凸轨迹传输的自加速光束。特别地,该方法可产生一种圆轨迹自加速光束,该光束在横截面上呈对称分布^[33],区别于传统的具有能量不对称性的艾里光束,从而提高了这类光束在微粒操控上的灵活性。该光束沿圆路径传输的特性证实本文所提出的方法不仅可以灵活控制自加速光束的传输轨迹,而且突破了傍轴近似的限制,可产生沿大角度弯曲传输的非傍轴自加速光束。

2 理论分析

在一维情况下,光场的传播遵循角谱衍射的规律,其在数学上可用积分式表达为

$$\phi(s, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int A(k) \exp \left[i \xi K^2 \sqrt{1 - \left(\frac{k}{K} \right)^2} \right] \exp(iks) dk, \quad (1)$$

式中: $s = x/x_0$ 表示无量纲的横向坐标, x_0 是一个任意的横向尺度因子; $\xi = \frac{z\lambda}{2\pi x_0^2}$ 代表归一化传播距离; $K = 2\pi x_0/\lambda$ 表示光波的波数; k 为对应于 s 的无量纲空间频率,且 $k = x_0 \sin \alpha/\lambda = K \sin \alpha/(2\pi)$,其中 α 为光束与光轴 z 的夹角; $A(k)$ 是初始光场的角谱,由 $\phi(s, 0)$ 的傅里叶变换得到,它决定着光束在

空间中的传播行为。

受实验上通过立方相位调制产生艾里光束^[17]的启发,笔者认为利用谱相位调制可产生传输轨迹更加复杂的弯曲光束。假设自加速光束在空间中沿着 $s = f(\xi)$ 轨迹传播,其角谱为

$$A(k) = g(k) \exp[i\varphi(k)], \quad (2)$$

式中: $g(k) = \exp\left(-\frac{ak^2}{w_0^2}\right)$ 为高斯型振幅; w_0 为高斯分布的束腰半径; a 为常数,满足 $0 < a < 1$,保证了(1)式的可积性; $\varphi(k)$ 为谱相位。把(2)式代入(1)式可得

$$\phi(s, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int g(k) \exp[i\psi(k)] dk, \quad (3)$$

式中: $\psi(k) = \xi K \sqrt{K^2 - k^2} + ks + \varphi(k)$ 。利用驻相近似法求解(3)式,则相位部分的一阶导数等于零,这表示衍射积分的主要贡献来自于谱相位平面上驻相点附近相位变化缓慢的地方,因此

$$\psi'(k) = -\xi K k / \sqrt{K^2 - k^2} + s + \varphi'(k) = 0. \quad (4)$$

由(4)式可见,对于一个给定的频率 k ,对应着一个 s 和 ξ 的线性方程。从几何光学的观点来看,该线性方程表示一条从谱相位面发出且经过透镜的光线,如图1(a)中与曲线相切的虚线所示。此时,若再对(4)式进行关于 ξ 的求导,则可得

$$f'(\xi) = K k / \sqrt{K^2 - k^2}, \quad (5)$$

式中: $f'(\xi)$ 表示轨迹 $s = f(\xi)$ 切线的斜率。由此可知,从谱相位面上的驻相点发出的经过透镜的光线与该轨迹相切,也就是说,这条弯曲光束是光线簇散焦形成的包络面,即焦散线。在焦散线以下区域的每个点都有两条光线经过,而在焦散线上的点只有一条光线穿过,在焦散线以上的点则没有光线经过。这种焦散线发生的跳跃式变化的情况就是光学突变的表现。实际上,自加速光束的焦散轨迹与散焦的光线簇之间的关系满足勒让德变换^[34]。

为了保证空间频率与光线轨迹一一对应,(5)式必须具有单调性,这表明产生的自加速光束的弯曲轨迹总是凸轨迹或者凹轨迹^[25]。图1(b)为凸轨迹示意图,凸轨迹在数学上满足 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} >$

$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$,其中 x_1, x_2 为轨迹方程 $f(x)$ 中任意两点。凹轨迹与凸轨迹恰好相反。艾里光束的抛物线轨迹是一种典型的凸轨迹。

