

基于多维混合柯西分布的点云配准

唐志荣¹, 刘明哲^{1,3*}, 王畅², 蒋悦²

¹成都理工大学核技术与自动化工程学院, 四川 成都 610059;

²四川大学电气信息学院, 四川 成都 610065;

³成都理工大学地学核技术四川省重点实验室, 四川 成都 610059

摘要 为提高三维点云在数据随机缺失和噪声干扰等复杂情况下的配准精度, 提出一种基于多维混合柯西分布 (MMC) 的点云配准方法。将点云数学模型扩展为 MMC 模型, 求解模型各参数, 并构造出特征四面体, 以优化旋转矩阵与平移向量; 通过最大期望算法分别求出目标点云和待配准点云在 MMC 模型下的数据中心、协方差矩阵和权重的值。仿真与实验数据表明: 与几种常用的算法相比, MMC 算法即使在点云数据存在遮挡、缺失, 大小不一致, 含随机噪声, 且具有无序性的条件下, 也能精确配准, 且具有良好的稳健性。

关键词 机器视觉; 多维混合柯西分布; 最大期望算法; 点云配准; 噪声; 数据缺失

中图分类号 TP391.9

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201939.0115005

Point Cloud Registration Based on Multi-Dimensional Mixed Cauchy Distribution

Tang Zhirong¹, Liu Mingzhe^{1,3*}, Wang Chang², Jiang Yue²

¹College of Nuclear Technology and Automation Engineering, Chengdu University of Technology, Chengdu, Sichuan 610059, China;

²College of Electrical Engineering and Information Technology, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610065, China;

³Provincial Key Laboratory of Applied Nuclear Techniques in Geosciences, Chengdu University of Technology, Chengdu, Sichuan 610059, China

Abstract To improve the registration accuracy of three-dimensional point clouds in the complex situations of random data missing, noise interference and so on, a method of registering point clouds based on multi-dimensional mixed Cauchy distribution (MMC) is proposed. The mathematical model of point clouds is extended to the MMC model, and the parameters of this model are solved to construct a characteristic tetrahedron so that the rotation matrix and translation vector are optimized. Based on the MMC model, the data centers, covariance matrices and weights of target point clouds and point clouds to register are obtained by the expectation-maximization algorithm. The simulation data and experimental data show that the MMC algorithm can be used to realize an accurate registration and simultaneously possesses a good robustness if compared with several common algorithms under the conditions that the point cloud data are occluded, missing, size-inconsistent, interfered by random noise and out of order.

Key words machine vision; multi-dimensional mixed Cauchy distribution; expectation-maximization algorithm; point cloud registration; noise; data-missing

OCIS codes 150.6910; 110.6880; 110.3010

1 引 言

点云配准在逆向工程、计算机视觉、文物数字化、人脸识别等领域中的应用越来越广泛。最经典的是 Besl 等^[1]提出的迭代最近点 (ICP) 算法, 该算

法是通过创建参考点云与待配准点云间欧氏距离最小的对应点对, 然后对待配准点云进行刚体变换, 使得两个点云中对应点对的均方根误差 (RMSE) 最小, 从而求出最佳的旋转和平移变换矩阵, 但是此算法的效率低且容易陷入局部极小值。

收稿日期: 2018-07-23; 修回日期: 2018-08-28; 录用日期: 2018-09-10

基金项目: 国家自然科学基金(61802033)

* E-mail: liumz@cdut.edu.cn

为了提高配准精度和配准效率,许多学者在经典 ICP 算法上做了改进。Ying 等^[2]提出了一种基于 7 维空间迭代的 Scale-ICP 算法,该算法能适应不同尺度的配准,但依赖于迭代过程,导致算法存在收敛比较缓慢的问题。Sharp 等^[3]利用不变特征提出 ICPIF (ICP Registration Using Invariant Features)算法。计算点云中对应点的曲率是一个依赖于邻域点协方差的算法,可以实现局部重叠的点云配准^[4-5],但是在理论上对点云数据缺失情况下的配准很难实现。

此外,基于高斯混合模型(GMM)^[6-7]的算法具有很好的稳健性,但是对初始值依赖程度高且计算量大。Myronenko 等^[8]提出了一种相干点漂移(CPD)算法,在异常值和缺失点的情况下,CPD 算法结合 GMM 时点云能准确配准,但是数据存在遮挡、缺失且带噪声,无序点云的配准比较困难。基于关键点的配准算法^[9-12]可以实现精确配准,然而计算每个点的特征比较耗时。点云自动配准^[13-15]方法的配准速度快,但是配准精度有待提高。王畅等^[16]提出一种基于结构特征点云快速配准方法,该算法在配准精度和配准效率方面都有所提高,但在点云数据点严重缺失和交叉数据点不足时,可能会使结果不理想,甚至失效。Ji 等^[17]提出了一种基于遗传算法(GA)的配准方法,该方法适用于点云的初始配准。赵敏等^[18]提出了一种基于 l^p 空间力学模型的点云配准算法, l 表示线性赋范空间, p 表示空间维度,该算法收敛速度较快,效果优良,但是仍然需要结合经典 ICP 算法来寻找对应点对。

Yang 等^[19]根据点云配准过程中的几何变换特性,将配准过程转变为特殊欧氏群 SE(3)的优化问题,并利用 BnB (branch and bound)方法搜索和 ICP 交替迭代及优化,从而实现点云全局最优配准;然而,旋转矩阵限定于特殊正交群 SO(3)空间,很有必要进一步拓展其尺度配准特性。Campbell 等^[20]提出了一种在 L_2 距离下 3 维刚性高斯混合校准问题的全局最优解的方法,采用 BnB 方法搜索 3 维刚体运动的 SE(3)空间,以保证全局最优性。Zeng 等^[21]提出了一种无监督的特征学习方法,利用现有 RGB-D 重建中的数百万个对应标签,能够在新场景中匹配局部几何,以进行重建。

本文提出一种基于多维混合柯西分布(MMC)的点云配准方法,采用最大期望(EM)算法分别找出两点云的数据中心点,即可直接进行配准,不需要找出两点云间的对应点对。在噪声环境下,由于噪

声不改变点云的数据中心点,因此 MMC 算法具有抗噪声能力。GMM 需要进行幂指数运算,而 MMC 只需要简单的乘除法运算,更能充分利用计算机的性能。此外,根据特征四面体的相似性,可以进行点云的仿射配准。通过仿真,本文能够有效地完成在数据存在遮挡、缺失,带噪声,以及数据大小不一致环境下点云的精确配准。

2 基于 MMC 的点云配准方法

2.1 传统配准算法存在的问题

传统配准算法通常采用的是经典 ICP 算法。目标点云 $\mathbf{P} = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ 与待配准点云 $\mathbf{Q} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m\}$ 之间的刚体几何变换可表示为

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{R}\mathbf{q}_j + \mathbf{T} \quad (i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,m), \quad (1)$$

式中: \mathbf{R} 为旋转矩阵, \mathbf{T} 为平移向量。在点云数据存在遮挡、缺失的情况下,要让点云找到对应点并达到 ICP 算法较好的初始配准状态比较困难。

2.2 基于 MMC 的初始配准

为了解决上述所提出的点云数据存在遮挡、缺失和带噪声的问题,采用多维混合柯西分布对点云 $\mathbf{P} = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ 进行数据分布拟合,得到初始参数,包括权重 $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K\}$ 且 $\alpha_k \geq 0$ ($0 \leq k \leq K$)、数据中心点 $\boldsymbol{\mu} = \{\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \dots, \boldsymbol{\mu}_K\}$ 和协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma} = \{\boldsymbol{\Sigma}_1, \boldsymbol{\Sigma}_2, \dots, \boldsymbol{\Sigma}_K\}$ 。建立初始 MMC 模型:

