

# 四阶非线性薛定谔方程中呼吸子解的特性研究

杜志峰\*\*, 宋丽军\*, 王艳

山西大学物理电子工程学院, 山西 太原 030006

**摘要** 基于同时包含四阶色散项和四阶非线性项的非线性薛定谔层级结构的四阶可积方程(LPD 方程), 首先利用达布变换法得到 LPD 方程的单呼吸子解, 并对呼吸子的动力学特性进行研究, 得到呼吸子与 W 型孤子、抖动的 W 型孤子和周期波的转换关系; 其次, 借助达布变换的递推关系得到 LPD 方程的双呼吸子解, 并利用呼吸子与孤子之间的转换关系, 研究呼吸子与孤子以及呼吸子与周期波的碰撞特性; 最后, 对双呼吸子的碰撞特性进行更为详细的研究, 得到双呼吸子的交叉碰撞、平行叠加及双呼吸子的简并态等动力学特性。

**关键词** 非线性光学; 孤子; 达布变换; 呼吸子; 简并

中图分类号 O437

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201838.0919001

## Characteristics of Breather Solutions in the Fourth-Order Nonlinear Schrödinger Equation

Du Zhifeng\*\*, Song Lijun\*, Wang Yan

College of Physics & Electronics Engineering, Shanxi University, Taiyuan, Shanxi 030006, China

**Abstract** This study is carried out on the basis on the fourth-order integrable equation (LPD equation) of the Schrödinger hierarchy, which contains both fourth-order dispersion terms and fourth-order nonlinear terms. Firstly, using the Darboux transformation method, we drive a one-breather solution of LPD equation, and the dynamic characteristics of the breather are researched. The conversion relations from breather to W-shaped soliton, oscillation W-shaped soliton and periodic wave are obtained. Secondly, with the aid of the recurrence of the Darboux transformation, the two-breather solutions of the LPD equation are obtained, and the collision characteristics between the breather and the soliton, the breather and the periodic wave are studied by using the transition from the breather to the soliton. Finally, the collision characteristics of two-breather are studied in more details, and the conclusion that the dynamic characteristics of two-breather such as cross-collision, parallel superposition and degenerate state of two-breather are obtained.

**Key words** nonlinear optics; soliton; Darboux transformation; breather; degenerate

**OCIS codes** 060.2310; 060.2330; 060.2630; 060.4370

## 1 引 言

在现代科学与技术的发展过程中, 系统的非线性特性被认为是理解很多自然现象的基础, 一直以来都备受关注, 且在流体力学、化学、生物和非线性光学等各个领域都可以观察到, 其重要性不容置疑。一般情况下, 非线性现象可以用包含复杂的线性和非线性效应的非线性演化方程来建模, 标准的非线性薛定谔方程(NLSE)就是描述非线性现象的核心模型之一<sup>[1-2]</sup>。NLSE 的出现使得对非线性光学<sup>[3-4]</sup>、水波<sup>[5-6]</sup>、Bose-Einstein 凝聚<sup>[7]</sup>以及其他非线

性物理学领域的分析取得了巨大的进步。

随着研究的不断进步, 标准的 NLSE 已经不足以解释复杂的非线性现象, 扩展的 NLSE 应运而生, 这些扩展使得可积的 NLSE 方程的适用性得以提升, 并为实际系统中脉冲演化的动力学特性提供了更为有效的理论模型。在光纤光学领域, 当脉冲宽度小于 10 fs 时, NLSE 方程必须考虑四阶色散(FOD)<sup>[8]</sup>的影响; 当光场的频率接近光纤材料的谐振频率时, 高阶非线性效应变得不能忽略<sup>[9-10]</sup>; 用于描述峰值功率很高且脉宽很窄的脉冲动力学特性时, NLSE 方程就应当考虑自陡峭(SS)

收稿日期: 2018-03-26; 修回日期: 2018-04-16; 录用日期: 2018-05-02

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金(11705108)

\* E-mail: songlij@sxu.edu.cn; \*\* E-mail: 593705149@qq.com

以及自频移 (SFS) 效应<sup>[10-11]</sup>。Lakshmanan-Porsezian-Daniel (LPD) 方程是由 Lakshmanan 等<sup>[12]</sup>扩展得到的四阶非线性薛定谔方程<sup>[13-14]</sup>, 它是 NLSE 方程层级结构中只包含偶数阶且最高阶次只取至四阶的扩展 NLSE, 且其各高阶项的重要性已经在光纤<sup>[15-16]</sup>、海森堡自旋链<sup>[17]</sup>和海洋波<sup>[18-19]</sup>中被讨论。

呼吸子解是许多非线性演化方程的解, 有关呼吸子特性及其相互作用的研究成果将对理解非线性波的动力学特性有一定的指导意义<sup>[20-21]</sup>。另外, 当呼吸子的周期趋于无穷大时, 呼吸子解将变成有理分式怪波解<sup>[22-23]</sup>, 因此, 有关呼吸子的结果也将为怪波的研究提供理论参考。1991 年, 呼吸子解首次被 Kichenassamy 求得<sup>[24]</sup>。随后几十年的研究中, 呼吸子解不仅先后在线性薛定谔方程<sup>[25]</sup>、KdV 方程<sup>[26-27]</sup>、离散非线性方程<sup>[28-30]</sup>和耦合非线性 Hirota 方程<sup>[31]</sup>中获得, 而且在二维 Fermi-Pasta-Ulam 晶格<sup>[32]</sup>、向列相液晶盒<sup>[33]</sup>和掺杂光纤系统<sup>[34]</sup>中也被报道。最近, Chowdury 小组基于非线性薛定谔方程的层级结构<sup>[35]</sup>, 对包含不同阶算子的非线性薛定谔方程的呼吸子解和孤子解进行了研究, 并得到了孤子解的相速度与群速度对孤子传输的影响。

综上所述, 本文将基于可积的高阶非线性薛定谔方程 (LPD 方程), 利用达布变换法推导其一阶和二阶呼吸子的精确表达形式, 并详细讨论它们的传输特性。

## 2 LPD 方程及其一阶呼吸子解

随着对长距离、大容量光通信的迫切需求, 更强更短的脉冲在光纤中的传输演化情况受到越来越多的关注。当光纤中传输的是功率极高脉宽极短的脉冲时, 推导标准非线性薛定谔方程所用的近似条件