将 $k = K \sin \alpha/(2\pi)$ 代入(5)式可得

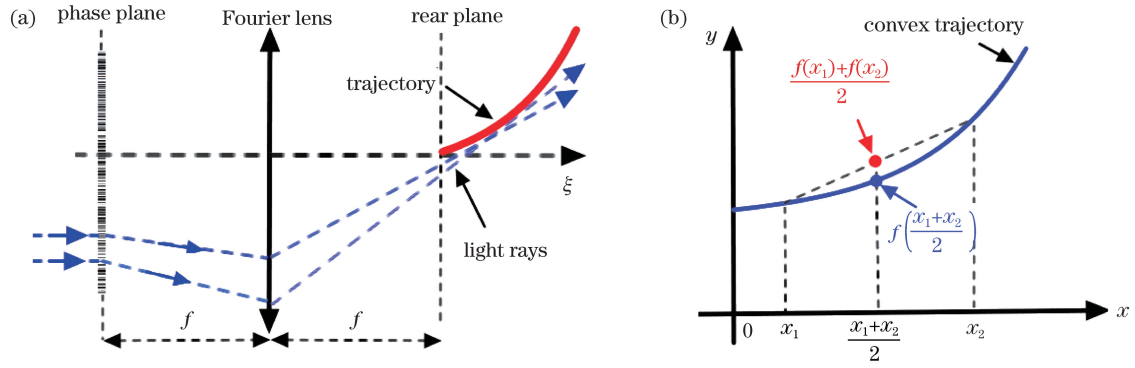


图 1 自加速光束产生原理。(a) 谱相位调制产生自加速光束示意图；(b) 凸轨迹定义

Fig. 1 Mechanism of generating accelerating beams. (a) Schematic for generating accelerating beams by spectral phase modulation; (b) definition of convex trajectory

$$f'(\xi) = k \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \alpha}{2\pi}\right)^2}. \quad (6)$$

对(6)式进行分析后可知该公式在 $0^\circ \sim 90^\circ$ 范围内为随 α 单调递增的函数,若自加速光束的 α 为 60° ,可得 $f'(\xi) = k \sqrt{1 - \frac{3}{16\pi^2}} \approx 1.0096k$;若自加速光束的 α 为 2° ,则有 $f'(\xi) = k \sqrt{1 - \left(\frac{\sin 2^\circ}{2\pi}\right)^2} \approx 1.0006k$ 。比较两个结果可发现,傍轴与非傍轴下的焦散光线极其接近,故为了便于运算,可将(6)式简化为

$$f'(\xi) = k. \quad (7)$$

由上述分析可知,(7)式适用于傍轴和非傍轴两种情况。联立(4)和(7)式,最终可得传播轨迹与谱相位之间的关系为

$$\varphi(k) = \int [f'(\xi)\xi - f(\xi)] dk. \quad (8)$$

将(8)式得到的谱相位加载到空间光调制器上,用已知高斯光束准直照射,经透镜傅里叶变换作用

后,即可产生自加速光束。通过改变加载的相位,可实现对光束的自加速轨迹的调控。为了验证上述推导的正确性,以经典的艾里光束的抛物线轨迹 $s = \frac{1}{4}\xi^2$ 为例,利用(8)式解出对应谱相位的表达式为 $\varphi(k) = k^3/3$ 。上述立方相位的结果与之前的结果相吻合^[17]。

3 数值模拟

以产生沿着对数轨迹传播的自加速光束为例,令其轨迹为 $s = a_1 \lg(a_2 \xi)$,其中 $a_1 = 10, a_2 = 0.6$ 。由(8)式可得该光束的谱相位为 $\varphi(k) = 10k \lg(-6/k)$ 。图 2 为可调谐自加速光束的一维光场演化图,其中图 2(a)、(b)和(c)分别呈现了沿对数轨迹、4 次幂轨迹和正弦轨迹传输的自加速光束。在所有的数值模拟中,若无特殊说明,取 $a = 0.1$,高斯激光的束腰半径 $w_0 = 1 \text{ mm}$,横向尺度因子 $x_0 = 160 \mu\text{m}$,光波长 $\lambda = 632.8 \times 10^{-6} \text{ mm}$ 。

