

# 一维单应矩阵的进一步研究与应用

吕耀文<sup>1</sup>, 刘维<sup>2</sup>, 杜博军<sup>3,4</sup>, 徐熙平<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 长春理工大学光电工程学院光电测控与光信息传输技术教育部重点实验室, 吉林 长春 130022;

<sup>2</sup> 吉林大学通信工程学院, 吉林 长春 130033;

<sup>3</sup> 国防科技大学航天材料与工程学院, 湖南 长沙 410073;

<sup>4</sup> 中国白城兵器试验中心, 吉林 白城 137001

**摘要** 一维(1D)标定具有抗遮挡和制作成本低等优点,是摄像机标定中的重要方法之一。首先,以 1D 单应矩阵为基础,给出了绕固定点运动 1D 标定方法的几何解释;其次,在小孔成像模型下,证明了摄影几何中的交比不变性与 1D 单应矩阵的等价性。相比于共线 4 点的交比不变性,1D 单应矩阵约束更具有一般性。最后,针对基于平面运动的 1D 标定,由 1D 单应矩阵计算运动前后 1D 标定物延长线的交点,提出了一种简便的方法,将平面运动转化为绕固定点运动,并通过仿真和真实实验验证了算法的正确性。实验结果表明:与已有方法相比,本文算法的标定精度得到了显著提高。

**关键词** 机器视觉; 一维单应矩阵; 交比不变; 平面运动

中图分类号 TP391

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201838.0715003

## Further Study and Application for One-Dimensional Homography Matrix

Lü Yaowen<sup>1</sup>, Liu Wei<sup>2</sup>, Du Bojun<sup>3,4</sup>, Xu Xipin<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Key Laboratory of Optoelectric Measurement and Optical Information Transmission Technology of Ministry of Education, School of Opto-Electronic Engineering, Changchun University of Science and Technology, Changchun, Jilin 130022, China;

<sup>2</sup> College of Communications Engineering, Jilin University, Changchun, Jilin 130033, China;

<sup>3</sup> College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology,

Changsha, Hunan 410073, China;

<sup>4</sup> Baicheng Ordnance Test Center of China, Baicheng, Jilin 137001, China

**Abstract** One-dimensional (1D) calibration is one of the most important methods in camera calibration because of its advantages of anti-occlusion and low cost. Firstly, we propose the geometric interpretation of 1D calibration rotating around a fixed point based on the 1D homography matrix. Secondly, it is proved that the cross ratio invariance in projective geometry is equivalent to the 1D homography matrix in the pinhole imaging model. Compared to the cross ratio invariance of four collinear points, the constraint of 1D homography matrix is more general. Finally, aiming at the 1D calibration under planar motion, the intersection point of two extension lines is calculated by 1D homography matrix. A new convenient method is given to convert planar motion into rotating around a fixed point. The correctness of the proposed algorithm is verified by simulation experiments and real experiments. The experimental results show that the calibration accuracy of the proposed algorithm is improved greatly compared with that of the existing methods.

**Key words** machine vision; one-dimensional homography matrix; cross ratio invariance; planar motion

**OCIS codes** 150.0155; 150.1488; 080.1753; 150.6910

收稿日期: 2017-12-26; 收到修改稿日期: 2018-01-29

基金项目: 吉林省科技发展计划资助青年基金项目(20160520018JH)、国家自然科学基金(61601195)、吉林省重点科技攻关项目(20170204048GX)、高等学校学科创新引智 111 计划(D17017)

作者简介: 吕耀文(1987—),男,博士,讲师,硕士生导师,主要从事高速图像存储与计算机视觉测量方面的研究。

E-mail: lvyaowen2005@163.com

# 1 引 言

摄像机标定是视觉测量中的一项首要任务<sup>[1-3]</sup>,依据使用标定物的维度可以将摄像机标定分为三维(3D)标定、二维(2D)标定、一维(1D)标定和零维(0D)标定。1D标定方法被文献[4]提出后,由于大尺寸的1D标定物制作简单且无自身遮挡等优点而受到国内外研究者的关注<sup>[5-12]</sup>。关于这些方法的总结可参考文献[13],在此不再赘述。