将不再满足, 各高阶效应变得重要起来, 但并非所有非线性薛定谔方程的扩展形式都是可积的。为了获得可积的高阶方程, 前辈们根据实验条件尝试调整高阶效应的系数, 终于得到了几种可积方程, 它们是 Hirota 方程<sup>[36]</sup>、Sasa-Satsuma 方程<sup>[37]</sup>和 Lakshmanan-Porsezian-Daniel (LPD) 方程<sup>[13]</sup>, 其中 LPD 方程的形式为<sup>[13]</sup>

$$i\phi_x + \alpha_2 S_2[\phi(x, t)] + \alpha_4 S_4[\phi(x, t)] = 0, \quad (1)$$

式中:  $\alpha_2$  为二阶线性及非线性的强度,  $\alpha_4$  为四阶线性和非线性的强度,  $\alpha_2$  和  $\alpha_4$  均为实数, 一般取  $\alpha_2 = 1/2$ ;  $x$  为传输变量,  $t$  为横向变量,  $|\phi(x, t)|$  为脉冲包络;  $S_2[\phi(x, t)]$  为二阶算子<sup>[13]</sup>, 包括二阶色散和非线性 Kerr 效应, 即

$$S_2[\phi(x, t)] = \phi_{tt} + 2\phi |\phi|^2; \quad (2)$$

$S_4[\phi(x, t)]$  为 LPD 算子<sup>[32-34]</sup>, 包括四阶色散和五次非线性效应等,

$$S_4[\phi(x, t)] = \phi_{ttt} + 8 |\phi|^2 \phi_{tt} + 6\phi |\phi|^4 + 4\phi |\phi_t|^2 + 6\phi_t^2 \phi^* + 2\phi^2 \phi_{tt}^*. \quad (3)$$

利用达布变换法, LPD 方程的呼吸子解的递推表达式可以写为<sup>[34]</sup>

$$\psi_n = \psi_{n-1} + \frac{2(\lambda_n^* - \lambda_n) s_{n1} r_{n1}^*}{|r_{n1}|^2 + |s_{n1}|^2}, \quad (4)$$

式中,  $n$  代表呼吸子解的阶数,  $\lambda$  为复特征值,  $r$  和  $s$  为线性变换。当  $n=1$  时, (1) 式的一阶呼吸子可以写成

$$\psi_1 = \psi_0 + \frac{2(\lambda_1^* - \lambda_1) s_{11} r_{11}^*}{|r_{11}|^2 + |s_{11}|^2}, \quad (5)$$

式中  $\psi_0 = e^{ix}$  为种子解, 其他参数在论文<sup>[38]</sup>中已经给出, 经整理后一阶呼吸子可以改写为

$$\psi_1 = \left[ 1 + 2b_1 \frac{G_1 + iH_1}{D_1} \right] e^{ix}, \quad (6)$$

式中  $G_1, H_1, D_1$  是三角函数和双曲函数的组合:

$$G_1 = \cos(xV_T + tk_r) \cosh(2\chi_i) - \cosh(xV_H + tk_i) \sin(2\chi_r), H_1 = \cos(2\chi_r) \sinh(xV_H + tk_i) - \sin(xV_T + tk_r) \sinh(2\chi_i), D_1 = \cosh(xV_H + tk_i) \cosh(2\chi_i) - \cos(xV_T + tk_r) \sin(2\chi_r), \kappa = 2\sqrt{c^2 + (\lambda_1 + a/2)^2} = \kappa_r + i\kappa_i, \chi = \frac{1}{2} \arccos(\kappa/2) = \chi_r + i\chi_i, \quad (7)$$

$$V_T = \alpha_2 (\Omega_2 \kappa_i + \Omega_2 \kappa_r) + \alpha_4 (\Omega_4 \kappa_i + \Omega_4 \kappa_r), V_H = \alpha_2 (\Omega_2 \kappa_i - \Omega_2 \kappa_r) + \alpha_4 (\Omega_4 \kappa_i - \Omega_4 \kappa_r), \lambda_1 = a_1 + ib_1, \Omega_2 = 2a_1, \Omega_2 = -2b_1, \Omega_4 = -4b_1(1 - 6a_1^2 + 2b_1^2), \Omega_4 = 4a_1(1 - 2a_1^2 + 6b_1^2). \quad (8)$$

上述等式中  $a_1, b_1, a, c$  均为任意的实数。图 1 给出了当  $a_1, b_1, a, c$  取不同数值时, 一阶呼吸子分

别表现为 Akhmediev 呼吸子 (AB) 和 Kuznetsov-Ma (KM) 孤子的情况。

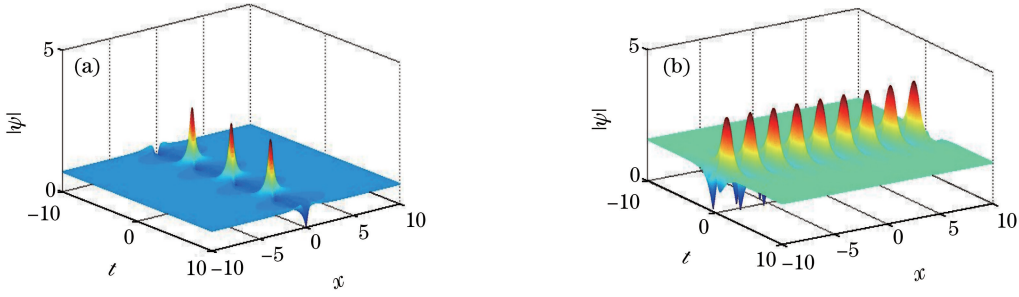


图 1 参数  $b_1$  对呼吸子特性的影响。(a)  $b_1=0.8$  时的 AB 呼吸子;(b)  $b_1=1.25$  时的 KM 孤子。

其他参数分别为  $a=0, c=1, a_1=0, \alpha_4=1/32$

Fig. 1 Effect of parameter  $b_1$  on breather characteristics. (a) Akhmediev breather with  $b_1=0.8$ ;  
(b) Kuznetsov-Ma soliton with  $b_1=1.25$ . The other parameters are  $a=0, c=1, a_1=0, \alpha_4=1/32$

从图 1 中可以看出:当其他参数取值相同,  $a_1=0, b_1 \neq 0$  时,  $\lambda_1$  为纯虚数, 且  $b_1 < 1$  时,  $\kappa$  为实数, 一阶呼吸子表现为纵向局域横向周期呼吸的 Akhmediev 呼吸子, 如图 1(a) 所示; 而当  $b_1 > 1$  时,  $\kappa$  为虚数, 一阶呼吸子表现为横向局域纵向周期性呼吸的 Kuznetsov-Ma 孤子, 如图 1(b) 所示。特别地, 当  $\alpha_4=0$  时, 方程(1)退化成为标准非线性薛定谔方程。