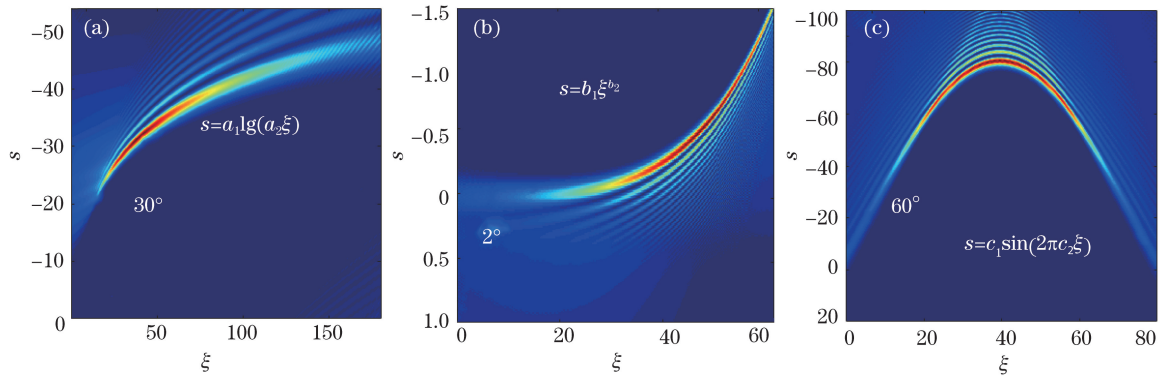


图 2 可调谐自加速光束的一维光场演化图。(a) 对数轨迹, $a_1 = 10, a_2 = 0.6$; (b) 4 次幂轨迹, $b_1 = 10^{-7}, b_2 = 4$; (c) 正弦轨迹, $c_1 = 80, c_2 = 160$

Fig. 2 One-dimensional optical field evolutions of tunable accelerating beams. (a) Logarithmic trajectory, $a_1 = 10, a_2 = 0.6$; (b) fourth-power trajectory, $b_1 = 10^{-7}, b_2 = 4$; (c) sinusoidal trajectory, $c_1 = 80, c_2 = 160$

由图 2 中的模拟结果可以看出,图 2(a)和(c)中的光束为非傍轴自加速光束,在空间中分别以 30° 和 60° 的大角度弯曲传播。

通过上述推导可知,傍轴条件下的结果可代替非傍轴。因此,在傍轴近似下,利用二维变量可分离的方法可产生二维轨迹可调自加速光束。假设二维初始角谱为 $A(k_x, k_y) = g(k_x)g(k_y)\exp[i\varphi(k_x) + i\varphi(k_y)]$, k_x 和 k_y 分别为对应于 s_x 和 s_y 的无量纲空间频率, $s_x = x/x_0, s_y = y/y_0$, 其中 x_0 和 y_0 均为尺度因子。

假设二维自加速光束沿着正弦轨迹传输,假设两个一维光场分别为 $A(k_x) = g(k_x)\exp[i\varphi(k_x)]$

和 $A(k_y) = g(k_y)\exp[i\varphi(k_y)]$, 对应轨迹分别为 $s_x = c_1 \sin(c_2 \xi)$ 和 $s_y = c_1 \sin(c_2 \xi)$ 。根据(8)式,分别可得到 $\varphi(k_x)$ 和 $\varphi(k_y)$ 。图 3(a)为该光束在三维空间中传输演化的切片图,其中虚线表示理论正弦曲线,代表自加速光束主瓣的传输轨迹。从图 3(a)的数值模拟结果可以看出,该光束沿正弦轨迹传输,与理论曲线吻合。图 3(b)显示了光束在 $s_x-\xi$ 平面下的理论传输轨迹,其中 4 幅插图分别展现了光束在传播距离 ξ 为 10, 25, 40, 65 处的光场分布图。通过观察可以发现,这类非傍轴自加速光束的光场在传输过程中依然以艾里形状分布,这是折叠型光学突变带来的必然结果。