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_P | \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \varphi(\mathbf{X}_P | \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k), \quad (2)$$

式中 \mathbf{X}_P 为点云 \mathbf{P} 的样本数据, φ 为 MMC 密度函数。以相同 $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K\}$ 去拟合 $\mathbf{Q} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m\}$, 得到新的参数与模型,即

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_Q | \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\Sigma}^*) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \varphi(\mathbf{X}_Q | \boldsymbol{\mu}_k^*, \boldsymbol{\Sigma}_k^*), \quad (3)$$

式中: \mathbf{X}_Q 为点云 \mathbf{Q} 的样本数据,新的数据中心点 $\boldsymbol{\mu}^* = \{\boldsymbol{\mu}_1^*, \boldsymbol{\mu}_2^*, \dots, \boldsymbol{\mu}_K^*\}$, 新的协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}^* = \{\boldsymbol{\Sigma}_1^*, \boldsymbol{\Sigma}_2^*, \dots, \boldsymbol{\Sigma}_K^*\}$ 。由刚体几何变换可知,两点云的数据中心之间存在的关系为

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{\mu}_1 - \bar{\mathbf{P}}, \boldsymbol{\mu}_2 - \bar{\mathbf{P}}, \dots, \boldsymbol{\mu}_K - \bar{\mathbf{P}}) = \\ &\mathbf{R}_0(\boldsymbol{\mu}_1^* - \bar{\mathbf{Q}}, \boldsymbol{\mu}_2^* - \bar{\mathbf{Q}}, \dots, \boldsymbol{\mu}_K^* - \bar{\mathbf{Q}}), \end{aligned} \quad (4)$$

式中: $\bar{\mathbf{P}}$ 表示点云 \mathbf{P} 的均值点, $\bar{\mathbf{Q}}$ 表示点云 \mathbf{Q} 的均值点, \mathbf{R}_0 表示初始旋转矩阵。选取误差最小的 3 组中心点与两均值点构成两个特征四面体,即可求出 \mathbf{R}_0 。再对 \mathbf{R}_0 进行奇异分解,即

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{u}\mathbf{v}^H, \quad (5)$$

式中: \mathbf{u} 和 \mathbf{v} 均为酉矩阵, 满足 $\mathbf{I} = \mathbf{u}\mathbf{u}^H = \mathbf{v}\mathbf{v}^H$, \mathbf{I} 为单位矩阵; \mathbf{s} 为一个对角矩阵, 除对角线上的元素外, 其余元素均为 0, 主对角线上的每个元素都称为奇异值。进一步得到旋转矩阵 \mathbf{R}_1 为

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{u}\mathbf{v}^H. \quad (6)$$

利用 K-means 算法分别找出 $\boldsymbol{\mu}$ 与 $\boldsymbol{\mu}^*$ 的初始聚类中心向量 $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ 与 $\tilde{\boldsymbol{\mu}}^*$, $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ 与 $\tilde{\boldsymbol{\mu}}^*$ 满足

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\mu}}^* + \mathbf{T}, \quad (7)$$

将 \mathbf{R}_1 代入(7)式可得平移向量 \mathbf{T}_0 。至此, 便完成了初始配准。

2.3 精确配准

P, Q 两个点云之间的协方差矩阵为

$$\boldsymbol{\Sigma}_k = E \left[\frac{\sum_{i=1}^n (\mathbf{p}_i - \boldsymbol{\mu}_k) (\mathbf{p}_i - \boldsymbol{\mu}_k)^T}{n-1} \right] = E \left[\frac{\sum_{j=1}^m (\mathbf{R}\mathbf{q}_j + \mathbf{T} - \boldsymbol{\mu}_k) (\mathbf{R}\mathbf{q}_j + \mathbf{T} - \boldsymbol{\mu}_k)^T}{m-1} \right] = \mathbf{R}\boldsymbol{\Sigma}_k^* \mathbf{R}^T, \quad (8)$$

进一步可得

$$\boldsymbol{\Sigma}_P = \mathbf{R}\boldsymbol{\Sigma}_Q \mathbf{R}^T, \quad (9)$$

式中 $\boldsymbol{\Sigma}_P = \sum_{k=1}^K \boldsymbol{\Sigma}_k$, $\boldsymbol{\Sigma}_Q = \sum_{k=1}^K \boldsymbol{\Sigma}_k^*$ 。由于存在噪声, 所以(9)式不严格相等, 故需要先对 $\boldsymbol{\Sigma}_Q$ 进行重构, 以减小噪声。对 $\boldsymbol{\Sigma}_P, \boldsymbol{\Sigma}_Q$ 进行奇异分解, 可得

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma}_P = \mathbf{U}_P \mathbf{S}_P \mathbf{V}_P^H \\ \boldsymbol{\Sigma}_Q = \mathbf{U}_Q \mathbf{S}_Q \mathbf{V}_Q^H \end{cases}, \quad (10)$$

式中: $\mathbf{U}_P, \mathbf{U}_Q$ 和 $\mathbf{V}_P, \mathbf{V}_Q$ 都是酉矩阵; $\mathbf{S}_P, \mathbf{S}_Q$ 是一个对角矩阵, 除了对角线上的元素外, 其余元素均为 0, 主对角线上的每个元素都称为奇异值。在理想情况下, $\mathbf{S}_P = \mathbf{S}_Q$, 所以对 $\boldsymbol{\Sigma}_Q$ 进行重构降噪后可得

$$\boldsymbol{\Sigma}_Q^* = \mathbf{U}_Q \mathbf{S}_P \mathbf{V}_Q^H. \quad (11)$$

因为 \mathbf{R} 为正交阵, 所以有

$$\mathbf{I} = \mathbf{R}\mathbf{R}^T. \quad (12)$$

将(9)式两端同时右乘 \mathbf{R} , 得到 Sylvester 方程为

$$\boldsymbol{\Sigma}_P \mathbf{R} - \mathbf{R} \boldsymbol{\Sigma}_Q^* = \mathbf{0}. \quad (13)$$

将 \mathbf{R}_1 代入(13)式后可得

$$\boldsymbol{\Sigma}_P \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_1 \boldsymbol{\Sigma}_Q^* = \Delta \boldsymbol{\Sigma}. \quad (14)$$

由(14)式减去(13)式, 得到 Lyapunov 型矩阵方程为

$$\boldsymbol{\Sigma}_P \Delta \mathbf{R} - \Delta \mathbf{R} \boldsymbol{\Sigma}_Q^* = \Delta \boldsymbol{\Sigma}, \quad (15)$$

式中: $\Delta \mathbf{R} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}$ 。对(15)进行变形后可得

$$\text{vec}(\Delta \mathbf{R}) = [\boldsymbol{\Sigma}_P^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_Q^{*T}] \text{vec}(\Delta \mathbf{R}) + (\boldsymbol{\Sigma}_P^{-1} \otimes \mathbf{I}) \text{vec}(\Delta \boldsymbol{\Sigma}), \quad (16)$$

式中: $\text{vec}(\Delta \mathbf{R}) = (\Delta R_{11}, \Delta R_{12}, \Delta R_{13}, \Delta R_{21}, \Delta R_{22}, \Delta R_{23}, \Delta R_{31}, \Delta R_{32}, \Delta R_{33})^T$, \otimes 表示 Kronecker 积运算, $\text{vec}(\Delta \boldsymbol{\Sigma}) = (\Delta \Sigma_{11}, \Delta \Sigma_{12}, \Delta \Sigma_{13}, \Delta \Sigma_{21}, \Delta \Sigma_{22}, \Delta \Sigma_{23}, \Delta \Sigma_{31}, \Delta \Sigma_{32}, \Delta \Sigma_{33})^T$ 。

