

# 基于锥镜和振幅调制的马蒂厄光束生成

任志君<sup>1,2\*</sup>, 胡海华<sup>1</sup>, 王彦强<sup>3</sup>, 李晓东<sup>1</sup>, 陈跃<sup>1</sup>

<sup>1</sup>浙江师范大学浙江省光信息检测与显示技术研究重点实验室, 浙江 金华 321004;

<sup>2</sup>浙江师范大学信息光学研究所, 浙江 金华 321004;

<sup>3</sup>中国科学院国家天文台南京天文光学技术研究所, 江苏 南京 210042

**摘要** 基于锥镜的相位调制作用和胶片的振幅调制功能, 提出了一种能精确高效产生无衍射马蒂厄光束的方案。利用稳相技术, 证明了该方案产生马蒂厄光束的理论机制。利用胶片输出仪制作了具有角向马蒂厄函数分布的振幅调制胶片, 在实验上精准地产生了一簇马蒂厄光束。理论和实验结果表明, 基于锥镜和振幅调制产生马蒂厄光束的方法简单、高效、灵活。

**关键词** 物理光学; 马蒂厄光束; 稳相技术; 振幅调制; 锥镜

中图分类号 O436

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201838.0926001

## Mathieu Beam Generation Based on Axicon and Amplitude Modulation

Ren Zhijun<sup>1,2\*</sup>, Hu Haihua<sup>1</sup>, Wang Yanqiang<sup>3</sup>, Li Xiaodong<sup>1</sup>, Chen Yue<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Key Laboratory of Optical Information Detecting and Display Technology in Zhejiang Province, Zhejiang Normal University, Jinhua, Zhejiang 321004, China;

<sup>2</sup>Institute of Information Optics, Zhejiang Normal University, Jinhua, Zhejiang 321004, China;

<sup>3</sup>Nanjing Institute of Astronomical Optics & Technology, National Astronomical Observatories, Chinese Academy of Sciences, Nanjing, Jiangsu 210042, China

**Abstract** Based on the phase modulation of axicons and the amplitude modulation of films, an exactly and high-efficiency generation scheme of non-diffractive Mathieu beams is proposed. With the stationary-phase technique, the theoretical mechanism of the generation of Mathieu beam by this scheme is verified. The amplitude modulation film with an angular Mathieu function is prepared by the usage of the film recorders, and a family of Mathieu beams is experimentally generated. The theoretical and experimental results show that the proposed method for generating Mathieu beams based on axicons and the amplitude modulation is simple, flexible and highly efficient.

**Key words** physical optics; Mathieu beam; stationary-phase technique; amplitude modulation; axicon

**OCIS codes** 260.1960; 070.7345; 070.3185; 170.4090

## 1 引 言

光与物质相互作用等科学实验需要形态稳定不变的光束, 但光束在传输过程中的衍射效应导致光束展宽并发生形变。无衍射结构光束是克服衍射效应、构建传输不变光束的重要手段之一。无衍射结构光束的数学表达式是波动方程的特解, 光束分布与传输距离无关。余弦函数是波动方程在直角坐标系下的一个特解, 对应的简谐波(平行光)就是一种无衍射光束。但平行光没有一个能量局域的主瓣,

在光与物质的相互作用中, 并无实际应用价值。Durnin 等<sup>[1]</sup>利用一个圆环通光屏及傅里叶变换透镜, 首次在实验上产生了零阶贝塞尔光束, 该光学系统后被称作 Durnin 装置。零阶贝塞尔光束的中心有一个大小约为波长量级的无衍射主瓣, 在实际中具有重要的应用价值。

Durnin 装置结构简单, 但其最大的缺陷是以圆环作为调制元件, 光能的利用率极低。为了提高光能利用率, 一些研究者引入了锥镜, 以产生贝塞尔光束<sup>[2-5]</sup>。锥镜发明于 1954 年, 平行光经过锥镜后会

收稿日期: 2018-02-08; 修回日期: 2018-03-23; 录用日期: 2018-04-09

基金项目: 国家自然科学基金(11674288)

\* E-mail: renzhijun@zjnu.cn

形成锥面波,故此得名<sup>[6]</sup>。理论上,利用锥镜时,入射的平行光能量全部能用于产生贝塞尔光束。至此,贝塞尔光束才真正被实用化,并在科学研究的诸多领域中发挥了重要作用<sup>[7-10]</sup>。