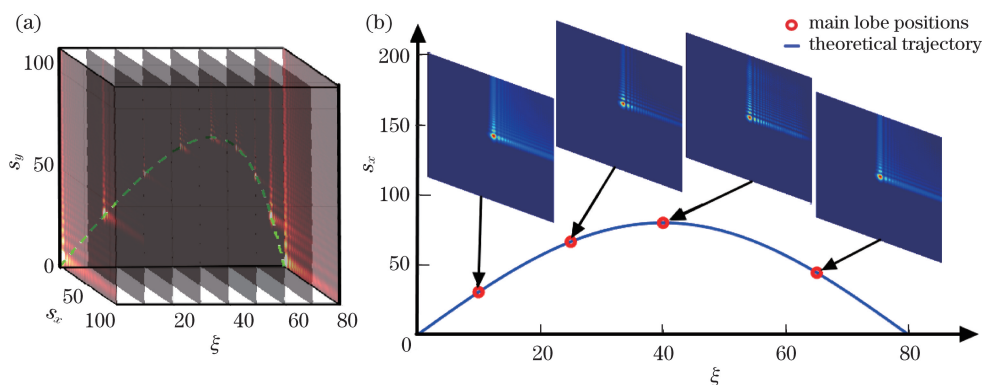


图 3 二维正弦自加速光束。(a)二维正弦自加速光束传输演化切片图;(b) $s_x-\xi$ 平面理论传播轨迹图。

图中圆圈代表主瓣位置,曲线和虚线表示理想传输正弦曲线

Fig. 3 Two-dimensional sinusoidal accelerating beams. (a) Propagation evolution slices of two-dimensional sinusoidal accelerating beams; (b) theoretical propagation trajectory in $s_x-\xi$ plane. Circles represent positions of main lobe, and solid and dotted curves denote ideal propagation sinusoidal trajectories in Fig. 3

4 实验验证

搭建了如图 4 所示的实验系统来证实本文所提方法的有效性。实验中氦氖激光器发出波长 $\lambda = 632.8 \text{ nm}$, 束腰半径 w_0 为 8.6 mm 的高斯光束,其

经扩束准直后,垂直入射到加载了谱相位的反射式空间光调制器(SLM)。该 SLM 由德国的 Holoeye Pluto 公司提供,其像元大小为 $8 \mu\text{m}$,分辨率为 $1920 \text{ pixel} \times 1080 \text{ pixel}$ 。经过调制后的反射光通过分束镜,再入射到焦距为 $f' = 300 \text{ mm}$ 的傅里叶透

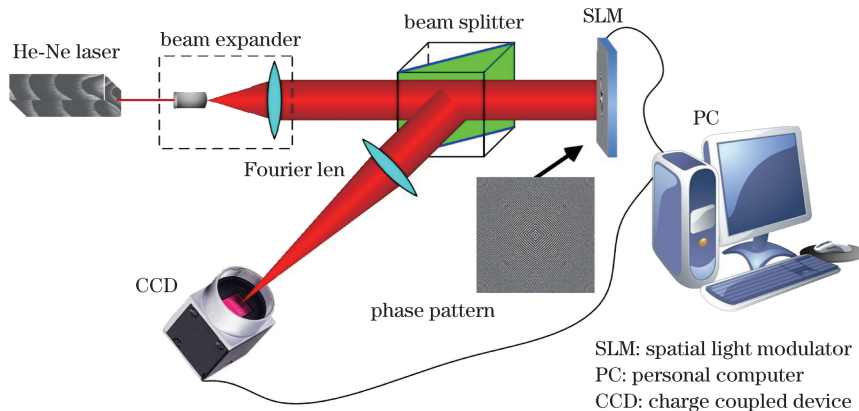


图 4 实验装置图

Fig. 4 Experimental setup

镜上,最终由放置在傅里叶透镜后焦面上的可移动 CCD 记录其光强分布。

实验上,用该装置产生沿着半径为 r 的圆轨迹 ($s^2 + \xi^2 = r^2$) 传输的非傍轴自加速光束。取 $r = 60$, 利用(8)式可计算出谱相位的表达式为

$$\varphi(k) = \frac{r}{2(t_1 + 1)} - \frac{r}{2(t_2)^2} - \frac{r \operatorname{artanh}(t_1)}{2}, \quad (9)$$

式中: t_1 和 t_2 是与 k 有关的项,且有 $t_1 = -\sqrt{k^2/(1+k^2)}$, $t_2 = \sqrt{1/(1+k^2)}$; $\operatorname{artanh}(\cdot)$ 表示反双曲正切计算符号。注意到该相位表达式在数学

上是一个偶函数,因此数值模拟产生的光场也必然呈对称分布,图 5(a)即展现了对称的一维光场传输演化模拟结果。图 5(b1)~(b3)分别呈现了 ξ 为 10, 35, 50 处的传播平面光场。将计算得到的二维谱相位图(如图 4 中 phase pattern 所示)加载到 SLM 上,通过 CCD 分别在 z 为 10, 15, 50 cm 处探测光束的光场分布,结果分别如图 5(c1)~(c3)所示。从图 5 可以看出,由对称相位产生的光场呈对称分布,实验结果与数值模拟结果吻合。相比于光场不对称性的自加速艾里光束,这种光场分布具有对称性的光束在微粒操控方面具有更大的灵活度。