对(16)式采用 Jacobi 迭代法, 即令

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma}_P = \mathbf{D}_P - \mathbf{L}_P - \mathbf{U}_P \\ \boldsymbol{\Sigma}_Q^* = \mathbf{D}_Q - \mathbf{L}_Q - \mathbf{U}_Q \end{cases}, \quad (17)$$

式中

$$\mathbf{D}_P = \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}_{P11}, \boldsymbol{\Sigma}_{P22}, \boldsymbol{\Sigma}_{P33}),$$

$$\mathbf{D}_Q = \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}_{Q11}^*, \boldsymbol{\Sigma}_{Q22}^*, \boldsymbol{\Sigma}_{Q33}^*),$$

$$\mathbf{L}_P = \begin{bmatrix} 0 & & \\ -\boldsymbol{\Sigma}_{P21} & 0 & \\ -\boldsymbol{\Sigma}_{P31} & -\boldsymbol{\Sigma}_{P32} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_Q = \begin{bmatrix} 0 & & \\ -\boldsymbol{\Sigma}_{Q21}^* & 0 & \\ -\boldsymbol{\Sigma}_{Q31}^* & -\boldsymbol{\Sigma}_{Q32}^* & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{U}_P = \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{\Sigma}_{P12} & -\boldsymbol{\Sigma}_{P13} \\ & 0 & -\boldsymbol{\Sigma}_{P23} \\ & & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{U}_Q = \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{\Sigma}_{Q12}^* & -\boldsymbol{\Sigma}_{Q13}^* \\ & 0 & -\boldsymbol{\Sigma}_{Q23}^* \\ & & 0 \end{bmatrix}.$$

经整理后, Jacobi 迭代方式为

$$\begin{aligned} \text{vec}(\Delta \mathbf{R})^{(t+1)} &= (\mathbf{D}_P \otimes \mathbf{I} - \mathbf{I} \otimes \mathbf{D}_Q)^{-1} \cdot \\ &[\mathbf{L}_P + \mathbf{L}_Q] \otimes \mathbf{I} - \mathbf{I} \otimes (\mathbf{L}_Q^T + \mathbf{L}_P^T)] \cdot \\ \text{vec}(\Delta \mathbf{R})^{(t)} &+ (\mathbf{D}_P \otimes \mathbf{I} - \mathbf{I} \otimes \mathbf{D}_Q)^{-1} \cdot \\ &\text{vec}(\Delta \boldsymbol{\Sigma}), \end{aligned} \quad (18)$$

使解得的 \mathbf{R} 满足代价函数 $J(\mathbf{R})$, 即

$$J(\mathbf{R}) = \arg \min \frac{1}{2} \|\mathbf{R}\boldsymbol{\Sigma}_Q^* \mathbf{R}^T - \boldsymbol{\Sigma}_P\|_F^2, \quad (19)$$

便可求得精确的 \mathbf{R} , 再将 \mathbf{R} 代回(7)式即可求出精确的 \mathbf{T} 。

3 多维混合柯西分布的参数确定

3.1 多维混合柯西分布

柯西分布是一个数学期望不存在的连续型概率分布, 其一维概率密度函数为

$$f(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0, \gamma) = \frac{1}{\pi\gamma \left[1 + \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\gamma} \right)^2 \right]}, \quad (20)$$

式中: \mathbf{x}_0 为定义分布峰值位置的位置参数; γ 为最大值一半处的一半宽度的尺度参数。

与单变量密度类似, 当自由度参数等于 1 时, 它们是等效的, 一个 D 维柯西概率密度函数为

$$f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, D) = \frac{\Gamma\left(\frac{1+D}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \pi^{\frac{D}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}} [1 + (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})]^{\frac{1+D}{2}}}, \quad (21)$$

式中: $\Gamma(\cdot)$ 表示伽马函数。当 $D=1$ 时, (21) 式与 (20) 式相等。

3.2 多维混合柯西分布的 EM 迭代

这里采用 EM 算法对上述问题进行求解, EM 算法包括两个步骤: 1) 步骤 E, 计算完整数据的对数

似然函数的期望; 2) 步骤 M, 通过最大化中间量的值来获得新的参数值。

对给定观测数据 $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$, 在 EM 算法下, 混合多元柯西分布的代价函数为

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K \gamma_{ik} \lg \frac{\alpha_k \Gamma\left(\frac{1+D}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \pi^{\frac{D}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}_k|^{\frac{1}{2}} [1 + (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k)^T \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k)]^{\frac{1+D}{2}}}, \quad (22)$$

式中: γ_{ik} 为中间隐藏变量; $\theta = (\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \dots, \boldsymbol{\mu}_K; \boldsymbol{\Sigma}_1, \boldsymbol{\Sigma}_2, \dots, \boldsymbol{\Sigma}_K)$ 。则步骤 E 可表示为

$$\gamma_{ik} = \frac{\alpha_k \varphi(\mathbf{x} | \boldsymbol{\theta}_k)}{\sum_{k=1}^K \alpha_k \varphi(\mathbf{x} | \boldsymbol{\theta}_k)}, \quad (23)$$

步骤 M 是计算新一轮迭代参数模型, 只需将 (22) 式分别对 $\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k$ 求偏导, 并令偏导为 0, 对 $\boldsymbol{\mu}_k$ 求偏导可得

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \boldsymbol{\mu}_k} = \sum_{i=1}^N \gamma_{ik} \times \frac{1+D}{2} \times \frac{- (\boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} + \boldsymbol{\Sigma}_k^{-T}) (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k)}{1 + (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k)^T \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k)} = 0, \quad (24)$$

由于此方程是非线性的, 无法直接将 $\boldsymbol{\mu}_k$ 单独分离出来, 故此步骤采用迭代的方式, 即

$$\boldsymbol{\mu}_k^{t+1} = \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ik} \frac{\mathbf{x}_i}{1 + (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k^t)^T (\boldsymbol{\Sigma}_k^{-1})^t (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k^t)}}{\sum_{i=1}^N \gamma_{ik} \frac{1}{1 + (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k^t)^T (\boldsymbol{\Sigma}_k^{-1})^t (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k^t)}}, \quad (25)$$

对 $\boldsymbol{\Sigma}_k$ 求偏导, 可得

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \boldsymbol{\Sigma}_k} = \sum_{i=1}^N \gamma_{ik} \times \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}_k^{-T} + \frac{1+D}{2} \times \frac{- \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k) (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k)^T \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1}}{1 + (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k)^T \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k)} \right] = 0, \quad (26)$$

因为 $\boldsymbol{\Sigma}_k$ 是正定矩阵, 所以有

$$\boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} = \boldsymbol{\Sigma}_k^{-T}. \quad (27)$$

将 (27) 式代入 (26) 式可得

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \boldsymbol{\Sigma}_k} = \sum_{i=1}^N \gamma_{ik} \times \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} + \frac{1+D}{2} \times \frac{- \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k) (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k)^T \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1}}{1 + (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k)^T \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k)} \right] = 0, \quad (28)$$

将 (28) 式左右分离可得

$$\sum_{i=1}^N \gamma_{ik} \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} = \sum_{i=1}^N \gamma_{ik} (1+D) \times \frac{- \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k) (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k)^T \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1}}{1 + (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k)^T \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k)}, \quad (29)$$