Gutiérrez-Vega 等<sup>[11]</sup>在椭圆坐标系下,理论证明了波动方程的又一个无衍射特解——马蒂厄函数。相比于贝塞尔光束,马蒂厄光束的形态更丰富,结构更复杂,但其产生也更困难。利用 Durnin 装置产生马蒂厄光束,需要具有角向为马蒂厄函数分布的光束入射到圆环。Gutiérrez-Vega 等<sup>[12]</sup>将一维高斯光束入射到圆环,利用 Durnin 装置,近似产生了零级马蒂厄光束。Dartora 等<sup>[13]</sup>研究了圆环狭缝宽度对产生零阶马蒂厄光束的影响。为提高能量利用率,Anguiano-Morales 等<sup>[14]</sup>利用锥镜合并扇形透光屏(扇形角为  $70^\circ$ ),高效地产生了零阶马蒂厄光束,但这种方法同样是近似产生方法。李东等<sup>[15]</sup>利用柱镜和锥镜,高效地产生了近似零阶马蒂厄光束。王硕琛等<sup>[16]</sup>利用两瓣月牙

形的圆弧透光胶片,近似产生了零阶马蒂厄光束。高阶马蒂厄光束比零阶马蒂厄光束更难产生。Diebel 等<sup>[17]</sup>利用两束同向传输贝塞尔光束相干叠加的办法,近似产生了传输特性类似高阶马蒂厄光束的光束,但该方法技术复杂,也仅能近似产生高阶马蒂厄光束。

马蒂厄函数可分解为一系列贝塞尔函数<sup>[18-19]</sup>,贝塞尔光束也可看作马蒂厄光束在圆柱坐标系下的特例<sup>[20]</sup>。本文利用虚源法,证明了锥镜合并振幅调制产生马蒂厄光束的理论机制。利用胶片输出仪制作了具有角向马蒂厄函数分布的振幅调制胶片。通过将胶片紧贴锥镜入瞳面,精确、高效地产生了一簇马蒂厄光束。

## 2 理 论

锥镜是柱对称光学元件,涉及锥镜的衍射问题在圆柱坐标系下研究较为方便。在圆柱坐标系下,光场的传输可写为菲涅耳衍射的形式<sup>[21-22]</sup>,即

$$U(\rho, \theta, z) = \frac{-ik}{2\pi z} \exp(ikz) \int_0^\infty \int_0^{2\pi} U_0(r, \varphi) \times \exp\left[i \frac{k}{2z}(r^2 + \rho^2)\right] \cdot \exp\left[i \frac{k}{z} \rho r \cos(\varphi - \theta)\right] r dr d\varphi, \quad (1)$$

式中  $U_0(r, \varphi)$  为初始光场(场源),  $r, \varphi$  分别为场源的径向距离和方位角,  $U(\rho, \theta, z)$  为轴向距离为  $z$  处的光场分布,  $\rho, \theta$  分别为观察面场的径向距离和方位角,  $k$  为波数。

等振幅分布的平行光垂直入射到锥镜产生贝塞尔光束,为利用锥镜产生马蒂厄光束,假定振幅为  $E_0$  的平行光经过振幅调制元件调制,再经锥镜调制相位后产生马蒂厄光束,其光场复振幅分布为

$$U_0(r, \varphi) = E_0 \cdot A(\varphi) T(r), \quad (2)$$

式中  $A(\varphi)$  为振幅调制元件的透过率函数,  $T(r)$  为锥镜变化函数,其表达式为

$$T(r) = \begin{cases} \exp[-ik(n-1)\theta_0 r], & r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases}, \quad (3)$$

式中  $n$  为锥镜的折射率,  $\theta_0$  为锥镜底角(锥镜入射平面和出射锥面间的夹角),  $R$  为锥镜的入瞳半径。

平行光入射到锥镜,即将  $A(\varphi) = 1$  代入(1)式后,得到贝塞尔光束,详细推导过程见参考文献[2-4]。相比于贝塞尔光束,椭圆坐标系下马蒂厄光束的形态更丰富、更复杂。根据奇、偶模及光束相对于  $\varphi = 0$  或  $\varphi = \pi/2$  的对称性,马蒂厄光束可分为四大类<sup>[18-19, 23]</sup>: 第一、二类偶型马蒂厄光束,可写为  $ce_{2m}(\eta, q)Je_{2m}(\xi, q)$  和  $ce_{2m+1}(\eta, q)Je_{2m+1}(\xi, q)$ , 其