根据文献[35]的结果可知,  $V_T$  与  $V_H$  对呼吸子的传输具有极其重要的意义, 它不仅影响呼吸子的传输, 还控制着呼吸子与孤子之间的转换, 当  $V_T$  与  $V_H$  满足

$$\frac{V_H}{\kappa_i} = \frac{V_T}{\kappa_r} \quad (9)$$

时, 呼吸子将转换为孤子。其中  $V_H/\kappa_i$  与  $V_T/\kappa_r$  分别与 LPD 方程孤子解的群速度和相速度一一对应, 图 2 为  $V_H/\kappa_i$  与  $V_T/\kappa_r$  满足不同关系时, 呼吸子的传输特性。从图 2(b) 可以清楚地看出, 当  $V_T, V_H, \kappa_i, \kappa_r$  满足关系(9)式时, 呼吸子的呼吸特性消失, 变成了抖动的 W 型孤子。当关系式(9)不满足时, 呼吸子仍具有呼吸特性, 只是每个脉冲与传输轴之间均存在一定的夹角, 这种现象主要是由 LPD 算子的强度  $\alpha_4$  决定的, 如图 2(a) 所示。为了更清楚地看出两者之间的区别, 图 2(c) 给出了两种情况下当  $t=0$  时脉冲的纵向分布曲线。图中各参数取值分别为:  $a=0, a_1=-1, c=1, b_1=0.707$ , 且图 2(a) 中  $\alpha_4=1/64$ , 图 2(b) 中  $\alpha_4=1/16$ 。

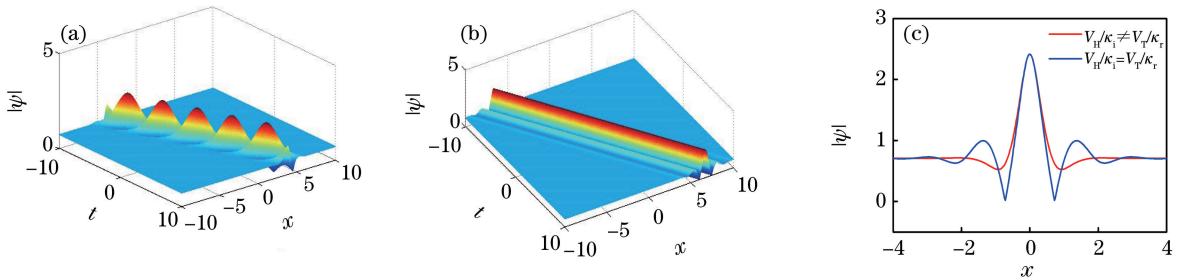


图 2 呼吸子与孤子的转换。(a)  $V_H/\kappa_i \neq V_T/\kappa_r$  时的呼吸子;(b)  $V_H/\kappa_i = V_T/\kappa_r$  时的孤子;(c)  $t=0$  时脉冲分布的比较

Fig. 2 Breather and soliton conversion. (a) Breather for  $V_H/\kappa_i \neq V_T/\kappa_r$ ;

(b) Soliton for  $V_H/\kappa_i = V_T/\kappa_r$ ; (c) corresponding pulse distribution of the two cases at  $t=0$

接下来探讨  $a_1 = -a/2, c$  与  $b_1$  满足不同大小关系而  $a=2, a_1=-1, b_1=0.707, \alpha_4=1/16$  时呼吸子的传输特性, 此时参数不满足关系式(9)的条件, 但仍出现了呼吸子呼吸特性消失的现象, 如图 3 所示。由图 3(a) 可知, 当  $c < b_1, \kappa_r=0$  时, 呼吸子的呼吸特性消失, 转换为孤子, 由图 3(a) 与图 2(b) 对比可知当  $\kappa_r=0$  时孤子的背景波有所提高。由图 3

(b) 可知, 当  $c > b_1$  时,  $\kappa_i=0$ , 此时呼吸子的呼吸特性消失, 呼吸子转换为周期波, 且由图 3(b) 与图 3(c) 对比可得: 当  $c$  增大时, 周期性孤子的传播周期将变小。从图 3(d) 给出的三种情况下当  $t=0$  时脉冲的纵向分布曲线中可以看出, 当参数  $c$  取值增大时,  $c=0.9$  的曲线周期明显比  $c=0.8$  曲线的要小, 孤子被压缩, 但周期性孤子的振幅保持不变, 且  $c <$

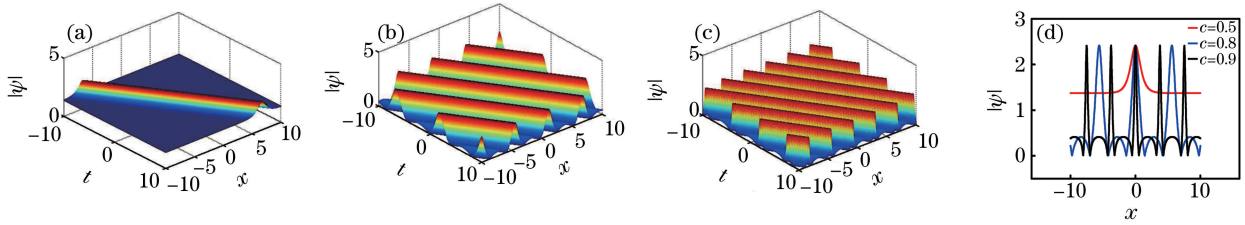


图 3 参数  $c$  对呼吸子特性的影响。(a)  $c=0.5$ ; (b)  $c=0.8$ ; (c)  $c=0.9$ ; (d)  $t=0$  时的脉冲分布比较

Fig. 3 Influence of parameter  $c$  on breather characteristic. (a)  $c=0.5$ ; (b)  $c=0.8$ ; (c)  $c=0.9$ ; (d) corresponding pulse distribution of the three cases at  $t=0$

$b_1$  时背景波的幅值比  $c > b_1$  时背景波的幅值大。

当  $a_1 \neq -a/2$  时,而其他参数取值为  $c=0.5$ ,  $a_1=-1, b_1=0.707, \alpha_4=1/16$  时,呼吸子的传输特性如图 4 所示。通过对比图 4(a)与图 4(b)的参数可以发现:当且仅当  $a$  改变,  $a_1, b_1, \alpha_4$  仍满足方程(9)关系式时,若  $a < 0$ ,呼吸子转变成为振荡 W 型孤子;当  $a > 0$  时,呼吸子转变成为一般 W 型孤子。

图 4(c)给出了两种情况下当  $t=0$  时振荡 W 型孤子与一般 W 型孤子的包络图,由图 4(c)可知:振荡 W 型孤子和一般 W 型孤子之间最明显的区别为振荡 W 型孤子在主峰两边有两个较为明显的旁峰。