对 (29) 式等号两端同时右乘 $\boldsymbol{\Sigma}_k$, 可得

$$\sum_{i=1}^N \gamma_{ik} \mathbf{I}_k = \sum_{i=1}^N \gamma_{ik} (1+D) \times \frac{\boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k) (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k)^T}{1 + (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k)^T \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k)}, \quad (30)$$

因为

$$\mathbf{I}_k = \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_k, \quad (31)$$

将 (31) 式代入 (30) 式, 可得

$$\sum_{i=1}^N \gamma_{ik} \Sigma_k^{-1} \Sigma_k = \sum_{i=1}^N \gamma_{ik} (1+D) \times \frac{\Sigma_k^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k) (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k)^T}{1 + (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k)^T \Sigma_k^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k)}, \quad (32)$$

即

$$\sum_{i=1}^N \gamma_{ik} \Sigma_k = \sum_{i=1}^N \gamma_{ik} (1+D) \times \frac{(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k) (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k)^T}{1 + (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k)^T \Sigma_k^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k)}, \quad (33)$$

进一步可得

$$\Sigma_k = \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ik} (1+D) \times \frac{(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k) (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k)^T}{1 + (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k)^T \Sigma_k^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k)}}{\sum_{i=1}^N \gamma_{ik}}, \quad (34)$$

同样,此方程是非线性的,所以无法直接将 Σ_k 单独分离出来,故此步骤采用迭代的方式,即

$$\Sigma_k^{t+1} = \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ik} (1+D) \times \frac{(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k^t) (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k^t)^T}{1 + (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k^t)^T (\Sigma_k^{-1})^t (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k^t)}}{\sum_{i=1}^N \gamma_{ik}}. \quad (35)$$

对 α_k 在

$$\sum_{k=1}^K \alpha_k = 1 \quad (36)$$

的条件下求偏导,令

$$l(\alpha) = l(\theta) - \beta \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k - 1 \right), \beta = N, \quad (37)$$

对 α_k 求偏导可得

$$\frac{\partial l(\alpha)}{\partial \alpha_k} = \sum_{i=1}^N \gamma_{ik} \times \frac{1}{\alpha_k} - \beta = 0, \quad (38)$$

解得

$$\alpha_k = \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ik}}{N}, \quad (39)$$

通过式(25)、(35)、(39)式便分别完成了对参数 $\boldsymbol{\mu}_k$, Σ_k , α_k 的迭代更新,只需重复步骤E和步骤M,直到收敛即可。MMC算法的输入为点云 \mathbf{P} 和 \mathbf{Q} ,其中 \mathbf{Q} 可以存在随机丢失和有序排列,输出为配准后的点云 \mathbf{Q} , \mathbf{R} 和 \mathbf{T} ,具体流程为:1)选择模型参数 $K(K \geq 3)$,通过迭代式[(25)、(35)、(39)式]分别求出参数 $\boldsymbol{\mu}_k$,

Σ_k , α_k ;2)选取两组误差最小的3对数据中心,根据(4)式分别与两点云构成特征四面体;3)利用特征四面体并根据(4)式求解 \mathbf{R}_0 ;4)由(5)~(7)式求出 \mathbf{T}_0 ;5)对于点云 \mathbf{Q} 的协方差矩阵 Σ_Q ,通过(10)、(11)式进行降噪,得到 Σ_Q^* ;6)由(18)式求解得到精确的 \mathbf{R} ,使其满足(19)式的值最小;7)由(7)式求出平移向量。

4 仿 真

采用斯坦福大学提供的Bunny(31607)和Elephant(24955)三维点云数据进行仿真。分别采用3个和4个多维柯西分布模型对两个点云进行配准,即 $K_B = 3, K_E = 4$ 。仿真是在Matlab 2017a、i7-6700HQ四核处理器和GTX965M下进行的。

4.1 无数据丢失加噪声的配准

在点云数据是一一对应的理想情况下,数据不存在遮挡、缺失,但由于环境的因素总是会带入噪声的干扰,故仿真中通过对点云随机的旋转和平移,给数据加上20 dB的高斯白噪声后,其中点云配准前的初始状态如图1所示。

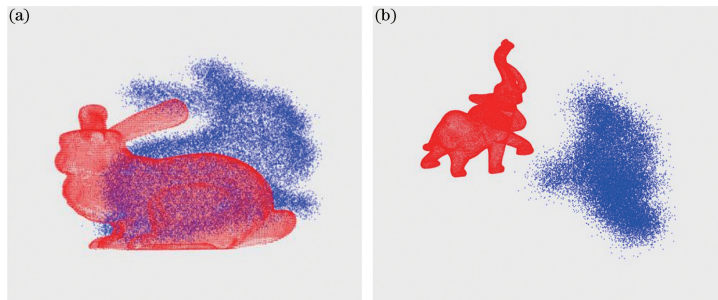


图1 点云(a) Bunny和(b) Elephant的初始状态

Fig. 1 Initial states of point clouds of (a) Bunny and (b) Elephant

这里分别采用 MMC、ICP、Scale-ICP、CPD、全局最优 ICP (Go-ICP) 和全局最优高斯混合校准 (GOGMA) 算法对点云配准效果进行对比。CPD、Go-ICP 和 GOGMA 算法配准效果如图 2 所示。

由于 ICP、Scale-ICP 算法需要初始配准, 故将文献[17]的初始配准 GA 分别与 ICP、Scale-ICP 算法相结合, 经配准后的 Bunny 点云和 Elephant 点云效果分别如图 3、4 所示。