中  $ce(\cdot)$  和  $Je(\cdot)$  分别为偶型角向、径向马蒂厄函数,  $(\xi, \eta)$  为椭圆坐标, 阶次  $m = 0, 1, 2, \dots, q$  为无量纲椭圆参量; 第一、二类奇型马蒂厄光束, 可写为  $se_{2m+2}(\eta, q)Jo_{2m+2}(\xi, q)$  和  $se_{2m+1}(\eta, q)Jo_{2m+1}(\xi, q)$ , 其中  $se(\cdot)$  和  $Jo(\cdot)$  分别为奇型角向、径向马蒂厄函数, 阶次  $m = 1, 2, 3, \dots, m$  和  $q$  共同决定了马蒂厄光束的分布。

为构建马蒂厄光束, 假定振幅调制元件的振幅透过率函数为角向马蒂厄函数。以第一类角向偶型马蒂厄函数为例, 设  $A(\varphi) = ce_{2m}(\varphi; q)$ , 其中  $q = h^2 k_r^2 / 4$ ,  $k_r = \sqrt{k^2 - k_z^2}$  为径向波数,  $k_z$  为轴向波数,  $h$  为椭圆参数。在利用锥镜产生马蒂厄光束的方案中, 径向波数取决于锥镜, 由(3)式可知  $k_r = k(n-1)\theta_0$ 。由  $q = h^2 k_r^2 / 4$  可知, 参量  $k_r$  和  $h$  共同决定了  $q$ 。给定  $k_r$  时,  $h$  的大小决定了  $q$ ; 给定  $h$  时,  $k_r$  的大小决定了  $q$ 。光束传输过程中, 若  $h$  确定而  $k_r$  发生变化,  $q$  会改变, 表明马蒂厄光束的振幅分布发生变化, 此时具有马蒂厄函数分布的光束不能称作无衍射光束。

第一类偶阶角向马蒂厄函数的傅里叶展开形式<sup>[19, 24]</sup>为

$$ce_{2m}(\varphi; q) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j}(q) \cos(2j\varphi), \quad (4)$$

式中  $j$  为阶次,  $A_{2j}(\cdot)$  为  $q$  的函数。

将(3)、(4)式代入(2)式,再将所得的表达式代入(1)式,在进一步的推导<sup>[23]</sup>中,使用

$$J_{e_{2m}}(\xi, q) ce_{2m}(\eta, q) = \frac{1}{C_{2m}} \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j}(q) \times \int_0^{2\pi} \cos(2j\varphi) \cdot \exp[ik_r r \cos(\varphi - \theta)] d\varphi, \quad (5)$$

式中  $C_{2m} = 2\pi A_0 / ce_{2m}(0; q) ce_{2m}(\pi/2; q)$  为比例常数,不影响光束分布。椭圆坐标  $(\xi, \eta)$  与极坐标  $(r, \varphi)$  的转换关系为  $r \cos \theta = h \cosh \xi \cos \eta, r \sin \theta = h \sinh \xi \sin \eta$ 。利用(5)式的关系,(1)式可改写为

$$U(\rho, z) = \frac{ikC_{2m}E_0}{2\pi z} \exp(ikz) \exp\left(i \frac{k\rho^2}{2z}\right) \times \int_0^R J_{e_{2m}}(\xi, q_z) ce_{2m}(\eta, q_z) \exp\left\{ik \left[\frac{r^2}{2z} - \theta_0(n-1)r\right]\right\} r dr, \quad (6)$$

式中  $q_z = \frac{h^2}{4}(k^2 - k_z^2) = \frac{h^2 k^2 R^2}{4z^2}$ 。设  $f(r) = \frac{r^2}{2z} - \theta_0(n-1)r, g(r) = J_{e_{2m}}(\xi, q_z) ce_{2m}(\eta, q_z) r$ 。当  $k \rightarrow \infty$  时,稳相法能用来求解形如  $\int g(r) \exp[ikf(r)]$  的积分表达式<sup>[24-25]</sup>。根据  $f'(r)|_{r=r_0} = 0$  求得稳相点为  $r_0 = (n-1)\theta_0 z$ 。