接下来讨论高阶线性与非线性强度  $\alpha_4$  对呼吸子的影响。当  $a=-0.5, c=0.5, a_1=1.7, b_1=0.5$  时,  $\alpha_4$  对呼吸子的影响如图 5 所示。

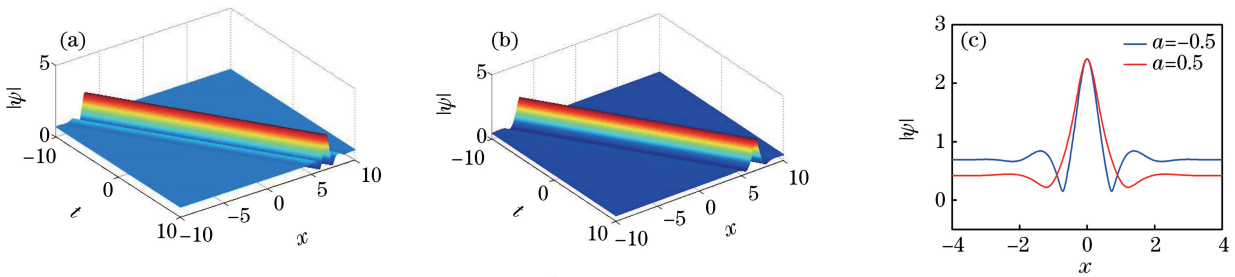


图 4 参数  $a$  对孤子特性的影响。(a) 振荡 W 型孤子  $a=-0.5$ ; (b) 一般 W 型孤子  $a=0.5$ ; (c)  $t=0$  时脉冲分布比较

Fig. 4 Influence of parameter  $a$  on soliton characteristics. (a) Oscillatory W-type soliton with  $a=-0.5$ ; (b) W-type soliton with  $a=0.5$ ; (c) corresponding pulse distribution of the two cases at  $t=0$

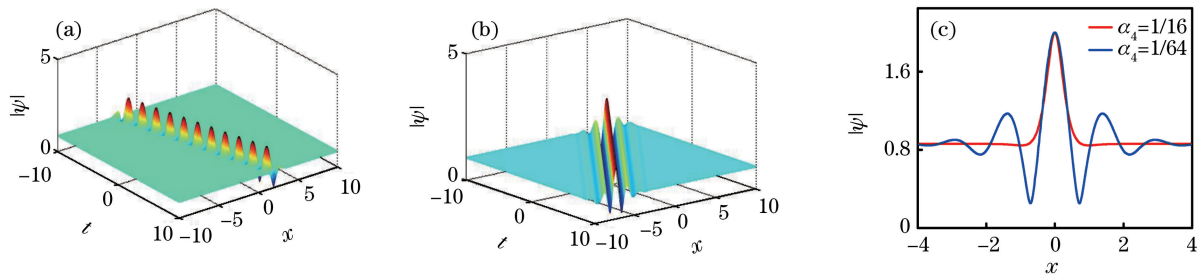


图 5 参数  $\alpha_4$  对呼吸子特性的影响。(a) 一般的呼吸子  $\alpha_4=1/16$ ; (b) 振荡 W 型孤子  $\alpha_4=1/64$ ; (c)  $t=0$  时的脉冲分布比较

Fig. 5 Effect of parameter  $\alpha_4$  on breather characteristic. (a) General breathers with  $\alpha_4=1/16$ ;

(b) oscillatory W-type soliton with  $\alpha_4=1/64$ ; (c) corresponding pulse distribution of the two cases at  $t=0$

由图 5(a)与图 5(b)可知:  $\alpha_4$  对呼吸子的传输具有非常重要的作用,当  $\alpha_4=1/16$  时,此时方程(6)为一般的呼吸子;当  $\alpha_4=1/64$  时,一般的呼吸子转换为振荡 W 型孤子,且相比于图 4(c)中振荡 W 型孤子的振荡要强许多,图 5(c)为  $t=0$  时一般呼吸子与振荡 W 型孤子的纵向分布曲线。

综上所述:基于 LPD 方程的一阶呼吸子解,当

参数发生改变时,可以得到 AB 和 KM 孤子以及呼吸子与不同类型孤子之间的转换条件;当参数满足  $V_H/\kappa_i$  与  $V_T/\kappa_r$  相等的条件时,呼吸子的呼吸特性消失,此时改变特定参数的值可以得到不同类型的孤子;当呼吸子解的  $\kappa_r=0$  时,呼吸子的呼吸特性消失,呼吸子转换为孤子,且背景波有所提高;当  $\kappa_i=0$  时,呼吸子转换为周期波;此外,通过对四阶

线性和非线性强度参数  $\alpha_4$  的调节也可以实现呼吸子向振荡 W 型孤子的转换。

### 3 二阶呼吸子解及其双呼吸子的碰撞特性

为了得到 LPD 方程的二阶呼吸子解,需要两个

复特征值:  $\lambda_j = a_j + ib_j, j = 1, 2$ 。基于 LPD 方程的一阶呼吸子解,由(4)式可得 LPD 方程的二阶呼吸子解为

$$\psi_2 = \psi_1 + \frac{2(\lambda_2^* - \lambda_2)s_{21}r_{21}^*}{|r_{21}|^2 + |s_{21}|^2} \quad (10)$$

式中各参数分别为

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{21}^* = -\frac{2}{D_1} e^{ix/2} \left\{ \begin{array}{l} 4ib_1 \cosh(B_i - iB_r) \cosh(D_i + D_r) \times \sinh(A_i + iA_r) + \\ \sinh(C_i + iC_r) \times \left\{ \begin{array}{l} \cosh(2A_i) [-a_1 + a_2 + i(b_1 - b_2)] + \\ \cos(2A_r) [a_1 - a_2 - i(b_1 - b_2)] + \\ [\cos(2B_r) + \cosh(2B_i)] [-a_1 + a_2 - i(b_1 + b_2)] \end{array} \right\} \end{array} \right\}, \\ s_{21} = -\frac{2}{D_1} e^{ix/2} \left\{ \begin{array}{l} 4ib_1 \cosh(B_i - iB_r) \cosh(A_i + iA_r) \times \sinh(C_i + iC_r) + \\ \cosh(D_i - iD_r) \times \left\{ \begin{array}{l} \cosh(2A_i) [a_1 - a_2 - i(b_1 + b_2)] + \\ \cos(2A_r) [-a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)] + \\ [\cos(2B_r) + \cosh(2B_i)] [a_1 - a_2 + i(b_1 - b_2)] \end{array} \right\} \end{array} \right\}, \\ B_r = -\chi_{1r} + \frac{1}{2}(\kappa_{1r}t + d_{1r}x) - \frac{\pi}{4}, B_i = -\chi_{1i} + \frac{1}{2}(\kappa_{1i}t + d_{1i}x), \\ D_1 = \cos(2B_r) + \cos(2A_i) + \cosh(2B_i) - \cos(2A_r), \end{array} \right. \quad (11)$$