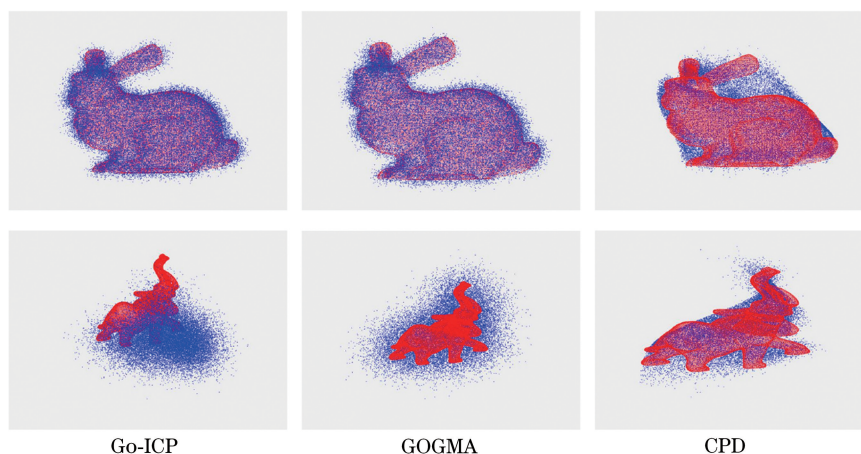


图 2 配准后两点云的对应关系

Fig. 2 Corresponding relationship between two point clouds after registration

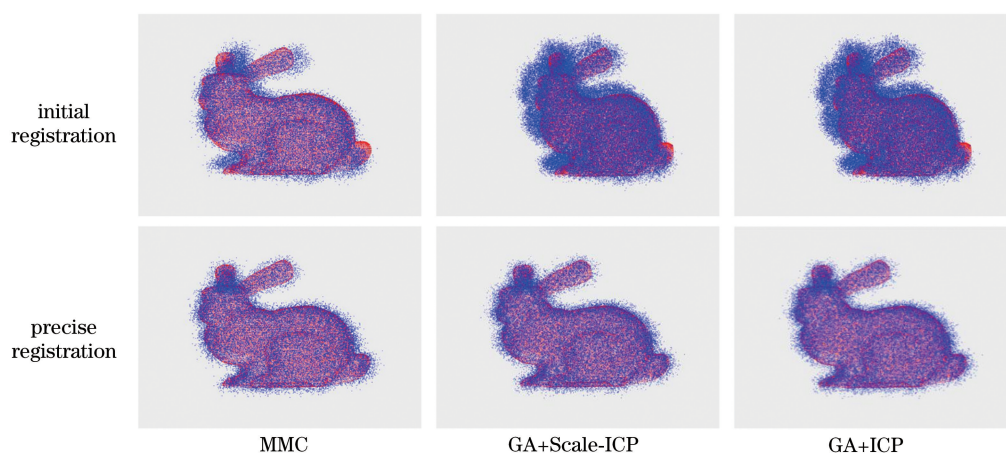


图 3 配准后 Bunny 点云的对应关系

Fig. 3 Corresponding relationship of Bunny point cloud after registration

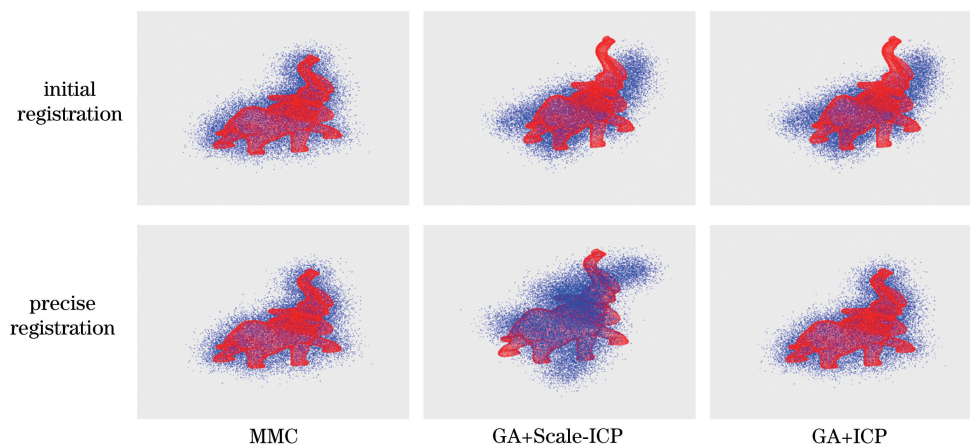


图 4 配准后 Elephant 点云的对应关系

Fig. 4 Corresponding relationship of Elephant point cloud after registration

从图 2~4 中可以看出,MMC、GA+ICP、GA+Scale-ICP、GOGMA 算法均可以完成精确配准。但是,ICP 算法可能受初始位置影响较大。而 MMC 算法经初始配准之后,配准精度比 GA 要高。总体而言,MMC、GA+ICP、GA+Scale-ICP、GOGMA 算法的配准效果一致,而 CPD 算法经配准之后,点云的原貌发生了改变。Go-ICP 算法对 Bunny 点云的配准效果较好,但是对 Elephant 点云的配准效果

较差。RMSE 的定义为

$$R_{\text{MSE}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(x_i^Q - x_i^P)^2 + (y_i^Q - y_i^P)^2 + (z_i^Q - z_i^P)^2]}, \quad (40)$$

式中 x_i^Q, y_i^Q, z_i^Q 为点云 Q 中第 i 个点的三维坐标, x_i^P, y_i^P, z_i^P 为点云 P 中第 i 个点的三维坐标。

下面对 6 种算法的 RMSE 进行比较,如表 1 所示。

表 1 6 种配准算法的 RMSE
Table 1 RMSE for six registration algorithms

Point cloud	RMSE /mm					
	MMC	GA+Scale-ICP	GA+ICP	Go-ICP	GOGMA	CPD
Bunny	0.2372	0.2388	0.2387	0.2354	0.2385	0.3078
Elephant	0.0316	0.0492	0.0316	0.1657	0.0574	0.0213

由表 1 可知:对于 Bunny 点云,MMC、GA+ICP、GA+Scale-ICP、Go-ICP、GOGMA 算法的配准精度近似相等,CPD 算法的配准精度最差;对于 Elephant 点云,MMC 算法和 GA+ICP 算法的配准精度相当,CPD 算法的配准精度最高,GA+Scale-ICP 算法的配准精度不高,Go-ICP 算法的配准精度最差。

4.2 在数据丢失和有噪声情况下的配准

很多情况下数据存在遮挡、缺失。在实验中对数据分别设置 25%、50% 和 75% 的随机数据丢失,

且在存在 20 dB 高斯白噪声的情况下进行配准。当点云数据存在遮挡、缺失时,由于缺乏对应关系,GA 不能直接用于点云的配准。因此,这里采用 MMC 算法对 ICP、Scale-ICP 算法实现初始配准,在相同条件下将 MMC 算法与 ICP、Scale-ICP、Go-ICP、GOGMA、CPD 算法进行比较。经配准后效果如图 5 和图 6 所示。

在实验数据丢失后,点的排列顺序不同,数据不再一一对应,为便于对比算法的性能,引入另一种 RMSE 计算方法:

$$R_{\text{MSE}} = \sqrt{\frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n-m} \min_j [(x_i^Q - x_j^P)^2 + (y_i^Q - y_j^P)^2 + (z_i^Q - z_j^P)^2]}, \quad (41)$$

式中 m 为丢失数据点的数目,当 $m=0$ 时,(41)式与(40)式相等。下面对 6 种算法的 RMSE 进行比较,如图 7 所示。

从图 5 和图 6 中可以看出:对于 Bunny 点云,MMC、ICP、Go-ICP、GOGMA 算法的配准效果相当,Scale-ICP 算法配准之后效果变差了;对于 Elephant 点云,MMC、ICP、GOGMA 算法的配准效果相当,Go-ICP 算法的配准效果最差;CPD 算法改变了待配准点云的形状,配准效果不稳定。

由表 1 与图 7 可以看出,MMC、ICP、GOGMA 算法的稳健性较好,Scale-ICP、CPD 算法的稳健性较差。Go-ICP 算法适合对 Bunny 点云进行配准,但是不适合对 Elephant 点云进行配准。

4.3 不同噪声环境下各算法的配准精度对比

为了验证 MMC 算法的抗噪声能力,对 6 种算

法的抗噪声能力进行对比,不同噪声环境下的配准精度如图 8 所示。

从图 8 可以看出,随着噪声的不断增大,MMC、ICP、Scale-ICP、Go-ICP、GOGMA 算法的抗噪能力都有小幅度地下降,但是都比较稳定。CPD 算法的抗噪声能力较强。

4.4 仿射配准

在扫描数据时,由于距离存在一定的差异以及被扫描物体的型号有差别,扫描出来的数据大小可能不一样。为了验证 MMC 算法具有仿射配准能力,对 Bunny 点云进行随机旋转后将待配准点云数据放大 5 倍且随机丢失 20% 的数据,再附加 20 dB 的噪声。对 Elephant 点云进行随机旋转后,将目标点云数据放大 5 倍且随机丢失 20% 的数据,再附加 20 dB 噪声。初始状态如图 9 所示。