当  $r = r_0 \in [0, R]$ , 即把锥镜出瞳面作为起点时,在传输距离  $0 < z < z_{\max}$  范围内,(6)式变为

$$U(\rho, z) \approx \sqrt{\lambda z} C_{2m} E_0 k (n-1)\theta_0 J_{e_{2m}}(\xi; q) ce_{2m}(\eta; q) \cdot \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z}\right) \exp\left\{-i \left[\frac{k(n-1)^2\theta_0^2 z}{2}\right] + \frac{\pi}{4}\right\} - \frac{RC_{2m,z} E_0 J_{e_{2m}}(\xi; q_z) ce_{2m}(\eta; q_z) \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z}\right) \exp\left\{-i \left[\frac{R^2}{2z} - (n-1)\theta_0 R\right]\right\}}{R - (n-1)z\theta_0}, \quad (7)$$

式中  $\lambda$  为波长,  $z_{\max} = R / [(n-1)\theta_0], q = \frac{h^2 k^2 (n-1)^2 \theta_0^2}{4}, C_{2m,z} = \frac{2\pi A_0}{ce_{2m}(0; q_z) ce_{2m}(\pi/2; q_z)}$ 。在(7)式第一项表示的马蒂厄函数中,阶次  $q = \frac{h^2 k^2 (n-1)^2 \theta_0^2}{4}$  为常数,与传输距离  $z$  无关,这正是无衍射光束所描述的情况。在(7)式第二项表示的马蒂厄函数中,阶次  $q_z = \frac{h^2 k^2 R^2}{4z^2}$  为变量,与传输距离  $z$  有关,因此第二项不能看作无衍射马蒂厄分布。

锥镜后的光强分布  $I(\rho, z)$  可写为

$$I(\rho, z) = 4\pi^2 \lambda^{-1} z (n-1)2\theta_0^2 E_0^2 |C_{2m}|^2 |J_{e_{2m}}(\xi; q) ce_{2m}(\eta; q)|^2 - 4\pi \sqrt{\lambda^{-1} z} R (n-1)\theta_0 E_0^2 |C_{2m} C_{2m,z}| \cdot \frac{J_{e_{2m}}(\xi; q) ce_{2m}(\eta; q) \cdot J_{e_{2m}}(\xi; q_z) ce_{2m}(\eta; q_z)}{R - (n-1)z\theta_0} \cdot \cos\left\{\frac{k}{2z} [R - (n-1)z\theta_0]^2 + \frac{\pi}{4}\right\} + R^2 E_0^2 |C_{2m,z}|^2 \left[\frac{J_{e_{2m}}(\xi; q_z) ce_{2m}(\eta; q_z)}{R - (n-1)z\theta_0}\right]^2, \quad (8)$$

式中第一项为无衍射马蒂厄光束的表达式,但第二、三项中马蒂厄函数表达式的阶次  $q_z$  随着传输距离  $z$  的改变而改变,因此第二、三项不能看作无衍射项。故(8)式所代表的光束并不能看作无衍射光束,除非其第二、三项相对于第一项可以忽略。(8)式是(7)式平方所得,若在给定的条件下,(7)式第一项的系数远大于第二项的,则(8)式的第二、三项能被忽略。由所用锥镜的具体参数 ( $R = 1.27 \text{ cm}, n = 1.457, \theta = 1^\circ$ ) 计算(7)式各项系数。在  $0 < z < z_{\max}$  的范围内,为使(8)式中第二、三项能被忽略,假定(7)式第一项的系数始终比第二项的系数大 10 倍。计算发现,当  $z > 0.02146 \text{ mm}$  时,该假定条件成立。