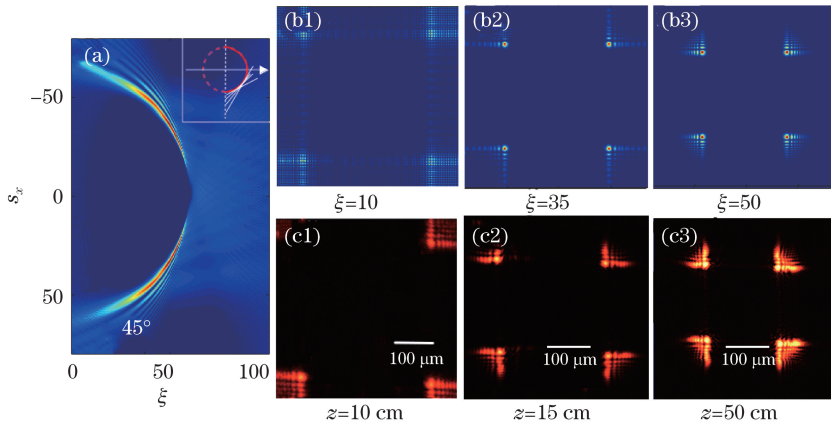


图 5 圆轨迹自加速光束。(a) 一维光场演化图,右上角的插图为焦散线形成示意图,实曲线代表圆轨迹自加速光束,不带箭头的实线为光线簇,虚线表示透镜后焦平面;(b1)~(b3) ξ 为 10、35 和 50 处的模拟光强分布;(c1)~(c3) z 为 10, 15, 50 cm 处的实验光强分布

Fig. 5 Accelerating beam with circular trajectory. (a) One-dimensional optical field evolution and inset in upper right corner is schematic of generating caustics, where solid curve represents accelerating beam with circular trajectory, solid lines without arrows represent cluster of rays, and dotted line represents rear focal plane of lens; (b1)-(b3) numerical intensity distributions at different distances: $\xi = 10, 35, 50$; (c1)-(c3) experimental intensity distributions at different distances: $z = 10, 15, 50$ cm

5 结 论

利用驻相近似和光学焦散线的方法推导了谱相位与传输轨迹之间的关系式,通过数值模拟和实验证实了该方法可产生丰富的可调谐非傍轴自加速光束。相比于已有的产生自加速光束的方法,本文所提方法简单高效,产生的自加速光束在光学微操纵、微粒运输和引导、超分辨成像等领域具有潜在的应用价值。

参 考 文 献

[1] Chen Z G, Xu J J, Hu Y, *et al.* Control and novel applications of self-accelerating beams[J]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(10): 1026009.
陈志刚, 许京军, 胡毅, 等. 自加速光的调控及其新

奇应用[J]. 光学学报, 2016, 36(10): 1026009.

[2] Baumgartl J, Mazilu M, Dholakia K. Optically mediated particle clearing using Airy wavepackets[J]. Nature Photonics, 2008, 2(11): 675-678.
[3] Cao R, Yang Y, Wang J G, *et al.* Microfabricated continuous cubic phase plate induced Airy beams for optical manipulation with high power efficiency[J]. Applied Physics Letters, 2011, 99(26): 261106.
[4] Zhang P, Prakash J, Zhang Z, *et al.* Trapping and guiding microparticles with morphing autofocusing Airy beams[J]. Optics Letters, 2011, 36(15): 2883-2885.
[5] Zheng Z, Zhang B F, Chen H, *et al.* Optical trapping with focused Airy beams[J]. Applied Optics, 2011, 50(1): 43-49.
[6] Schley R, Kaminer I, Greenfield E, *et al.* Loss-proof self-accelerating beams and their use in non-