其中二阶线性参数  $r_{12}$  和  $s_{12}$  的表达式分别为

$$r_{12} = 2ie^{-ix/2} \sin C, s_{12} = 2e^{ix/2} \sin D, C = C_r + iC_i, D = D_r + iD_i, d_2 = d_{2r} + id_{2i}, \quad (13)$$

$$\kappa_1 = 2\sqrt{c^2 + (\lambda_1 + a/2)^2} = \kappa_{1r} + i\kappa_{1i}, \chi_1 = \arccos(\kappa_1/2) = \chi_{1r} + i\chi_{1i}, \quad (14)$$

$$\kappa_2 = 2\sqrt{c^2 + (\lambda_2 + a/2)^2} = \kappa_{2r} + i\kappa_{2i}, \chi_2 = \arccos(\kappa_2/2) = \chi_{2r} + i\chi_{2i}, \quad (14)$$

$$C_r = \chi_{2r} + \frac{1}{2}(\kappa_{2r}t + d_{2r}x) - \frac{\pi}{4}, C_i = \chi_{2i} + \frac{1}{2}(\kappa_{2i}t + d_{2i}x),$$

$$D_r = -\chi_{2r} + \frac{1}{2}(\kappa_{2r}t + d_{2r}x) - \frac{\pi}{4}, D_i = -\chi_{2i} + \frac{1}{2}(\kappa_{2i}t + d_{2i}x), \quad (15)$$

$$d_{2r} = -b_2\kappa_{2i} + a_2\kappa_{2r} + \alpha_4(\Omega_2\kappa_{2i} + \Omega_2\kappa_{2r}), d_{2i} = b_2\kappa_{2r} + a_2\kappa_{2i} + \alpha_4(\Omega_2\kappa_{2i} - \Omega_2\kappa_{2r}), \quad (16)$$

$$\Omega_2 = 4a_2(1 - 2a_2^2 + 6b_2^2), \Omega_2 = -4b_2(1 - 6a_2^2 + 2b_2^2)。$$

当两列呼吸子的频率不同时,即  $\kappa_1 \neq \kappa_2$ , 两列呼吸子在平面内具有不同的波数,两列呼吸子碰撞行为类似于相邻孤子间的相互作用,两列呼吸子相互吸引合二为一形成一个峰值功率更大的单峰,然后分开后相互排斥,如图 6 所示,其中各参数的取值分别为:  $a = -0.5, c = 0.5, a_1 = 1.7, b_1 = 0.6, a_2 = -1.7, b_2 = 0.6, \alpha_4 = 1/16$ 。

当双呼吸子中只有一个呼吸子满足转换关系式(9)时,双呼吸子的碰撞特性将有所不同,如图 7 所示。图中给出的是双呼吸子中一个呼吸子转变成了 W 型孤子和周期性孤子后与另一个呼吸子的碰撞情况,从图 7(a)中可以看出,当  $c = 1, b_1 = 0.707$  时,其他参数取值分别为  $a = 0, a_1 = -1, a_2 = 1, b_2 = 1.3, \alpha_4 = 1/16$ , 只有一个呼吸子的参数满足方

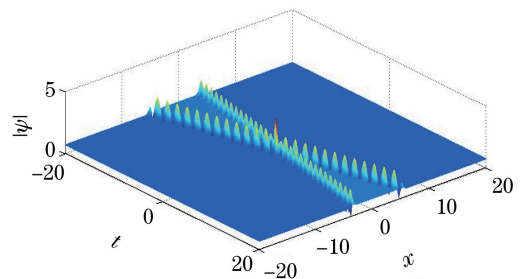


图 6 双呼吸子的碰撞

Fig. 6 Collision between two breathers

程(9)的关系,此时双呼吸子的碰撞转变成为孤子与呼吸子的碰撞,且在碰撞的中心位置产生一个幅值更大的峰,在碰撞之后呼吸子与孤子仍保持碰撞前的特性向前传输;当  $c > b_1$ , 且  $c = 0.8, b_1 = 0.707$ , 其

他参数为  $a=2, a_1=-1, \alpha_4=1/16$  时,如图 7(b)所示,此时得到了周期波与呼吸子的碰撞,周期波与呼

吸子叠加时,在中心位置的峰值明显比周围的峰值功率大。

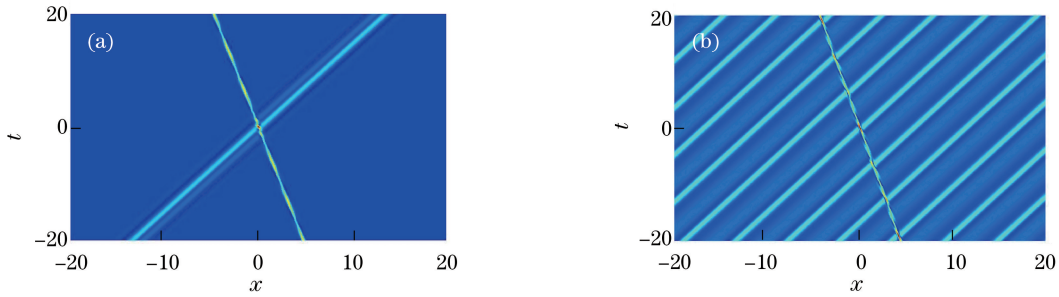


图 7 孤子与呼吸子的碰撞。(a) W 型孤子和呼吸子;(b)周期性孤子与呼吸子

Fig. 7 Collisions between solitons and breathers. (a) W-type soliton and breather; (b) periodic soliton and breather

双呼吸子的碰撞特性非常丰富,本文只讨论几种具有代表性的碰撞关系。上面的讨论中,已经对一般的双呼吸子碰撞以及孤子与呼吸子的碰撞进行了讨论,接下来将要讨论双呼吸子碰撞时的另一种特殊情况:两个呼吸子并行传播时的碰撞特性<sup>[39]</sup>,即双呼吸子先沿同一方向传输后发生碰撞,在碰撞之后仍沿同一方向传输,在并行传输模式下,呼吸子的碰撞具有周期性,双呼吸子并行传播需要满足条件:

$$\begin{cases} \frac{V_{H1}}{\kappa_{1i}} = \frac{V_{H2}}{\kappa_{2i}}, \\ V_{Hj} = \alpha_2(\Omega_{2j}\kappa_{ji} - \Omega_{2j}\kappa_{jr}) + \alpha_4(\Omega_{4j}\kappa_{ji} - \Omega_{4j}\kappa_{jr}), \end{cases} \quad (17)$$