故当  $0.02146 \text{ mm} < z < z_{\max}$  时,(8)式能被看作无衍射光束。

当  $r = r_0 = R$  时,有  $z = z_{\max}$ , 可得

$$U(\rho, z) \approx \frac{\sqrt{\lambda z}}{2} C_{2m} E_0 J_{e_{2m}}(\xi; q) ce_{2m}(\eta; q) k_r \times \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z}\right) \cdot \exp\left\{-i \left[\frac{k(n-1)^2\theta_0^2 z}{2}\right] + \frac{\pi}{4}\right\}, \quad (9)$$

$$I(\rho, z) = \frac{\pi^2 z (n-1)^2 \theta_0^2}{\lambda} |C_{2m} E_0|^2 \times |J_{e_{2m}}(\xi; q) ce_{2m}(\eta; q)|^2. \quad (10)$$

综上所述,理论结果证明,在锥镜后  $0.02146 \text{ mm} < z \leq z_{\max}$  的传输范围内,利用锥镜合并振幅调制法可

产生无衍射马蒂厄光束。事实上,最大无衍射传输距离  $z_{\max} = R / [(n - 1)\theta_0]$  恰好是锥镜焦深表达式<sup>[14]</sup>。由锥镜参数计算可得  $z_{\max} = 1.5922 \text{ m}$ 。

### 3 实 验

为验证提出的方案,构建了图 1 所示的实验系统。在该实验系统中,He-Ne 激光器经扩束准直,平行光入射到振幅调制元件,出射的光束经锥镜调制相位后,用科学电荷耦合器件(CCD)记录光强分布。实验中锥镜的底角为  $1^\circ$ 。

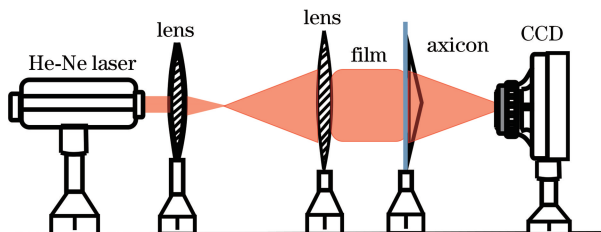


图 1 产生马蒂厄光束的实验系统

Fig. 1 Experimental system for generating Mathieu beams

由(4)式计算角向马蒂厄函数的振幅分布,在计算过程中,傅里叶变换系数由文献[23-24]给出。分别计算了阶次  $m = 0, 2$ , 椭圆参量  $q = 0, 10$  的四种第一类偶阶马蒂厄光束的角向马蒂厄函数的振幅分布,如图 2 所示。

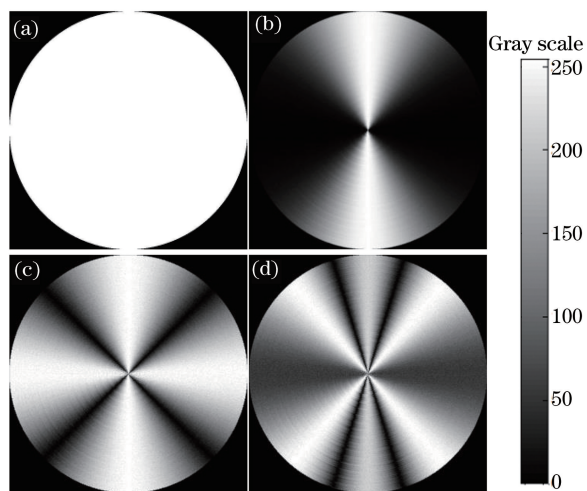


图 2 第一类角向马蒂厄函数振幅分布。(a)  $m = 0, q = 0$ ;  
(b)  $m = 0, q = 10$ ; (c)  $m = 2, q = 0$ ; (d)  $m = 2, q = 10$

Fig. 2 Amplitude distributions of angular Mathieu functions of the first kind. (a)  $m = 0, q = 0$ ;  
(b)  $m = 0, q = 10$ ;

(c)  $m = 2, q = 0$ ; (d)  $m = 2, q = 10$

利用美国宝丽来公司生产的 Propalette 8000 型胶片输出仪加工振幅调制胶片。1)将图 2 所示的灰度图颜色黑白反转,如图 3 所示;2)用胶片输出仪将反转后的振幅图输出在高分辨率感光胶片上(此过