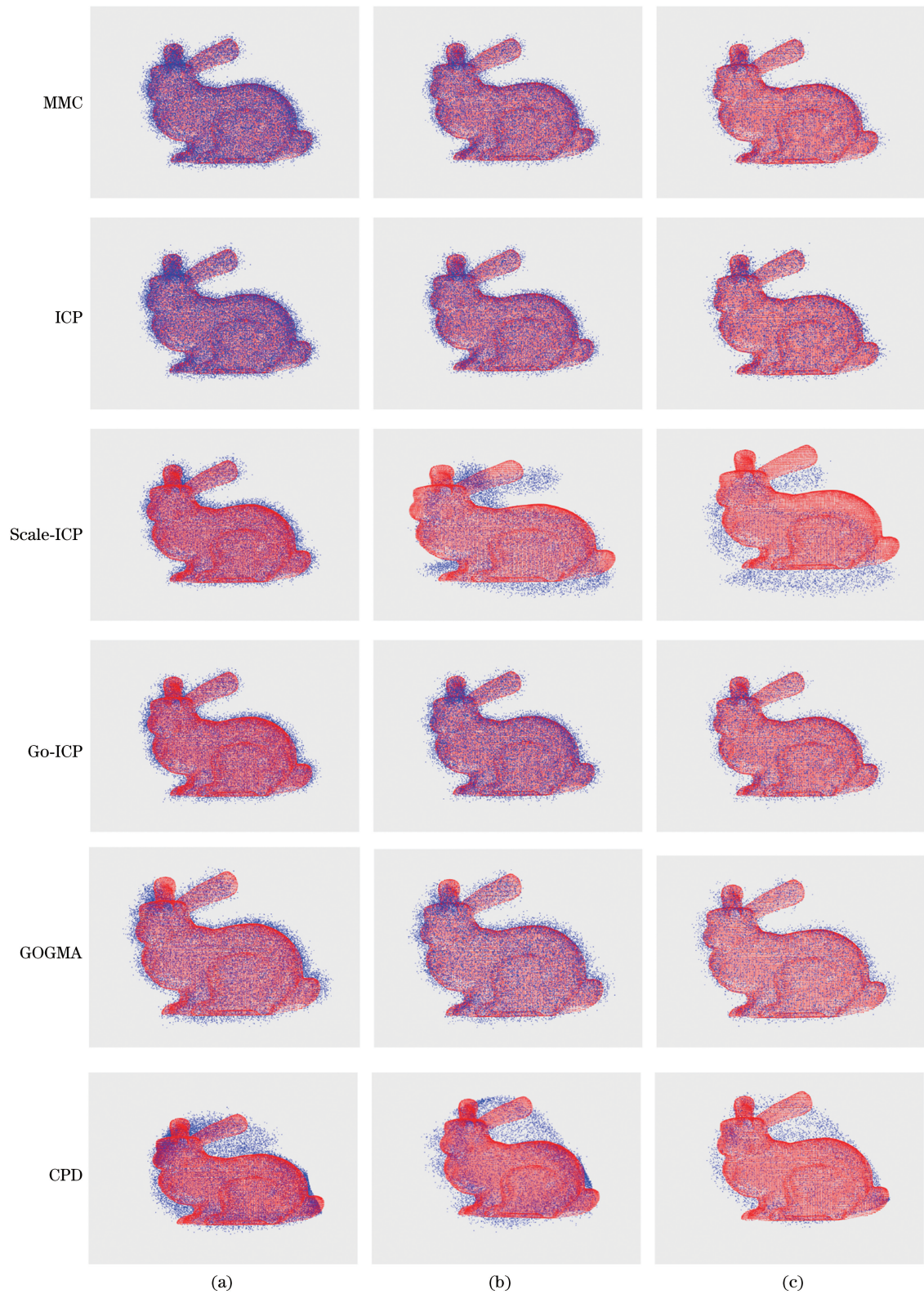


图 5 各算法配准后的 Bunny 点云对应关系。(a) 丢失 25% 数据的配准; (b) 丢失 50% 数据的配准; (c) 丢失 75% 数据的配准

Fig. 5 Corresponding relationship of Bunny point cloud after registration for each algorithm. (a) Registration with data-missing of 25%; (b) registration with data-missing of 50%; (c) registration with data-missing of 75%



图 6 各算法配准后的 Elephant 点云对应关系。(a) 丢失 25% 数据的配准; (b) 丢失 50% 数据的配准; (c) 丢失 75% 数据的配准

Fig. 6 Corresponding relationship of Elephant point cloud after registration for each algorithm. (a) Registration with data-missing of 25%; (b) registration with data-missing of 50%; (c) registration with data-missing of 75%

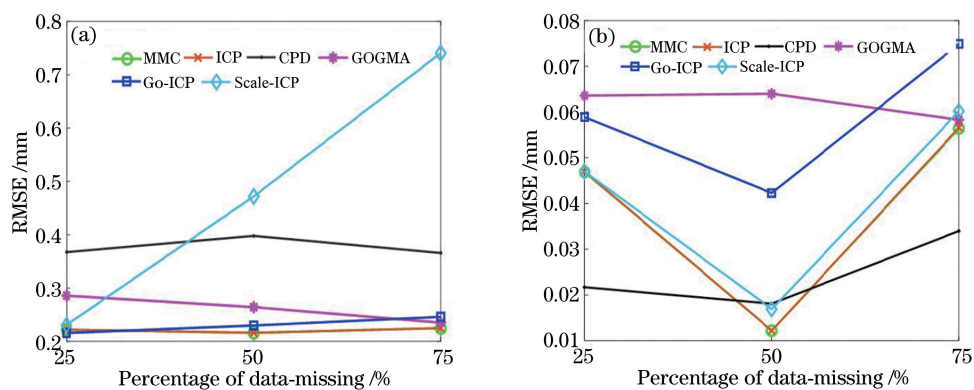


图 7 6 种配准算法的 RMSE。(a) Bunny 点云; (b) Elephant 点云

Fig. 7 RMSE for six registration algorithms. (a) Bunny point cloud; (b) Elephant point cloud

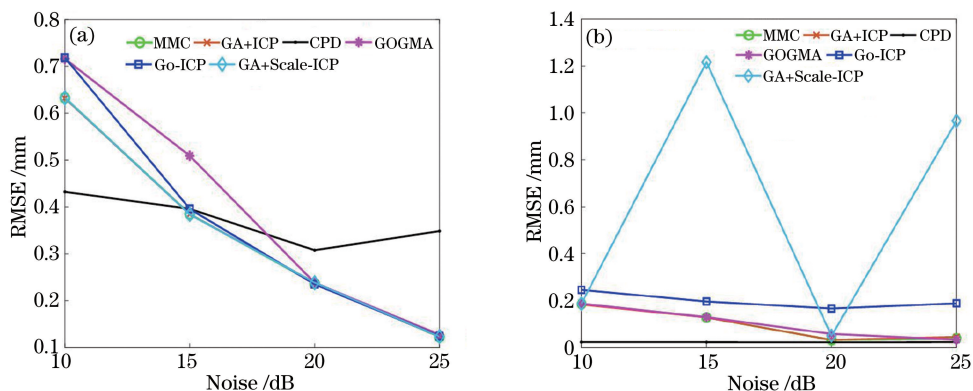


图 8 6 种配准算法的 RMSE。(a) Bunny 点云; (b) Elephant 点云

Fig. 8 RMSE for six registration algorithms. (a) Bunny point cloud; (b) Elephant point cloud