其中  $\Omega_{2j} = 2a_j, \Omega_{4j} = 4a_j(1 - 2a_j^2 + 6b_j^2), \Omega_{2j} = -2b_j, \Omega_{4j} = -4b_j(1 - 6a_j^2 + 2b_j^2), j=1,2$ 。令  $\alpha_2 = 0.5$ , (17)式经过整理后可得:

$$\begin{cases} \frac{V_{H1}}{\kappa_{1i}} = \frac{[a_1\kappa_{1i} + b_1\kappa_{1r} + \alpha_4(\Omega_{41}\kappa_{1i} - \Omega_{41}\kappa_{1r})]}{\kappa_{1i}}, \\ \frac{V_{H2}}{\kappa_{2i}} = \frac{[a_2\kappa_{2i} + b_2\kappa_{2r} + \alpha_4(\Omega_{42}\kappa_{2i} - \Omega_{42}\kappa_{2r})]}{\kappa_{2i}}. \end{cases} \quad (18)$$

此时, (17)式没有解析解,但可以计算出它的数值解。这里假设  $\lambda_2 = a_2 + ib_2$  已知,且  $\alpha_4 = 1/64$ ,图 8 给出了当  $\lambda_2$  取不同值时,  $a_1$  与  $b_1$  的关系曲线图,  $a_1$  与  $b_1$  的关系曲线是连续而非离散的点,且在  $a_1 = 0.0276, b_1 = 0.9678$  处两条曲线相交,如图 8 中 P 点所示。在图 8 的曲线中选取不同的点就可以得到不同的模式。首先,当  $\lambda_2 = 0.08 + 0.9i$  时,即图 8 中的蓝色曲线,令  $b_1 = 1.8$ ,将会得到  $a_1$  的不同取值,  $a_1 = -3.2350, a_1 = 0.8756, a_1 = 2.2581$ ,这里只讨论  $a_1 > 0$  的情况,即图 8 中蓝色曲线上黑色 X 形所表示的  $a_1 = 0.8756, b_1 = 1.8$  的点以及黑色星形标

记的  $a_1 = 2.2581, b_1 = 1.8$  两个点,双呼吸子并行叠加的情况如图 9 所示。从图中可以看出,当  $\lambda_1$  与  $\lambda_2$  满足方程(17)的关系时,两列呼吸子传播方向一致,并在两列呼吸子相交时产生碰撞,碰撞产生能量更大的波,但在碰撞之后,两列呼吸子仍保持原有的速度、方向、幅值继续向前传播,传播一段距离之后,两列呼吸子再次碰撞,后又保持原来的传播模式向前传播,因此,并行传播时呼吸子的碰撞存在一定的周期性。

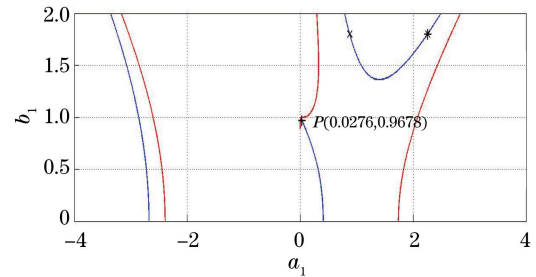


图 8  $a_1$  和  $b_1$  的关系曲线,其中蓝色曲线为  $\lambda_2 = 0.08 + 0.9i$ ,红色曲线  $\lambda_2 = 0.08 + 1.0i$

Fig. 8 Relationship curves between  $a_1$  and  $b_1$  for  $\lambda_2 = 0.08 + 0.9i$  (the blue line) and  $\lambda_2 = 0.08 + 1.0i$  (the red line)

特别地,当  $a_1 = 0.0276, b_1 = 0.9678$  时,红色曲线与蓝色曲线相交,当  $\lambda_1 = 0.0276 + 0.9678i$ ,而  $\lambda_2$  分别为  $\lambda_2 = 0.08 + 0.9i$  以及  $\lambda_2 = 0.08 + 1.0i$  时,此时双呼吸子的叠加模式均为并行叠加,但  $b_2$  的不同使得叠加模式不同,图 10 给出了当  $\lambda_2 = 0.08 + 0.9i$  与  $\lambda_2 = 0.08 + 1.0i$  时双呼吸子的传输特性。从图 10 的两幅图可知,当  $\lambda_2$  不同时,双呼吸子的并行叠加模式也不相同,如图 10(a)所示,在平面内可以看到 3 个相互叠加的点,但在相互作用之后,两列呼吸子的传输方向依旧平行,即图 10(a)的碰撞有一定的

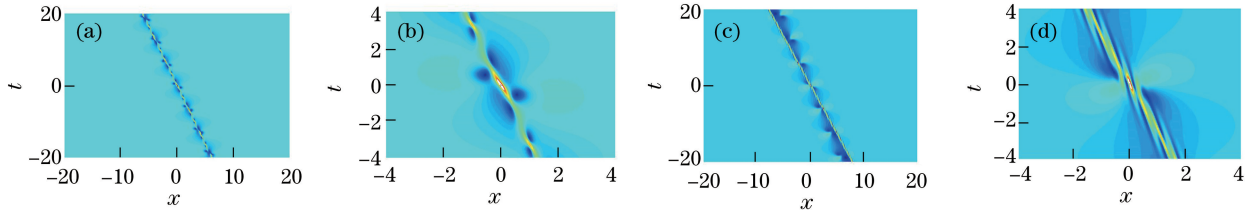


图 9 双呼吸子的并行叠加。(a)  $\lambda_1=0.8756+1.8i$ ; (c)  $\lambda_1=2.2581+1.8i$ ; (b)和(d)分别是(a)(c)的局部放大图  
Fig. 9 Two breathers parallel superposition. (a)  $\lambda_1=0.8756+1.8i$ ; (c)  $\lambda_1=2.2581+1.8i$ ;  
(b) and (d) are the corresponding partial enlarged views of (a) and (c)

