

基于灰度梯度正则化去噪的改进数字图像相关法

郑成林^{1,3**}, 何顶顶^{2,3}, 费庆国^{1,3*}

¹东南大学机械工程学院, 江苏 南京 211189;

²东南大学土木工程学院, 江苏 南京 210096;

³东南大学空天机械动力学研究所, 江苏 南京 211189

摘要 为了提高数字图像相关法的抗噪声能力,分析了灰度梯度计算误差对数字图像相关法测量精度的影响,提出采用 Tikhonov 正则化方法计算图像灰度梯度,进而通过反向组合高斯-牛顿(IC-GN)法计算图像的亚像素位移;基于数值仿真散斑图研究灰度梯度的相对计算误差,并分析采用 Tikhonov 正则化方法计算图像灰度梯度后,改进数字图像相关法的测量精度,结合实验验证所提方法在实际噪声环境中的抗噪声能力。结果表明:灰度梯度对数字图像相关法测量精度有较大影响,而采用 Tikhonov 正则化方法后,可以有效提高数字图像相关法的测量精度与抗噪声能力。

关键词 测量; 数字图像相关; Tikhonov 正则化; 灰度梯度; 噪声

中图分类号 O348.1

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201838.0812002

Improved Digital Image Correlation Method Based on Gray Gradient Denoised by Regularization Method

Zheng Chenglin^{1,3**}, He Dingding^{2,3}, Fei Qingguo^{1,3*}

¹ School of Mechanical Engineering, Southeast University, Nanjing, Jiangsu 211189, China;

² School of Civil Engineering, Southeast University, Nanjing, Jiangsu 210096, China;

³ Institute of Aerospace Machinery and Dynamics, Southeast University, Nanjing, Jiangsu 211189, China

Abstract To improve the anti-noise ability of the digital image correlation method, we analyze the influence of gray gradient calculation error on the measurement accuracy of the digital image correlation method. An improved algorithm is proposed to calculate the gray gradient of the image by the Tikhonov regularization method and the sub-pixel displacement of the image by the inverse compositional Gauss-Newton (IC-GN) method. On the basis of the numerical simulation of the speckle pattern, the relative calculation error of the gray gradient is studied, and the measurement accuracy of the digital image correlation method is analyzed after calculating the gray gradient of the image by the Tikhonov regularization method. The proposed method is verified by experiments in the noise environment. The results show that the gray gradient has great influence on the measurement accuracy of the digital image correlation method. Meanwhile, the measurement accuracy and the anti-noise ability of the digital image correlation method can be effectively improved by the Tikhonov regularization method.

Key words measurement; digital image correlation; Tikhonov regularization; gray gradient; noise

OCIS codes 120.3940; 100.2000; 120.4290

1 引 言

数字图像相关法^[1]已经发展成为一种可靠的光学测量方法,并在实验力学领域得到了广泛应用^[2-4]。目前,对于基于数字图像相关法测量理论的研究已经比较充分,一些影响数字图像相关法测量

精度的基本因素,如图像噪声^[5-6]、散斑质量^[7-8]、形函数选择^[9-10]、插值误差^[11-14]等,已经得到了比较深入的讨论,其中插值误差和噪声对数字图像相关法的计算精度具有重要作用^[15-16]。在实际测量中,相机的自热或环境振动等因素会导致噪声不可避免。为了提高数字图像相关法的抗噪声能力,使其在实

收稿日期: 2017-12-11; 修回日期: 2018-03-20; 录用日期: 2018-03-24

基金项目: 国家自然科学基金(11572086)、江苏省自然科学基金(BK20170022)