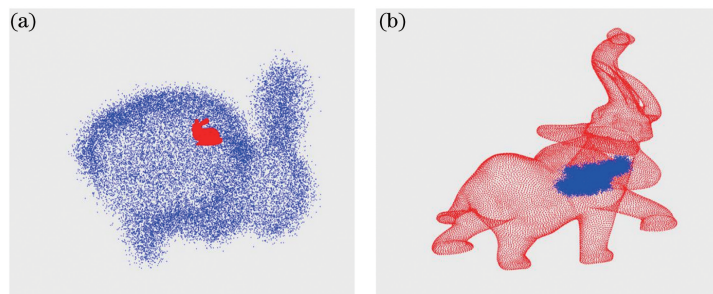


图 9 点云(a) Bunny 和(a) Elephant 的初始状态

Fig. 9 Initial states of point clouds of (a) Bunny and (b) Elephant

这里分别采用 MMC 算法和 Scale-ICP 算法进行配准。配准效果如图 10 所示。

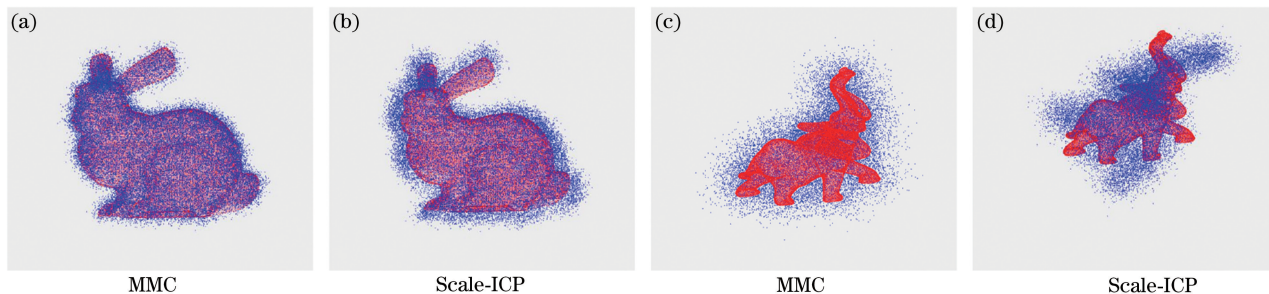


图 10 配准后两点云的对应关系。(a)(b) Bunny 点云; (c)(d) Elephant 点云

Fig. 10 Corresponding relationship between two point clouds after registration. (a)(b) Bunny point cloud; (c)(d) Elephant point cloud

两种算法的 RMSE 如表 2 所示。

表 2 两种配准算法的 RMSE

Table 2 RMSE for two registration algorithms

Algorithm	RMSE /mm	
	Bunny	Elephant
MMC	0.2251	0.0406
Scale-ICP	0.3665	0.0508

从图 9、图 10 和表 2 可以看出, MMC 算法能够精确配准大小不一致的 Bunny 点云和 Elephant 点云, Scale-ICP 算法能够配准 Bunny 点云, 但是精度

比 MMC 算法的配准精度低且对 Elephant 点云不能进行有效的配准。

4.5 实物数据配准

为验证本文算法在实际扫描数据中的有效性, 采用实物扫描的数据进行仿真验证。采用型号为 HandyScan 700 的扫描仪对两组实物进行数据采集。两组实物图如图 11 所示。

对 A 盒子的扫描数据进行随机旋转, 当数据随机丢失后进行配准; 对 B 盒子从不同角度采集数据, 取其中任意两组扫描数据进行配准。对于 A 盒子, 选取 4 个模型, 即模型数 $K_A = 4$; 对于 B 盒子,

选取 3 个模型,即模型数 $K_B=3$ 。A 盒子的扫描数据有 23953 个,由于篇幅有限,这里给出数据随机丢失 20%后的配准效果图。B 盒子的红色点云扫描数据有 15565 个,蓝色点云扫描数据有 15172 个。图 12 为两组扫描数据的初始状态。

采用本文所提 MMC 算法对 ICP、Scale-ICP 算法实现初始配准,在相同配准条件下,与 ICP、Scale-ICP、Go-ICP、GOGMA、CPD 算法进行比较。配准效果如图 13 和图 14 所示。