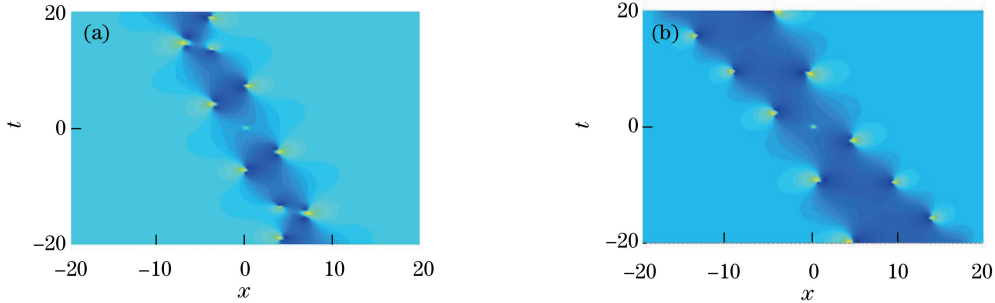


图 10 双呼吸子的传输特性。(a)  $\lambda_1=0.0276+0.9737i, \lambda_2=0.08+0.9i$ ; (b)  $\lambda_1=0.0276+0.9737i, \lambda_2=0.08+1.0i$   
Fig. 10 Transmission characteristics of two-breather. (a)  $\lambda_1=0.0276+0.9737i, \lambda_2=0.08+0.9i$ ;  
(b)  $\lambda_1=0.0276+0.9737i, \lambda_2=0.08+1.0i$

周期性;图 10(b)中仅有一个相互叠加的点,且在相互作用之后两列呼吸子的传输方向不再平行,即图 10(b)的双呼吸子的碰撞不存在周期性,并非严格意义上的并行传输。

一般地,非线性薛定谔方程的二阶呼吸解不满足两个特征值相等的情况,否则解析解将会变得没有意义;为了克服这个难题,可以考虑  $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$  的情况,当  $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$  时,此时的非线性薛定谔方程的解为简并的解,图 11 给出了不同参数时双呼吸子解的简并情况。由图 11 的三幅图可知,当  $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$  时,此时的双呼吸子为简并模式,图 11(a)为一般呼吸子

的简并,两列呼吸子的传输频率相同,且在中心位置产生一个幅值较大的峰;图 11(b)与图 11(c)两幅图分别为  $\frac{V_H}{\kappa_i} = \frac{V_T}{\kappa_r}$  与  $\frac{V_H}{\kappa_i} \neq \frac{V_T}{\kappa_r}$  的情况,图 11(b)为双孤子的简并模式,即双呼吸子转换为双孤子的情况,此时在中心位置也产生一个幅值较大的波,且两列孤子与中心波成奇对称特性;图 11(c)为  $c > b_1$  时,即呼吸子转换为周期波的情况,此时同样在中心位置产生一个幅值较大的波,且在中心位置两端均存在一个幅值较小的波峰,两个幅值较小的波与中心位置较大的波成奇对称特性。

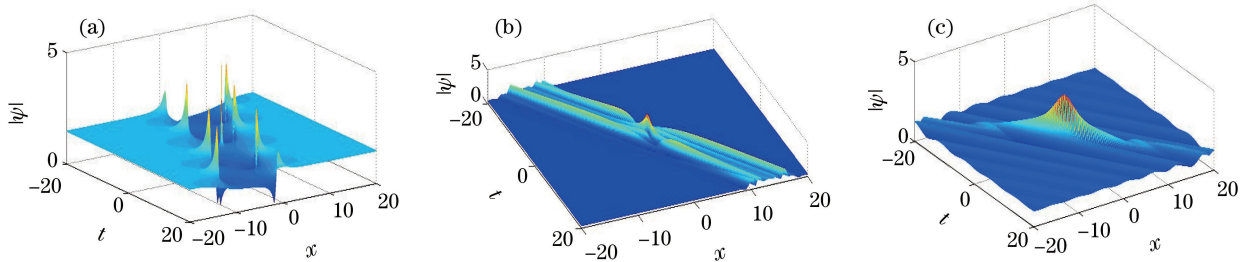


图 11 双呼吸子的简并解。(a)  $a=0, c=1, a_1=0.03, b_1=0.97, a_2=0.03, b_2=0.9701, \alpha_4=1/64$ ; (b)  $a=0, c=1, a_1=-1, b_1=0.707, a_2=-1, b_2=0.7071, \alpha_4=1/16$ ; (c)  $a=2, c=0.8, a_1=-1, b_1=0.707, a_2=-1, b_2=0.7071, \alpha_4=1/16$   
Fig. 11 Degenerate solution of two-breather. (a)  $a=0, c=1, a_1=0.03, b_1=0.97, a_2=0.03, b_2=0.9701, \alpha_4=1/64$ ;  
(b)  $a=0, c=1, a_1=-1, b_1=0.707, a_2=-1, b_2=0.7071, \alpha_4=1/16$ ; (c)  $a=2, c=0.8, a_1=-1, b_1=0.707, a_2=-1, b_2=0.7071, \alpha_4=1/16$

## 4 结 论

基于同时包含二阶和四阶线性项和非线性项的高阶非线性薛定谔方程的扩展方程,采用达布变换法求得 LPD 方程的一呼吸子解,并对一呼吸子解进行了详细的讨论,主要包括一呼吸子解转变成孤子所必须满足的条件,周期性孤子、W 型孤子和振荡 W 型孤子之间的区别与联系。通过选取不同的参数,得到了一呼吸子解的不同传输特性,并且得到了呼吸子与不同类型孤子间的转换关系,相关结果将为非线性光学、等离子体和流体力学以及玻色-爱因斯坦凝聚中非线性动力学研究提供一定的理论参考。基于 LPD 方程的一呼吸子,经过递推关系得到了 LPD 方程的双呼吸子解,并对其碰撞特性进行了详细研究,包括 W 型孤子与呼吸子的碰撞特性以及周期性的孤子与呼吸子的碰撞特性。除此之外,本文还研究了双呼吸子碰撞的特殊模式,即两列呼吸子并行叠加模式以及简并模式。研究结果表明,LPD 方程的呼吸子受其参数影响,传输特性表现极其丰富。这些特性对于分析和研究较为复杂的物理系统中波的演化具有指导作用。特别是光学光纤中超短脉冲的传输,LPD 方程中的高阶线性项和非线性项将为更好地理解超短脉冲的传输特性以及更好地设计实验提供一定的理论参考。本文只研究了呼吸子的部分特性,在接下来的工作中,将会继续展开对 LPD 方程的呼吸子解以及其他解的特性研究,以期更为详尽地了解 LPD 系统中脉冲的动力学特性。