* E-mail: qgfei@seu.edu.cn; ** E-mail: 220160313@seu.edu.cn

际测量环境中具有较高的测量精度, Wang 等^[10]分析了数字图像相关法中形函数过匹配引入的随机误差; Pan^[17]利用高斯滤波对图像进行预处理来减小数字图像相关法的均值误差, 但这种方法不能减小数字图像相关法的标准差; Shao 等^[18]比较了反向组合高斯-牛顿(IC-GN)法和正向牛顿-拉普森(FA-NR)法的噪声稳健性, 结果表明, 采用反向策略的 IC-GN 法具有更好的噪声稳健性。Mazzoleni 等^[19]将高斯低通滤波与数字散斑相结合, 取得了良好的效果。Su 等^[20]讨论了图像灰度梯度计算误差引起的系统误差。Luu 等^[12]研究了插值算法对数字图像相关法计算精度的影响, 结果表明, 高精度的插值函数可以有效提高数字图像相关法的测量精度, 但图像噪声对其插值精度有较大影响。以上研究有效地提高了数字图像相关法的抗噪声能力。在传统的数字图像相关法中, 有限差分法^[18, 21]常用于计算图像的灰度梯度, 由于数值微分是一种不适定问题, 对测量数据的微小扰动较敏感^[22], 因此微小的灰度测量误差将导致计算所得灰度梯度严重偏离真实的灰度梯度, 进而降低数字图像相关法的测量精度。正则化方法是求解不适定问题和反问题的一种有效方法, 在测量数据存在一定噪声水平的情况下, Tikhonov 正则化^[22-23]方法通过构造泛函将求导问题转化为泛函的极值问题, 相比于传统的数值微分方法, Tikhonov 正则化方法的抗噪声能力和稳定性更强。为了进一步提高数字图像相关法的噪声稳健性, 本文分析了图像灰度梯度算法对数字图像相关法抗噪声性能的影响; 为了提高数字图像相关法的抗噪声能力, 本文分析了数字图像相关法中灰度梯度的计算误差, 提出采用 Tikhonov 正则化方法计算图像的灰度梯度, 并通过 IC-GN 法计算图像的亚像素位移, 进而有效地提高了数字图像相关法的实用性。

2 理论基础

IC-GN 法最初由 Baker 等^[24]提出, Schreier 等^[25]将其应用于数字图像相关法, 并取得了良好的效果。IC-GN 法的本质是对 FA-NR 法的改进, 其利用反向组合的思想避免了 FA-NR 法中 Hessian 矩阵的重复迭代, 显著提高了计算效率, 并且具有较好的噪声稳健性, 是目前数字图像相关法中最有应用前景的亚像素位移测量算法, 因此本研究利用 IC-GN 法来计算图像的亚像素位移。在 IC-GN 法

的计算过程中需要获得参考图像的灰度梯度, 传统的计算方法通过有限差分法对散斑图的灰度求导, 常见的有限差分公式为中心差分公式[见(1)式]和和五点差分公式[见(2)式]^[26]:

$$f_x(x, y) = \frac{1}{2} [f(x+1, y) - f(x-1, y)], \quad (1)$$

$$f_x(x, y) = \frac{1}{12} [f(x-2, y) - 8f(x-1, y) + 8f(x+1, y) - f(x+2, y)]. \quad (2)$$

有限差分公式的本质是插值型求导公式^[26], 利用已知点的函数值 $f(x)$, 构造其插值多项式 $p_n(x)$, 则多项式的导数即为函数 $f(x)$ 的近似导数。然而有限差分公式在数值上是不稳定的, 其对噪声十分敏感, 微小的测量误差将导致计算值严重偏离真实值。为了解决含噪声数据的数值微分问题, Cullum^[27]提出将 Tikhonov 正则化方法应用于数值微分的求解问题。Tikhonov 正则化方法是在函数存在一定误差水平 δ 的情况下, 构造泛函使目标函数的一阶导数误差最小, 因此相比于传统的数值微分方法, Tikhonov 正则化方法的抗噪声能力更强。Hanke 等^[23]利用 Tikhonov 正则化方法求解了函数的一阶数值微分问题, 证明了正则解是一个分片的三次样条函数, 并且给出了误差估计, 具有很强的实用价值。

假定 $y = y(x)$ 是图像子区的灰度值, 其定义区间为 $[0, 1]$, $\Delta = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1\}$ 是区间 $[0, 1]$ 的一个等距划分, 已知点 x_i 的灰度测量值为 \tilde{y}_i , 令 $h = x_{i+1} - x_i$ 为划分的等间距, 并假设

$$|\tilde{y}_i - y(x_i)| \leq \delta, \quad (3)$$

式中: δ 为误差水平参数, 是已知常数。图像噪声的影响使得利用有限差分公式对图像灰度的测量值 \tilde{y}_i 求数值导数时将引起较大的计算误差, 而 Tikhonov 正则化方法可以有效减小图像灰度梯度的计算误差。