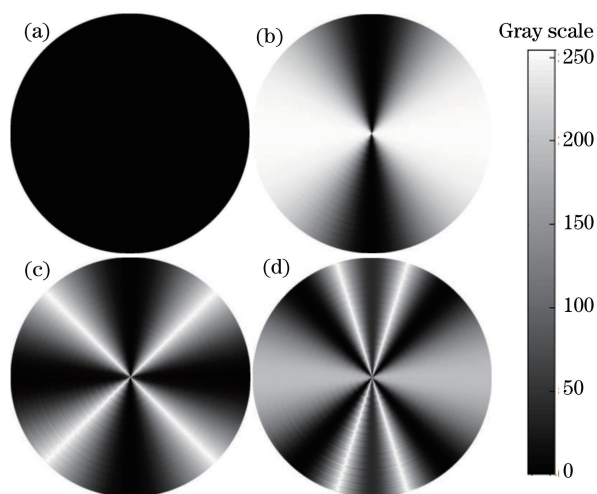


图 3 振幅分布的反转振幅图。(a)  $m = 0, q = 0$ ;  
(b)  $m = 0, q = 10$ ; (c)  $m = 2, q = 0$ ; (d)  $m = 2, q = 10$

Fig. 3 Reversal amplitude distributions. (a)  $m = 0, q = 0$ ;  
(b)  $m = 0, q = 10$ ; (c)  $m = 2, q = 0$ ; (d)  $m = 2, q = 10$

程实际上是将振幅图曝光在高分辨率感光胶片上);3)利用照相底片冲洗工艺处理曝光后的胶片,可获得胶片式振幅调制元件即振幅调制胶片。最后,将振幅调制胶片紧贴锥镜入射面固定,振幅调制胶片的中心与锥镜轴心尽可能精确对准。当平行光经振幅调制胶片和锥镜调制后,所得到的光束被科学 CCD 记录,如图 4 所示。图 4(a)所示的光束分布正是贝塞尔光束,即  $m = 0, q = 0$  的马蒂厄光束正是贝塞尔光束,说明贝塞尔光束只是马蒂厄光束的一个特例。为验证产生的马蒂厄光束是否理想,基于(10)式,给出了相应参数马蒂厄光束的模拟图,如图 5 所示。对比图 4 和图 5 发现,实验结果和理论

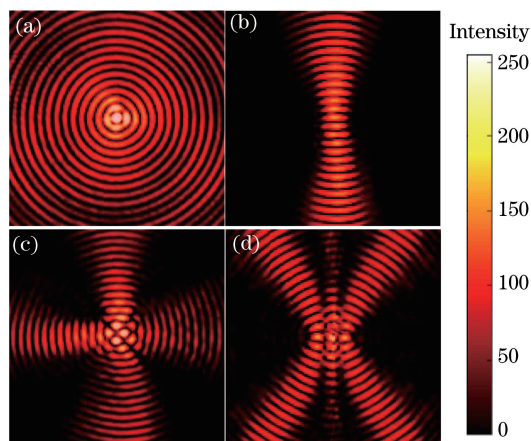


图 4 马蒂厄光束的实验记录图。(a)  $m = 0, q = 0$ ;  
(b)  $m = 0, q = 10$ ; (c)  $m = 2, q = 0$ ; (d)  $m = 2, q = 10$

Fig. 4 Experimental recording graphs of Mathieu beams.

(a)  $m = 0, q = 0$ ; (b)  $m = 0, q = 10$ ;  
(c)  $m = 2, q = 0$ ;  
(d)  $m = 2, q = 10$



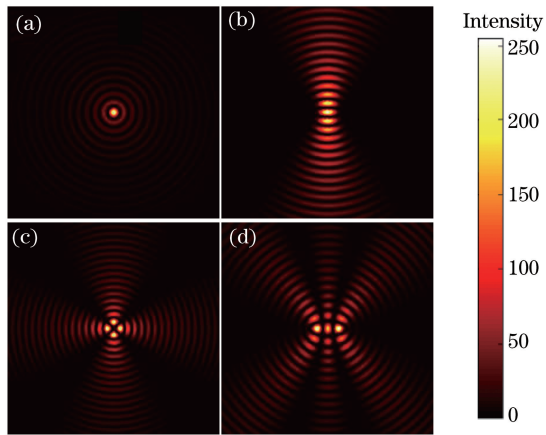


图5 马蒂厄光束的理论模拟图。(a)  $m=0, q=0$ ;  
(b)  $m=0, q=10$ ; (c)  $m=2, q=0$ ; (d)  $m=2, q=10$   
Fig. 5 Theoretical simulation graphs of Mathieu beams.  
(a)  $m=0, q=0$ ; (b)  $m=0, q=10$ ; (c)  $m=2, q=0$ ;  
(d)  $m=2, q=10$