## 参 考 文 献

- [1] Zakharov V E, Shabat A B. Exact theory of two-dimensional self-focussing and one-dimensional self-modulating waves in nonlinear media[J]. Journal of Mathematical Physics, 2015, 34(15): 62-69.
- [2] Akhmediev N, Ankiewicz A. Solitons: nonlinear pulses and beams[M]. London: Chapman and Hall, 1997.
- [3] Hasegawa A, Tappert F. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. anomalous dispersion [J]. Applied Physics Letters, 1973, 23(3): 142-144.
- [4] Agrawal G P. Nonlinear fiber optics [M]. 4th Edition. New York: Academic Press, 2006.
- [5] Zakharov V E. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid[J]. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 1972, 9(2): 190-194.
- [6] Kharif C, Pelinovsky E, Slunyaev A. Rogue waves in the ocean [J]. Eos Transactions American Geophysical Union, 2009, 91(11): 104.
- [7] Andreev P A. First principles derivation of NLS equation for BEC with cubic and quintic nonlinearities at nonzero temperature: dispersion of linear waves [J]. International Journal of Modern Physics B, 2013, 27(6): 1350017.
- [8] Haus H A, Wong W S. Solitons in optical communications [M]. Oxford: Oxford University Press, 1995.
- [9] Agrawal G P. Nonlinear fiber optics [M]. New York: Academic Press, 2005.
- [10] Maimistov A I, Basharov A M. Nonlinear optical waves [M]. Amsterdam: Kluwer Academic, 1999: 148-159.
- [11] Wu K, Chen Y, Chen X N, *et al.* Investigation on high-bit all optical quantization based on soliton self-frequency shift effect [J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(3): 0319004.  
吴侃, 陈颖, 陈向宁, 等. 基于孤子自频移现象的高比特全光量化仿真研究 [J]. 光学学报, 2015, 35(3): 0319004.
- [12] Lakshmanan M, Porsezian K, Daniel M. Effect of discreteness on the continuum limit of the Heisenberg spin chain [J]. Physics Letters A, 1988, 133(9): 483-488.
- [13] Porsezian K, Daniel M, Lakshmanan M. On the integrability aspects of the one-dimensional classical continuum isotropic biquadratic Heisenberg spin chain [J]. Journal of Mathematical Physics, 1992, 33(5): 1807-1816.
- [14] Porsezian K. Completely integrable nonlinear Schrödinger type equations on moving space curves [J]. Physical Review E, 1997, 55(3): 3785-3788.
- [15] Potasek M J, Tabor M. Exact solutions for an extended nonlinear Schrödinger equation [J]. Physics Letters A, 1991, 154(9): 449-452.
- [16] Cavalcanti S B, Cressoni J C, da Cruz H R, *et al.* Modulation instability in the region of minimum group-velocity dispersion of single-mode optical fibers via an extended nonlinear Schrödinger equation [J]. Physical Review A, 1991, 43(11): 6162-6165.
- [17] Takhtajan L A. Integration of the continuous Heisenberg spin chain through the inverse scattering method [J]. Physics Letters A, 1977, 64(2): 235-237.
- [18] Sedletsky Y V. The fourth-order nonlinear Schrödinger equation for the envelope of Stokes waves on the surface of a finite-depth fluid [J]. Journal of Experimental and Theoretical Physics, 2003, 97(1):



- 180-193.
- [19] Slunyaev A V, Theor J E. A high-order nonlinear envelope equation for gravity waves in finite-depth water[J]. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2005, 101(5): 926-941.
- [20] Frisquet B, Kibler B, Millot G. Collision of akhmediev breathers in nonlinear fiber optics [J]. *Physical Review X*, 2013, 3(4): 041032.
- [21] Zakharov V E, Gelash A A. Nonlinear stage of modulation instability [J]. *Physical Review Letters*, 2013, 111(5): 054101.
- [22] Kibler B, Fatome J, Finot C, *et al.* The Peregrine soliton in nonlinear fibre optics [J]. *Nature Physics*, 2010, 6(10): 790-795.
- [23] Dudley J M, Dias F, Erkintalo M, *et al.* Instabilities, breathers and rogue waves in optics [J]. *Nature Photonics*, 2014, 8(10): 755-764.
- [24] Kichenassamy S. Breather solutions of the nonlinear wave equation [J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1991, 44(7): 789-818.
- [25] Tajiri M, Watanabe Y. Breather solutions to the focusing nonlinear Schrödinger equation [J]. *Physical Review E*, 1998, 57(3): 3510-3519.
- [26] Kovalyov M. Modulating properties of harmonic breather solutions of KdV [J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1998, 31(22): 5117-5128.
- [27] Wang C, Dai Z D, Lin S Q, *et al.* Breather-type soliton and two-soliton solutions for modified Korteweg-de Vries equation [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2010, 216(1): 341-343.
- [28] Zhang G, Liu F. Existence of breather solutions of the DNLS equations with unbounded potentials [J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2009, 71(12): e786-e792.
- [29] Kevrekidis P G, Weinstein M I. Breathers on a background: periodic and quasiperiodic solutions of extended discrete nonlinear wave systems [J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2003, 62(1/2): 65-78.
- [30] Lahiri A. Exact traveling breather solutions in a discrete Klein-Gordon ring [J]. *Physical Review B*, 2005, 72(22): 224306.
- [31] Jia T T, Chai Y Z, Hao H Q. Multi-soliton solutions and breathers for the generalized coupled nonlinear Hirota equations via the Hirota method [J]. *Superlattices and Microstructures*, 2017, 105: 172-182.
- [32] Sarkar R, Dey B. Exact compact breather-like solutions of two-dimensional Fermi-Pasta-Ulam lattice [J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2006, 39(4): L99-L104.
- [33] Zhu Y Q, Hu W. Propagation of breathers in the nematic liquid crystal cell without bias voltage [J]. *Acta Optica Sinica*, 2015, 35(9): 0919001.  
朱叶青, 胡巍. 无外置偏压的向列相液晶盒中的呼吸子传输 [J]. *光学学报*, 2015, 35(9): 0919001.
- [34] Wu D, Wang J F, Shi J, *et al.* Generation and transmission of Peregrine solitons in doped fiber [J]. *Acta Optica Sinica*, 2017, 37(4): 0406002.  
武达, 王娟芬, 石佳, 等. 掺杂光纤中 Peregrine 孤子的产生和传输 [J]. *光学学报*, 2017, 37(4): 0406002.
- [35] Chowdury A, Krolkowski W. Breather-to-soliton transformation rules in the hierarchy of nonlinear Schrödinger equations [J]. *Physical Review E*, 2017, 95(6): 062226.
- [36] Hirota R. Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation [J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1973, 14(7): 805-809.
- [37] Sasa N, Satsuma J. New-type of soliton solutions for a higher-order nonlinear Schrödinger equation [J]. *Journal of the Physical Society of Japan*, 1991, 60(2): 409-417.
- [38] Ankiewicz A, Wang Y, Wabnitz S, *et al.* Extended nonlinear Schrödinger equation with higher-order odd and even terms and its rogue wave solutions [J]. *Physical Review E*, 2014, 89(1): 012907.
- [39] Chowdury A, Kedziora D J, Ankiewicz A, *et al.* Breather solutions of the integrable quintic nonlinear Schrödinger equation and their interactions [J]. *Physical Review E*, 2015, 91(2): 022919.