由文献[23]可知, 基于 Tikhonov 正则化方法求得的正则解 f_* 是一个包含误差水平参数 δ 的三次样条函数, 其形式为

$$f_* = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3, \quad x \in [x_j, x_{j+1}], j = 0, 1, \dots, n-1, \quad (4)$$

式中: a_j, b_j, c_j, d_j 分别为待求解的函数系数。

函数的系数满足约束条件

$$\begin{cases} f_*^{(i)}(x_j^+) - f_*^{(i)}(x_j^-) = 0, i=0,1,2, j=1,2,\dots,n-1 \\ f_*^{(3)}(x_j^+) - f_*^{(3)}(x_j^-) = \frac{1}{\alpha(n-1)} [\tilde{y}_j - f_*(x_j)], j=1,2,\dots,n-1 \\ f_*^{(2)}(0) = f_*^{(2)}(1) = 0 \\ f_*(0) = \tilde{y}(0) \\ f_*(1) = \tilde{y}(1) \end{cases}, \quad (5)$$

式中: $f_*^{(i)}(x)$ 为函数 $f_*(x)$ 的第 i 阶导数; x_j^+ 和 x_j^- 分别为 x_j 加上正无穷小和 x_j 减去正无穷小; α 为正则化参数。求解上述线性方程组可以得到三次样条函数的待定系数。正则解 f_* 与传统三次样条插值函数的区别在于其考虑了函数的噪声, 因此在函数系数的求解过程中需要获得与函数噪声水平相关的正则化参数 α 。文献[23]通过差异准则法来选取正则化参数 α , 但是计算量相对较大。为了提高计算效率, Wang 等[22]提出了一种简洁的参数选取方法, 即令 $\alpha = \delta^2$, 其误差与文献[23]中差异准则法的类似, 但是可以显著减小计算量, 式中的数据误差水平参数 δ 在数字图像相关法中可以通过采集 2 幅或多幅试件变形前的图像来获得。令 y_1, y_2 分别为 2 幅参考图像的灰度矩阵, 则由(3)式可知 2 个灰度矩阵中的对应元素满足

$$|\tilde{y}_{1i} - \tilde{y}_{2i}| \leq 2\delta, \quad (6)$$

因此可以取误差水平参数 δ 为

$$\delta = \frac{1}{2} \max\{|\tilde{y}_{1i} - \tilde{y}_{2i}|\}. \quad (7)$$

3 数值仿真算例

数值模拟散斑图[28]可以精确控制变形参数和噪声参数, 这里用其来研究灰度梯度的计算误差对数字图像相关法计算精度的影响, 并验证基于 Tikhonov 正则化方法计算图像灰度梯度的可行性与有效性。其中, 散斑颗粒为高斯散斑, 散斑图中每个点 (x, y) 的亮度值为

$$I(x, y) = \text{int} \left\{ \sum_{k=1}^N I_0 \exp \left[-\frac{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2}{r^2} \right] \right\}, \quad (8)$$

式中: int 为取整函数; N 为散斑颗粒数; I_0 为散斑中心亮度; (x_k, y_k) 为散斑颗粒的中心位置; r 为散斑颗粒半径。这里选取散斑颗粒数 N 为 40000, 中心亮度 I_0 为固定值 80, 散斑颗粒半径 r 为 2, 散斑中心位置随机分布在区间 $[0, 512] \times [0, 512]$ 。图 1 所示为基于 MATLAB 软件生成的数值模拟散斑图。

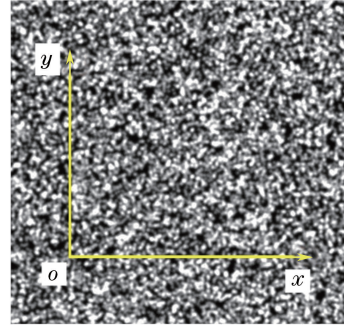


图 1 数值模拟散斑图

Fig. 1 Numerical simulation of speckle image

3.1 灰度梯度相对计算误差

将散斑图添加均值为 0 且标准差为 4% 的高斯随机噪声, 分别生成两幅散斑图, 用以计算误差水平参数 δ 。因为两幅散斑图中添加的噪声是相互独立且随机的, 所以利用两幅模拟散斑图可以获得误差水平参数 δ 。提取散斑图灰度矩阵中维数为 41 的列向量作为待计算图像子区, 分别利用有限差分法、三次样条插值函数和 Tikhonov 正则化方法计算图像子区的灰度梯度, 其中有限差分法采用精度较高的五点差分公式。