在前期研究中,针对绕固定点运动的1D标定问题,假设世界坐标系的X轴与1D标定物重合,从单幅视图定义了一种由三维空间到图像空间映射的1D单应矩阵,从数学推导上得到了绕固定点运动1D标定的基本约束方程,给出了一种新的摄像机1D标定方法<sup>[13]</sup>,提高了绕固定点运动1D标定方法的精度。但对1D标定的几何解释还不是很清晰,尤其是既然1D单应是由共线点约束建立的数学模型,那么其与众所周知的共线4点交比不变性存在什么联系。另外,针对更一般的1D平面运动标定问题,是否也可以用1D单应矩阵求解。围绕这些问题,本文继续对1D单应矩阵的性质和应用进行深入研究,由1D单应矩阵给出关于摄像机1D标定的几何解释;并说明1D标定点与其投影图像点之间重要的交比不变特性与1D单应矩阵之间的关系;进而将1D单应矩阵应用于平面运动1D标定中,提出一种将平面运动转化为绕固定点运动的新方法。与现有虚拟平移方法相比,本文方法无需计算对噪点敏感的消息点和消息线,提高了标定结果的稳健性和标定精度。

## 2 背景知识

### 2.1 1D单应矩阵的定义<sup>[13]</sup>

在摄像机的小孔成像模型下,若1D标定物位

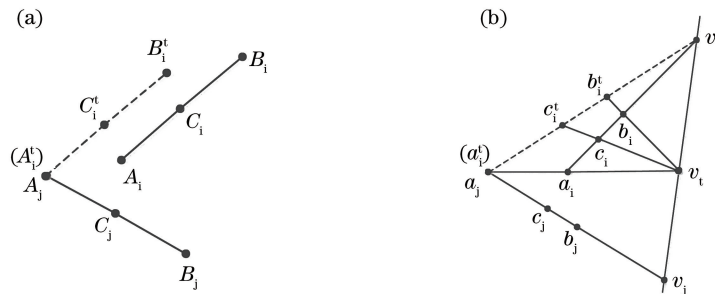


图1 文献[6]方法将平面运动转化为绕固定点运动。(a) 3D空间运动平面;(b)图像平面

Fig. 1 A motion rotating around a fixed point which converts from planar motion by Ref. [6] method.

(a) 3D space motion plane; (b) image plane

于世界坐标系的X轴上,则有:

$$s\tilde{m} = H\tilde{M} \text{ with } H = K[r_1 \ t], \quad (1)$$

式中  $s$  为尺度因子(等于点  $M$  的投影深度),  $\tilde{m} = [u, v, 1]^T$  为投影点  $m$  的齐次图像坐标,  $\tilde{M} = [x, 1]^T$ ,  $x$  为  $M$  到世界坐标系原点的有向距离,  $K$  为摄像机的内参数矩阵,  $r_1$  为旋转矩阵  $R$  的第一列向量,  $t$  为平移向量;矩阵  $H$  即为 3D 空间中 1D 标定点到 2D 图像上的单应矩阵,定义为 1D 单应矩阵。

若  $H$  的最后一个元素为 1,则有如下关于内参数  $K$  的约束方程成立:

$$t_z^2 h_1^T K^{-T} K^{-1} h_1 = 1, \quad (2)$$

式中  $t_z$  为平移矢量  $t$  (世界坐标系的原点在摄像机坐标系下的 3D 坐标)的最后一个元素,  $h_1$  为  $H$  的第一列向量。若绕固定点旋转,则  $t_z$  为定值,加上内参数的 5 个未知量,6 个约束方程就可以完成摄像机的标定。这是采用 1D 单应矩阵标定摄像机内参数的基本原理。

### 2.2 平面运动的 1D 标定

Wu 等<sup>[6]</sup>最早将绕固定点运动的 1D 标定扩展到平面运动中,其假设 1D 标定物包含  $A, B, C$  三个点,如图 1(a)所示。采集共面运动 1D 标定物的两幅图像,序号记为  $i$  和  $j$ 。  $a_i, b_i, c_i$  和  $a_j, b_j, c_j$  为运动前后  $A, B, C$  的投影图像点,如图 1(b)所示。通过虚拟平移将  $A_i B_i$  移动到  $A_i^t B_i^t$ ,使点  $A_i^t$  与点  $A_j$  重合。因此,如果  $B_i^t$  和  $C_i^t$  的投影图像点  $b_i^t$  和  $c_i^t$  已知,则平面运动的 1D 标定可以转化为绕固定点运动的 1D 标定问题。  $b_i^t$  和  $c_i^t$  的计算方法如下:

- 1) 根据投影的交比不变性,计算直线  $A_i B_i$  和  $A_j B_j$  的消息点  $v_i$  和  $v_j$ ,  $v_i v_j$  是运动平面的消息线。
- 2) 计算直线  $v_i v_j$  和  $a_j a_i$  的交点  $v_t$ , 则  $v_t$  是空间平行直线  $A_i A_i^t // B_i B_i^t // C_i C_i^t$  的消息点。
- 3) 计算直线  $a_j v_i$  和  $b_i v_t$  的交点,即为  $b_i^t$ , 同理,可得到  $a_j v_i$  和  $c_i v_t$  交点  $c_i^t$ 。