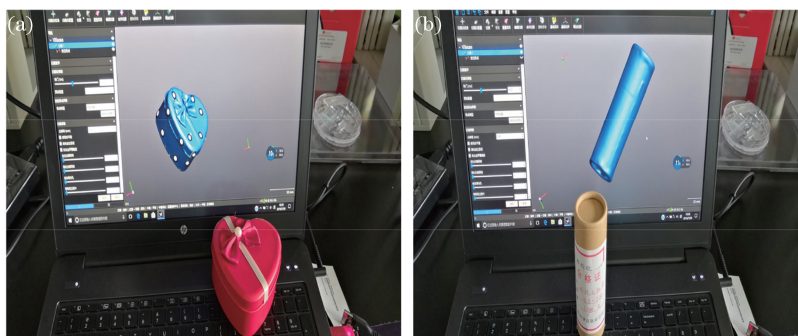


图 11 两组实物图。(a) A 盒子;(b) B 盒子

Fig. 11 Two sets of physical maps. (a) Box A; (b) box B

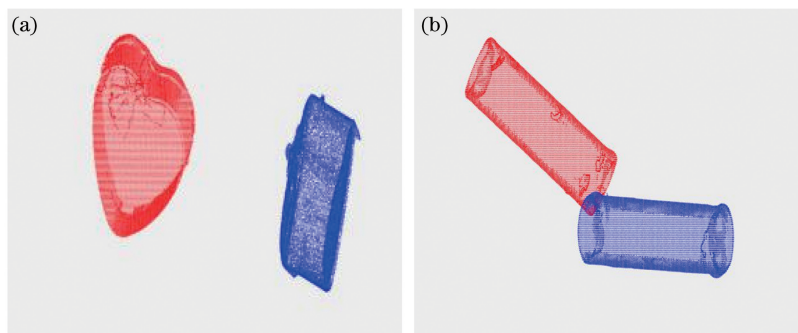


图 12 两组扫描数据的初始状态。(a) A 盒子;(b) B 盒子

Fig. 12 Initial states of two sets of scanning data. (a) Box A; (b) box B

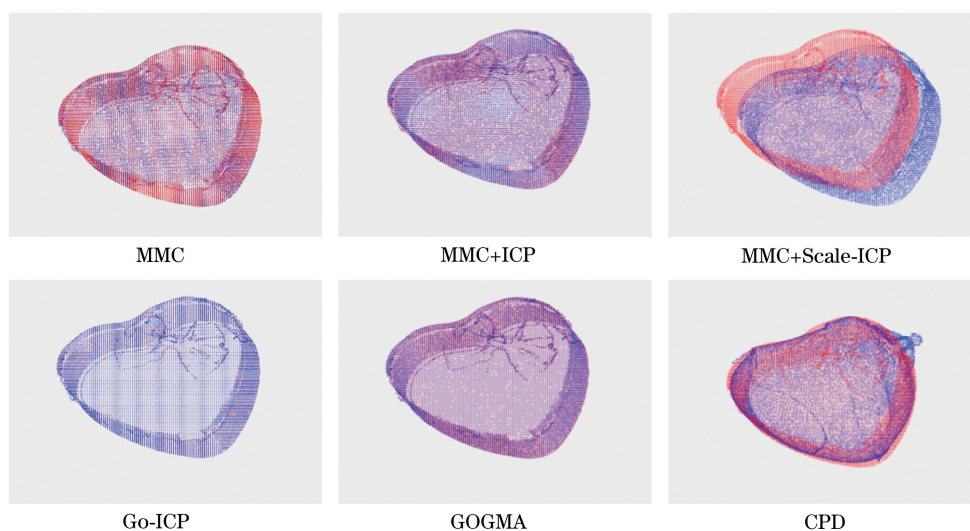


图 13 A 盒子点云的配准效果

Fig. 13 Registration results of box A point cloud

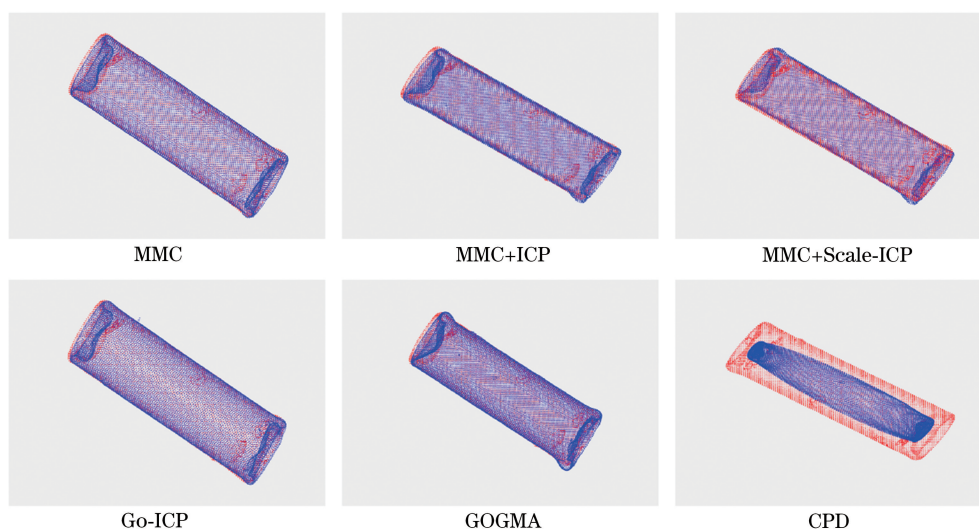


图 14 B 盒子点云的配准效果

Fig. 14 Registration results of box B point cloud

各算法的 RMSE 如表 3 所示。

表 3 6 种配准算法的 RMSE

Table 3 RMSE for six registration algorithms

Point cloud	RMSE /mm					
	MMC	MMC+ICP	MMC+Scale-ICP	Go-ICP	GOGMA	CPD
Box A	0.2573	0.2577	14.4654	2.0629×10^{-5}	0.2504	0.9703
Box B	0.5802	0.5886	0.6096	0.5817	0.5897	3.0836

从图 13、图 14 可以看出,在对两组点云数据进行配准的过程中,CPD 算法明显改变了两组待配准点云的形状,Scale-ICP 算法对 A 盒子点云的配准效果最差,Go-ICP 算法对 A 盒子点云的配准效果最好。对于 B 盒子点云,MMC、ICP、Go-ICP、GOGMA 算法的配准效果相当。从表 3 可以看出,MMC 算法与 ICP、Go-ICP、GOGMA 算法的配准精度相当,Scale-ICP、CPD 算法对两组点云数据的配准不稳定。

5 结 论

提出了一种基于混合多维柯西分布的点云配准算法,利用数据中心进行初始配准,在初配准的基础上利用协方差进行精确配准。MMC 算法在精确配准效果上与 ICP、GOGMA 算法是等效的,比 Scale-ICP、CPD 算法的稳健性好。MMC 算法没有利用点云的排布顺序,只需找出两点云的数据中心点构造特征四面体,便能解决点云无序性的配准问题。根据特征四面体的相似性,按照特征四面体的比例对待配准点云进行等比例放大,便可以完成点云的仿射配准。在数据丢失的情况下,MMC 算法选取

模型的个数越多,其配准精度越高。

参 考 文 献

- [1] Besl P J, McKay N D. A method for registration of 3-D shapes[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1992, 14(2): 239-256.
- [2] Ying S H, Peng J G, Du S Y, *et al.* A scale stretch method based on ICP for 3D data registration[J]. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 2009, 6(3): 559-565.
- [3] Sharp G C, Lee S W, Wehe D K. ICP registration using invariant features [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2002, 24 (1): 90-102.
- [4] Bae K H. Evaluation of the convergence region of an automated registration method for 3D laser scanner point clouds[J]. Sensors, 2009, 9(1): 355-375.
- [5] Zeng F X, Li L, Diao X P. Iterative closest point algorithm registration based on curvature features[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2017, 54(1): 011003.
曾繁轩, 李亮, 刁鑫鹏. 基于曲率特征的迭代最近点算法配准研究[J]. 激光与光电子学进展, 2017, 54

- (1): 011003.
- [6] Li Q S, Xiong R, Vidal-Calleja T. A GMM based uncertainty model for point clouds registration [J]. *Robotics and Autonomous Systems*, 2017, 91: 349-362.
- [7] Jian B, Vemuri B C. Robust point set registration using Gaussian mixture models [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2011, 33(8): 1633-1645.
- [8] Myronenko A, Song X B. Point set registration: coherent point drift [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2010, 32(12): 2262-2275.
- [9] Zhang Z, Xu H L, Yin H. A fast point cloud registration algorithm based on key point selection [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2017, 54(12): 121001.
张哲, 许宏丽, 尹辉. 一种基于关键点选择的快速点云配准算法 [J]. *激光与光电子学进展*, 2017, 54(12): 121001.
- [10] Prakhya S M, Liu B B, Lin W S, *et al.* B-SHOT: a binary 3D feature descriptor for fast keypoint matching on 3D point clouds [J]. *Autonomous Robots*, 2017, 41(7): 1501-1520.
- [11] Ge X M. Automatic markerless registration of point clouds with semantic-keypoint-based 4-points congruent sets [J]. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 2017, 130: 344-357.
- [12] Quan S W, Ma J, Hu F Y, *et al.* Local voxelized structure for 3D binary feature representation and robust registration of point clouds from low-cost sensors [J]. *Information Sciences*, 2018, 444: 153-171.
- [13] Bae K H, Lichti D D. A method for automated registration of unorganised point clouds [J]. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 2008, 63(1): 36-54.
- [14] Persad R A, Armenakis C. Automatic Co-registration of 3D multi-sensor point clouds [J]. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 2017, 130: 162-186.
- [15] Bueno M, González-Jorge H, Martínez-Sánchez J, *et al.* Automatic point cloud coarse registration using geometric keypoint descriptors for indoor scenes [J]. *Automation in Construction*, 2017, 81: 134-148.
- [16] Wang C, Shu Q, Yang Y X, *et al.* Quick registration algorithm of point clouds using structure feature [J]. *Acta Optica Sinica*, 2018, 38(9): 0911005.
王畅, 舒勤, 杨赟秀, 等. 利用结构特征的点云快速配准算法 [J]. *光学学报*, 2018, 38(9): 0911005.
- [17] Ji S J, Ren Y C, Ji Z, *et al.* An improved method for registration of point cloud [J]. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 2017, 140: 451-458.
- [18] Zhao M, Shu Q, Chen W, *et al.* 3D point cloud registration algorithm based on l^p spatial mechanics model [J]. *Acta Optica Sinica*, 2018, 38(10): 1010005.
赵敏, 舒勤, 陈蔚, 等. 基于 l^p 空间力学模型的三维点云配准算法 [J]. *光学学报*, 2018, 38(10): 1010005.
- [19] Yang J L, Li H D, Campbell D, *et al.* Go-ICP: a globally optimal solution to 3D ICP point-set registration [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2016, 38(11): 2241-2254.
- [20] Campbell D, Petersson L. GOGMA: globally-optimal Gaussian mixture alignment [C]. *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2016: 5685-5694.
- [21] Zeng A, Song S R, Nießner M, *et al.* 3D Match: learning local geometric descriptors from RGB-D reconstructions [C]. *2017 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2017: 199-208.