图 2 所示为 3 种算法的计算误差。由图 2 可知, 有限差分法和三次样条插值函数的计算误差基本相同(有限差分法的计算误差略小于三次样条插值函数的计算误差), 而 Tikhonov 正则化方法的计

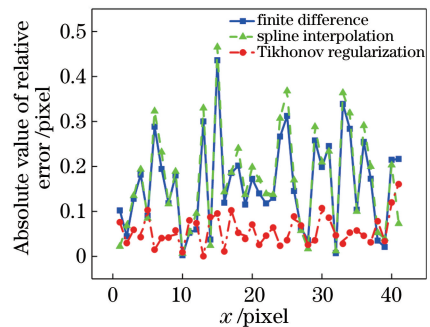


图 2 加噪声后图像子区的灰度梯度相对误差绝对值

Fig. 2 Absolute relative error of gray gradient in image sub-region after adding noise

算误差显著小于另外两种方法的计算误差。由(5)式可知,在计算正则解 f_* 的过程中,假设正则解与图像灰度测量值在区间两个端点处的函数值相等,而噪声使得两个端点的图像灰度测量值含有误差。因此,Tikhonov 正则化方法在区间两个端点附近的计算误差相对较大,其最大相对误差约为 0.15 pixel。除去两个端点附近的计算值后,其最大相对误差小于 0.1 pixel,而有限差分法和三次样条插值函数的相对计算误差已经大于 0.4 pixel。因此,在计算含有噪声的图像灰度梯度时,传统的有限差分法和三次样条插值函数将引起较大的计算误差,而 Tikhonov 正则化方法可以有效减小计算误差。

3.2 基于不同位移和噪声等级的计算误差对比

为了研究灰度梯度的计算误差对数字图像相关法计算精度的影响,以及验证基于 Tikhonov 正则化方法计算图像灰度梯度的可行性与有效性,将模拟散斑图沿 x 轴正方向依次平移 0.05 pixel,连续生

成 20 幅散斑图,共平移 1 pixel。对每幅散斑图添加均值为 0 且标准差为 4% 的高斯随机噪声,分别利用有限差分法、三次样条插值函数和 Tikhonov 正则化方法计算图像的灰度梯度,并利用 IC-GN 法计算图像的亚像素位移。每幅散斑图采用 $41 \text{ pixel} \times 41 \text{ pixel}$ 的图像子区,计算散斑图中均匀分布的 2601 个像素点,像素点间距为 3 pixel,通过三次样条插值获得散斑图亚像素位置处的灰度值,相关函数采用抗噪声能力较强的归一化平方差相关函数(ZNSSD)匹配准则,迭代收敛条件为 x 轴方向位移增量 $\Delta u < 10^{-6}$ pixel。图 3 所示为 3 种算法的计算误差。由图 3 可知,有限差分法和三次样条插值函数的计算误差基本相等,且都显著大于 Tikhonov 正则化方法。Tikhonov 正则化方法的计算误差较稳定,均值误差都小于 0.005 pixel,而有限差分法和三次样条插值函数的最大均值误差已经大于 0.01 pixel,最大标准差大于 0.02 pixel。

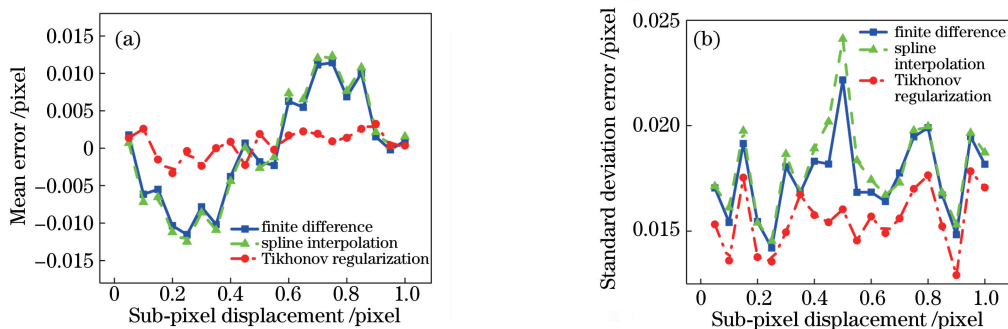


图 3 不同亚像素位移时 3 种算法的计算误差。(a)均值误差;(b)标准差

Fig. 3 Calculation errors of three algorithms with different sub-pixel displacements.