结果吻合得很好,说明了振幅调制合并锥镜方案产生马蒂厄光束的有效性。此外,相比于 Durnin 利用圆环产生马蒂厄光束的方案<sup>[13,16]</sup>,锥镜合并振幅调制方案对光能的利用率更高。该方法通过加工任意类型、任意阶次、任意椭圆参数的角向马蒂厄函数胶片,即可精确产生相应的马蒂厄光束。

为验证产生的马蒂厄光束在锥镜后 $0.02146 \text{ mm} < z < 1.5922 \text{ m}$ 范围内的传输特性,以  $m=0, q=10$  的马蒂厄光束为例,用 CCD 记录了锥镜后不同位置处的光束分布,如图 6 所示。实验结果与理论预期一致,表明了胶片合并锥镜法产生的马蒂厄光束,在

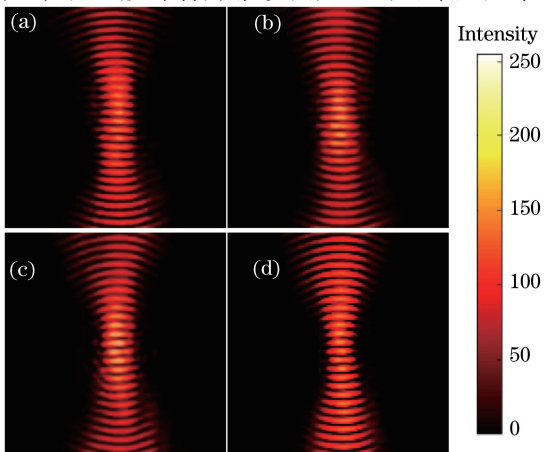


图6 锥镜后不同位置马蒂厄光束( $m=0, q=10$ )的实验记录图。(a)  $z=0.4z_{\max}$ ; (b)  $z=0.6z_{\max}$ ;  
(c)  $z=0.8z_{\max}$ ; (d)  $z=z_{\max}$

Fig. 6 Experimental recording graphs of Mathieu beams at different positions after axicon. (a)  $z=0.4z_{\max}$ ,  
(b)  $z=0.6z_{\max}$ , (c)  $z=0.8z_{\max}$ , (d)  $z=z_{\max}$

锥镜后  $0.02146 \text{ mm} < z < 1.5922 \text{ m}$  的范围内具有无衍射的传输特性。

## 4 结 论

给出了锥镜合并振幅调制产生马蒂厄光束的理论方案。利用稳相法,理论证明了新方案产生马蒂厄方案的可行性。基于胶片输出仪制作了胶片式振幅调制元件,将振幅调制胶片贴于锥镜入瞳面,平行光经胶片调制振幅和锥镜调制相位后,即可产生马蒂厄光束。相比于传统方法,提出的方案可以精确、高效、方便地产生任意类型、任意阶次、任意椭圆参数的马蒂厄光束。研究结果为马蒂厄光束的实际科学研究奠定了基础。

## 参 考 文 献

- [1] Durnin J, Miceli J J, Eberly J H. Diffraction-free beams[J]. Physical Review Letters, 1987, 58(15): 1499-1501.
- [2] Scott G, Mcardle N. Efficient generation of nearly diffraction-free beams using an axicon[J]. Optical Engineering, 1992, 31(12): 2640-2643.
- [3] Friberg A T. Stationary-phase analysis of generalized axicons[J]. Journal of the Optical Society of America A, 1996, 13(4): 743-750.
- [4] Dudutis J, GeCys P, RaČiukaitis G. Non-ideal axicon-generated Bessel beam application for intravolume glass modification[J]. Optics Express, 2016, 24(25): 28433-28443.
- [5] Hu R, Wu F T, Zhu Q Z, *et al.* Influence of off-axis astigmatism on high order Bessel beam[J]. Acta Optica Sinica, 2017, 37(8): 0826002.  
胡润, 吴逢铁, 朱清智, 等. 离轴像散对高阶贝塞尔光束的影响[J]. 光学学报, 2017, 37(8): 0826002.
- [6] McLeod J H. The axicon: A new type of optical element[J]. Journal of the Optical Society of America, 1954, 44(8): 592-597.
- [7] Hafizi B, Esarey E, Sprangle P. Laser-driven acceleration with Bessel beams[J]. Physical Review E, 1997, 55(3): 3539-3545.
- [8] Yan Z, Jureller J E, Sweet J, *et al.* Three-dimensional optical trapping and manipulation of single silver nanowires [J]. Nano Letters, 2012, 12(10): 5155-5161.
- [9] Wulle T, Herminghaus S. Nonlinear optics of Bessel beams[J]. Physical Review Letters, 1993, 70(10): 1401-1404.
- [10] Lorensen D, Singe C C, Curatolo A, *et al.* Energy-efficient low-Fresnel-number Bessel beams and their application in optical coherence tomography[J].