- paraxial manipulation of particles' trajectories[J]. Nature Communications, 2014, 5: 5189.
- [7] Zhao J Y, Chremmos I D, Song D H, *et al.* Curved singular beams for three-dimensional particle manipulation[J]. Scientific Reports, 2015, 5: 12086.
- [8] Li L, Li T, Wang S M, *et al.* Plasmonic Airy beam generated by in-plane diffraction[J]. Physical Review Letters, 2011, 107(12): 126804.
- [9] Polynkin P, Kolesik M, Moloney J V, *et al.* Curved plasma channel generation using ultraintense Airy beams[J]. Science, 2009, 324(5924): 229-232.
- [10] Chong A, Renninger W H, Christodoulides D N, *et al.* Airy-Bessel wave packets as versatile linear light bullets[J]. Nature Photonics, 2010, 4(2): 103-106.
- [11] Polynkin P, Kolesik M, Moloney J. Filamentation of femtosecond laser Airy beams in water[J]. Physical Review Letters, 2009, 103(12): 123902.
- [12] Lai S T, Lan Y P, Mao H X, *et al.* Self-focusing characteristics of circular array Airy vortex beams [J]. Chinese Journal of Lasers, 2019, 46(4): 0405002. 赖松陶, 兰燕平, 毛红行, 等. 环形阵列艾里涡旋光束的自聚焦特性 [J]. 中国激光, 2019, 46(4): 0405002.
- [13] Chremmos I D, Chen Z G, Christodoulides D N, *et al.* Abruptly autofocusing and autodefocusing optical beams with arbitrary caustics[J]. Physical Review A, 2012, 85(2): 023828.
- [14] Jia S, Vaughan J C, Zhuang X W. Isotropic three-dimensional super-resolution imaging with a self-bending point spread function[J]. Nature Photonics, 2014, 8(4): 302-306.
- [15] Vettenburg T, Dalgarno H I C, Nylk J, *et al.* Light-sheet microscopy using an Airy beam[J]. Nature Methods, 2014, 11(5): 541-544.
- [16] Berry M V, Balazs N L. Nonspreading wave packets[J]. American Journal of Physics, 1979, 47(3): 264-267.
- [17] Siviloglou G A, Broky J, Dogariu A, *et al.* Observation of accelerating Airy beams[J]. Physical Review Letters, 2007, 99(21): 213901.
- [18] Qian Y X, Zhang S T. Manipulation of accelerating beam in gradient potentials[J]. Optics Communications, 2019, 435: 409-412.
- [19] Ye Z Y, Liu S, Lou C B, *et al.* Acceleration control of Airy beams with optically induced refractive-index gradient[J]. Optics Letters, 2011, 36(16): 3230-3232.
- [20] Efremidis N K. Airy trajectory engineering in dynamic linear index potentials[J]. Optics Letters, 2011, 36(15): 3006-3008.
- [21] Zhang P, Hu Y, Li T C, *et al.* Nonparaxial Mathieu and Weber accelerating beams[J]. Physical Review Letters, 2012, 109(19): 193901.
- [22] Kammer I, Bekenstein R, Nemirovsky J, *et al.* Nondiffracting accelerating wave packets of Maxwell's equations[J]. Physical Review Letters, 2012, 108(16): 163901.
- [23] Berry M V, Upstill C. IV catastrophe optics: morphologies of caustics and their diffraction patterns [M]//Wolf E. Progress in optics. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1980, 18: 257-346.
- [24] Saunders P T. An introduction to catastrophe theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.
- [25] Greenfield E, Segev M, Walasik W, *et al.* Accelerating light beams along arbitrary convex trajectories[J]. Physical Review Letters, 2011, 106(21): 213902.
- [26] Penciu R S, Paltoglou V, Efremidis N K. Closed-form expressions for nonparaxial accelerating beams with pre-engineered trajectories[J]. Optics Letters, 2015, 40(7): 1444-1447.
- [27] Li S Z, Shen X J, Wang L. Generation and control of self-accelerating Airy beams[J]. Chinese Journal of Lasers, 2018, 45(5): 0505003. 李绍祖, 沈学举, 王龙. 自加速艾里光束的生成及控制[J]. 中国激光, 2018, 45(5): 0505003.
- [28] Hu Y, Bongiovanni D, Chen Z G, *et al.* Multipath multicomponent self-accelerating beams through spectrum-engineered position mapping[J]. Physical Review A, 2013, 88(4): 043809.
- [29] Stamnes J J. Waves in focal regions. propagation, diffraction and focusing of light, sound and water waves [M]. New York: Taylor & Francis Group, 1986.
- [30] Wong B R. Asymptotic approximations of integrals [M]. New York: Academic Press, 1989.
- [31] Kravtsov Y A, Orlov Y I. Caustics, catastrophes, and wave fields[M]. 2nd ed. Berlin, Heidelberg: Springer, 1999.
- [32] Vaveliuk P, Lencina A, Rodrigo J A, *et al.* Caustics, catastrophes, and symmetries in curved beams[J]. Physical Review A, 2015, 92(3): 033850.
- [32] Vaveliuk P, Lencina A, Rodrigo J A, *et al.* Symmetric Airy beams[J]. Optics Letters, 2014, 39(8): 2370-2373.
- [34] Gutiérrez C E. Reflection, refraction, and the Legendre transform[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2011, 28(2): 284-289.