(a) Mean error; (b) standard deviation error

图 4 所示为 3 种算法的均值误差与标准差随噪声等级的变化,其中散斑图的亚像素平移量为 0.3 pixel,高斯随机噪声的均值为 0,标准差从 0.5% 依次增大到 8%。由图 4 可知:随着噪声等级增加,

3 种算法的均值误差绝对值与标准差均呈递增的趋势,但是有限差分法和三次样条插值函数的误差幅值显著大于 Tikhonov 正则化方法;随着噪声等级增加,Tikhonov 正则化方法与另外两种方法误差幅

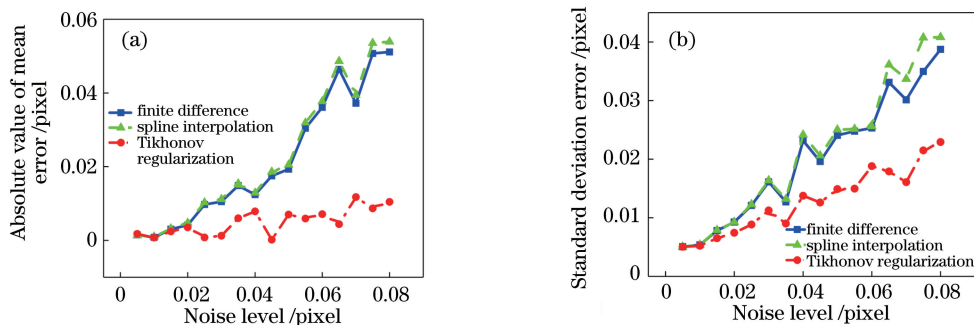


图 4 不同噪声等级时 3 种算法的计算误差。(a)均值误差绝对值;(b)标准差

Fig. 4 Calculation errors of three algorithms with different noise levels. (a) Absolute value of mean error;

(b) standard deviation error

值的差距也逐渐增加;在噪声标准差为 8% 时,有限差分法和三次样条插值函数的均值误差已经大于 0.04 pixel,标准差接近 0.04 pixel,而 Tikhonov 正则化方法的均值误差小于 0.02 pixel,标准差小于 0.025 pixel。综上所述,灰度梯度的计算误差对数字图像相关法的计算精度有较大影响,而采用 Tikhonov 正则化方法后,可以有效提高数字图像相关法的计算精度与稳定性。

3.3 计算精度与效率对比

表 1 所示为数值仿真散斑图设定位移为 0.3 pixel,图像噪声标准差为 4%,计算图像子区中均匀分布的 2601 个像素点时,3 种算法的计算误差和计

表 1 理论位移为 0.3 pixel 时 3 种算法的计算误差和计算时间

Table 1 Calculation errors and computation time of three algorithms with theoretical displacement of 0.3 pixel

Algorithm	Mean error /pixel	Standard deviation /pixel	Computation time /s
Finite difference	0.0079	0.018	14.3
Spline interpolation	0.0086	0.019	24.5
Tikhonov regularization	0.0024	0.015	27.1

4 实验案例

在利用数字图像相关法进行动态测量时,需要对结构施加动态载荷。受动态激励的作用,周围环境(包括成像设备)会出现轻微振动,进而引入环境噪声,这会降低测量精度。为了研究本研究所提方法在实际噪声环境中的应用效果,将表面均匀喷涂哑光漆的试件固定在振动台附近。采集试件表面图像时使振动台处于工作状态,振动台的激励信号设置为宽频随机激励,利用振动台工作时的振动噪声可以迫使试件表面产生复杂的轻微振动,同时引起成像设备的轻微抖动。这些微振动会导致成像质量下降,进而引起试件位移的测量误差,通过计算得到的位移误差可以验证不同方法的抗噪声能力,具体实验装置如图 5 所示。