- Optics Letters, 2014, 39(3): 548-551.
- [11] Gutiérrez-Vega J C, Iturbe-Castillo M D, Chávez-Cerda S. Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams [J]. Optics Letters, 2000, 25(20): 1493-1495.
- [12] Gutiérrez-Vega J C, Iturbe-Castillo M D, Ramirez G A, *et al.* Experimental demonstration of optical Mathieu beams [J]. Optics Communications, 2001, 195: 35-40.
- [13] Dartora C A, Zamboni-Racheda M, Nobrega K Z, *et al.* General formulation for the analysis of scalar diffraction-free beams using angular modulation: Mathieu and Bessel beams [J]. Optics Communications, 2003, 222(1): 75-80.
- [14] Anguiano-Morales M, Martinez A, Iturbe-Castillo M D, *et al.* Different field distributions obtained with an axicon and an amplitude mask [J]. Optics Communications, 2008, 281(3): 401-407.
- [15] Li D, Wu F T, Xie X X. A novel method of generating quasi-non-diffracting Mahtieu beam based on axicon [J]. Acta Physica Sinica, 2014, 63(15): 152401.  
李冬, 吴逢铁, 谢晓霞. 基于轴棱锥产生近似无衍射 Mathieu 光束的新方法 [J]. 物理学报, 2014, 63(15): 152401.
- [16] Wang S S, Wu F T, Feng C. An optical system generating Mathieu beams [J]. Acta Optica Sinica, 2017, 37(2): 0205002.  
王硕琛, 吴逢铁, 冯聪. 一种产生 Mathieu 光束的光学系统 [J]. 光学学报, 2017, 37(2): 0205002.
- [17] Diebel F, Boguslawski M, Dadalyan T, *et al.* Controlled soliton formation in tailored Bessel photonic lattices [J]. Optics Express, 2016, 24(12): 12933-12940.
- [18] Chafiq A, Hricha Z, Belafha A. Paraxial propagation of Mathieu beams through an apertured ABCD optical system [J]. Optics Communications, 2005, 253(4): 223-230.
- [19] Li D, Ren Z J, Deng S Y. Virtual source for a Mathieu-Gauss beam [J]. Journal of Optics, 2017, 19(5): 055608.
- [20] Hernández-Hernández R J, Terborg R A, Ricardez-Vargas I, *et al.* Experimental generation of Mathieu-Gauss beams with a phase-only spatial light modulator [J]. Applied Optics, 2010, 49(36): 6903-6909.
- [21] Kotlyar V V, Khonina S N, Soifer V A. Algorithm for the generation of non-diffracting Bessel modes [J]. Journal of Modern Optics, 1995, 42(6): 1231-1239.
- [22] Paterson C, Smith R. Higher-order Bessel waves produced by axicon-type computer-generated holograms [J]. Optics Communications, 1996, 124(1/2): 121-130.
- [23] Gutiérrez-Vega J C, Bandres M A. Normalization of the Mathieu-Gauss optical beams [J]. Journal of the Optical Society of America A, 2007, 24(1): 215-220.
- [24] McLachlan N W. Theory and applications of Mathieu function [M]. London: Oxford University, 1951.
- [25] Stamnes J J. Waves in focal regions: Propagation, diffraction and focusing of light, sound and water waves [M]. New York: Taylor & Francis Group, 1986.