在振动台处于工作状态时连续采集两幅散斑图,因未对试件进行平移、拉伸等操作,所以试件的理论位移为 0 pixel,此时不同方法计算得到的位移误差主要由算法系统误差、相机自热、镜头畸变、振动噪声等引起。然后将散斑图的灰度转化为双精度型,用以提高计算精度,此时计算得到的误差水平参数 δ 为 0.051。最后分别利用有限差分法、三次样条插值函数和 Tikhonov 正则化方法计算两幅散斑图的位移,用以研究 3 种算法的计算误差和抗噪声能

算时间。采用台式计算机进行数字图像相关计算。计算机的配置为 Inter(R) Core (TM) i7-6700 CPU,计算机主频为 3.4 GHz,内存大小为 8.0 GB,编程软件为 MATLAB。由表 1 可知:Tikhonov 正则化方法和三次样条插值函数的计算时间基本相等,约为有限差分法的 2 倍;在噪声标准差为 4% 时,Tikhonov 正则化方法仍然可以保持较小的计算误差,其均值误差为 0.0024 pixel,而有限差分法和三次样条插值函数的均值误差分别为 0.0079 pixel 和 0.0086 pixel,显著大于 Tikhonov 正则化方法。因此,Tikhonov 正则化方法可以在不显著降低计算速度的同时,有效地提高数字图像相关法的计算精度和稳定性。

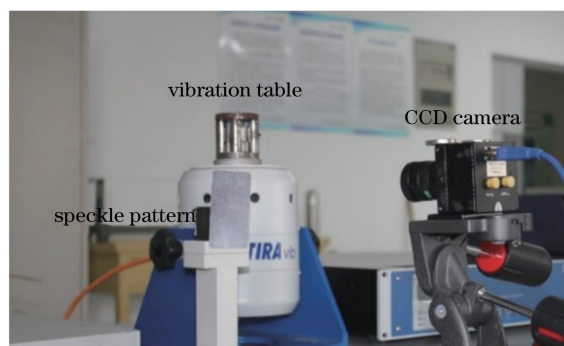


图 5 数字图像相关法抗噪声能力实验系统

Fig. 5 Anti-noise ability test system with digital image correlation method

力。3 种算法的误差绝对值如图 6 所示。由图 6 可知,在整个图像子区中,有限差分法和三次样条插值函数的计算误差基本相等,并且显著大于 Tikhonov 正则化方法的计算误差。表 2 所示为理论位移为 0 pixel 时 3 种算法的计算误差。由表 2 可知,有限差分法和三次样条插值函数的计算均值误差约为 Tikhonov 正则化方法的 2 倍,标准差约为 Tikhonov 正则化方法的 2.5 倍。可见,在实际的噪声环境中,相比于传统的有限差分法和三次样条插值函数,Tikhonov 正则化方法计算得到的图像的灰度梯度可以减小噪声引起的随机误差,进而提高数字图像相关法的抗噪声能力。

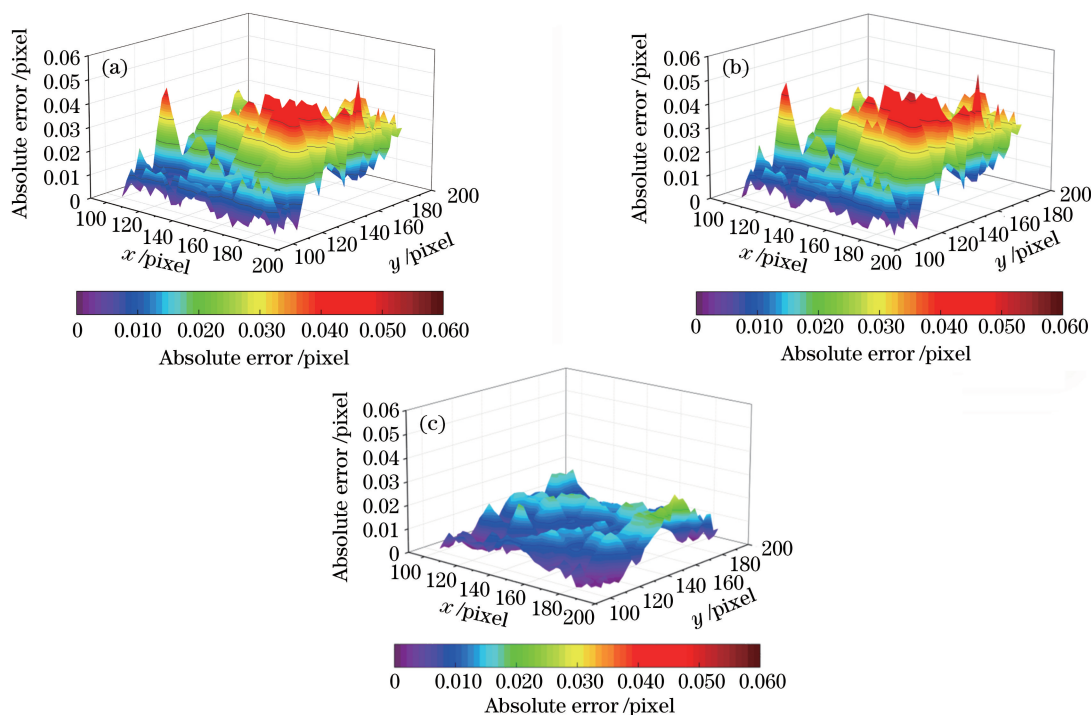


图 6 理论位移为 0 pixel 时 3 种算法的绝对误差。(a)有限差分法;(b)三次样条插值函数;(c) Tikhonov 正则化方法
Fig. 6 Absolute error of three algorithms with theoretical shift of 0 pixel. (a) Finite difference;

(b) spline interpolation; (c) Tikhonov regularization

表 2 理论位移为 0 pixel 时 3 种算法的计算误差
Table 2 Calculation errors of three algorithms with theoretical displacement of 0 pixel

Algorithm	Mean value /pixel	Standard deviation /pixel
Finite difference	0.0156	0.0125
Spline interpolation	0.0160	0.0133
Tikhonov regularization	0.0097	0.0050

5 结 论

分析了图像灰度梯度计算误差对数字图像相关法计算精度的影响,提出采用 Tikhonov 正则化方法计算图像的灰度梯度,进而利用 IC-GN 法计算图像的亚像素位移。基于数值仿真散斑图研究了所提方法与传统有限差分法和三次样条插值函数的计算误差,并结合实验验证了所提方法的可行性与有效性。结果表明:相比于传统方法,利用 Tikhonov 正则化方法计算图像灰度梯度具有更好的抗噪声能力;灰度梯度的计算误差对数字图像相关法的计算精度影响较大,采用合适的数值微分方法,如 Tikhonov 正则化方法,可以显著提高数字图像相关法的测量精度与噪声稳健性。综上所述,为了减小灰度梯度计算误差对数字图像相关法计算精度的影

响,需要采用合适的数值微分方法,以提高数字图像相关法在实际应用中的测量精度与抗噪声能力。

参 考 文 献

- [1] Khoo S W, Karuppanan S, Tan C S. A review of surface deformation and strain measurement using two-dimensional digital image correlation [J]. Metrology and Measurement Systems, 2016, 23(3): 461-480.
- [2] Ramos T, Furtado A, Eslami S, *et al.* 2D and 3D digital image correlation in civil engineering-measurements in a masonry wall [J]. Procedia Engineering, 2015, 114: 215-222.
- [3] Guo X, Liang J, Tang Z Z, *et al.* High-temperature digital image correlation method for full-field deformation measurement captured with filters at 2600 °C using spraying to form speckle patterns[J]. Optical Engineering, 2014, 53(6): 063101.
- [4] Shao X X, Dai Y T, He X Y, *et al.* Real-time digital image correlation for quasi-static test in civil engineering[J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(10): 1012003.
邵新星, 戴云彤, 何小元, 等. 实时数字图像相关用于土木准静态实验测量[J]. 光学学报, 2015, 35(10): 1012003.
- [5] Pan B, Xie H M, Wang Z Y, *et al.* Study on subset size selection in digital image correlation for speckle

- patterns[J]. *Optics Express*, 2008, 16(10): 7037-7048.
- [6] Wang Z Y, Li H Q, Tong J W, *et al.* Statistical analysis of the effect of intensity pattern noise on the displacement measurement precision of digital image correlation using self-correlated images [J]. *Experimental Mechanics*, 2007, 47(5): 701-707.
- [7] Bomarito G F, Hochhalter J D, Ruggles T J, *et al.* Increasing accuracy and precision of digital image correlation through pattern optimization[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2017, 91: 73-85.
- [8] Su Y, Zhang Q C, Xu X H, *et al.* Quality assessment of speckle patterns for DIC by consideration of both systematic errors and random errors[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2016, 86: 132-142.
- [9] Xu X H, Su Y, Cai Y L, *et al.* Influence of shape functions and template size in digital image correlation method for highly inhomogeneous deformations[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2015, 47(5): 848-862.
徐小海, 苏勇, 蔡玉龙, 等. 数字图像相关法测量局域变形场中形函数和模板尺寸的影响[J]. *力学学报*, 2015, 47(5): 848-862.
- [10] Wang B, Pan B. Random errors in digital image correlation due to matched or overmatched shape functions [J]. *Experimental Mechanics*, 2015, 55(9): 1717-1727.
- [11] Su Y, Zhang Q C, Xu X H, *et al.* Theoretical estimation of interpolation bias error in digital image correlation[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(2): 495-510.
苏勇, 张青川, 徐小海, 等. 数字图像相关技术中插值偏差的理论估计[J]. *力学学报*, 2016, 48(2): 495-510.
- [12] Luu L, Wang Z Y, Vo M, *et al.* Accuracy enhancement of digital image correlation with B-spline interpolation [J]. *Optics Letters*, 2011, 36(16): 3070-3072.
- [13] Schreier H W, Braasch J R, Sutton M A. Systematic errors in digital image correlation caused by intensity interpolation [J]. *Optical Engineering*, 2000, 39(11): 2915-2921.
- [14] Baldi A A, Bertolino F. A posteriori compensation of the systematic error due to polynomial interpolation in digital image correlation[J]. *Optical Engineering*, 2013, 52(10): 101913.
- [15] Gao Z R, Xu X H, Su Y, *et al.* Experimental analysis of image noise and interpolation bias in digital image correlation [J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2016, 81: 46-53.
- [16] Wang D Z, Jiang Y, Wang W Z, *et al.* Bias reduction in sub-pixel image registration based on the anti-symmetric feature [J]. *Measurement Science & Technology*, 2016, 27(3): 035206.
- [17] Pan B. Bias error reduction of digital image correlation using Gaussian pre-filtering [J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2013, 51(10): 1161-1167.
- [18] Shao X X, Dai X J, He X Y. Noise robustness and parallel computation of the inverse compositional Gauss-Newton algorithm in digital image correlation [J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2015, 71: 9-19.
- [19] Mazzoleni P, Matta F, Zappa E, *et al.* Gaussian pre-filtering for uncertainty minimization in digital image correlation using numerically-designed speckle patterns [J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2015, 66: 19-33.
- [20] Su Y, Zhang Q C, Xu X H, *et al.* Interpolation bias for the inverse compositional Gauss-Newton algorithm in digital image correlation [J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2018, 100: 267-278.
- [21] Pan B, Li K, Tong W. Fast, robust and accurate digital image correlation calculation without redundant computations [J]. *Experimental Mechanics*, 2013, 53(7): 1277-1289.
- [22] Wang Y B, Jia X Z, Cheng J. A numerical differentiation method and its application to reconstruction of discontinuity[J]. *Inverse Problems*, 2002, 18(6): 1461-1476.
- [23] Hanke M, Scherzer O. Inverseproblems light: numerical differentiation [J]. *The American Mathematical Monthly*, 2001, 108(6): 512-521.
- [24] Baker S, Matthews I. Lucas-Kanade 20 years on: a unifying framework [J]. *International Journal of Computer Vision*, 2004, 56(3): 221-255.
- [25] Schreier H W, Orteu J J, Sutton M A. *Image correlation for shape, motion and deformation measurements [M]*. New York: Springer, 2009: 101-103.
- [26] Burden R L, Faires J D. *Numerical analysis [M]*. 9th ed. Boston: Brooks/Cole, 2011: 174-185.
- [27] Cullum J. Numerical differentiation and regularization [J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1971, 8(2): 254-265.
- [28] Zhou P, Goodson K E. Subpixel displacement and deformation gradient measurement using digital image/speckle correlation (DISC) [J]. *Optical Engineering*, 2001, 40(8): 1613-1620.