### 3 1D 单应矩阵

#### 3.1 几何解释

容易得到与 1D 标定物重合的空间直线即世界坐标系的  $X$  轴,在摄像机坐标系下的几何方程为

$$\begin{cases} [\mathbf{r}_3 & -\mathbf{r}_3^T \mathbf{t}] [x_c & y_c & z_c & \omega]^T = 0, xoy \text{ plane} \\ [\mathbf{r}_2 & -\mathbf{r}_2^T \mathbf{t}] [x_c & y_c & z_c & \omega]^T = 0, xoz \text{ plane} \end{cases} \quad (3)$$

式中  $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$  分别为旋转矩阵  $\mathbf{R}$  的第二列和第三列向量,  $\omega = 1$  表示该直线上的有穷点,  $\omega = 0$  表示该直线上的无穷远点。由旋转矩阵的列向量的正交性容易验证  $[\mathbf{r}_1, 0]^T$  是该直线与无穷远平面的交点。该点在图像平面上的投影为

$$\mathbf{x}_\infty = \mathbf{K} \mathbf{r}_1 = t_z \mathbf{h}_1, \quad (4)$$

由(2)式可得:

$$\mathbf{x}_\infty^T \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{x}_\infty = 1. \quad (5)$$

由此得到 1D 标定的几何解释:1D 标定物的消隐点到摄像机绝对二次曲线投影  $(\mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1})$  的代数距离为 1。

这里需要说明的是,在文献[5]中,由直线上两个有限点的齐次坐标差值得到无穷远点,推导出与本文类似的结论,只是其代数距离是  $L^2$  ( $L$  为 1D 标定物首尾端的长度)。因为在齐次坐标系下,每一个点的表示方式可以在相差一个尺度因子的条件下成立,即  $\mathbf{x}_\infty$  与  $L\mathbf{x}_\infty$  都是 1D 标定物的消隐点。从摄像机小孔成像模型上解释:摄像机焦距的改变与物距的改变具有等价性。

#### 3.2 交比不变

交比是投影几何中的基本不变量<sup>[14]</sup>,文献[15]将两条直线上的对应投影点用  $2 \times 2$  的单应矩阵联系起来,代入交比的定义式中可以证明交比不变性。本文的 1D 单应矩阵建立了由空间 1D 共线点到 2D 图像投影点的对应关系,由 1D 单应给出交比不变性的证明。

如图 2 所示,  $O$  为摄像机的投影中心,空间直线上的四点  $M_1, M_2, M_3, M_4$  在图像平面  $uov$  的投影图像点分别为  $m_1, m_2, m_3, m_4$ ,  $v_1, v_2, v_3, v_4$  分别为  $m_1, m_2, m_3, m_4$  的  $v$  坐标分量,则直线  $ou \parallel m_1 v_1 \parallel m_2 v_2 \parallel m_3 v_3 \parallel m_4 v_4$ ,由交比定义得:

$$\text{Cross}(m_1, m_2, m_3, m_4) = \text{Cross}(v_1, v_2, v_3, v_4). \quad (6)$$

令矩阵  $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,将(1)式左右两边乘以

$\mathbf{T}$ ,可以得到:

$$s \begin{bmatrix} v \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H}_{2 \times 2} \tilde{\mathbf{M}} \text{ with } \mathbf{H}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_2^T \\ \mathbf{h}_3^T \end{bmatrix}, \quad (7)$$

式中  $\mathbf{h}_2^T$  和  $\mathbf{h}_3^T$  分别为 1D 单应矩阵  $\mathbf{H}$  的第 2、3 行向量。若  $\det(\mathbf{H}_{2 \times 2}) \neq 0$ ,则由交比的定义和(6)式得:

$$\text{Cross}(M_1, M_2, M_3, M_4) = \text{Cross}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \text{Cross}(m_1, m_2, m_3, m_4). \quad (8)$$

由(1)式和(7)式可知,当且仅当  $\mathbf{t} = \lambda \mathbf{r}_1$  时,  $\det(\mathbf{H}_{2 \times 2}) = 0$ 。在几何上表示为 1D 标定物与平移矢量  $\mathbf{t}$  共线,此时 1D 标定物所在直线经过投影中心,1D 标定物上在图像平面上的投影由直线退化为点。

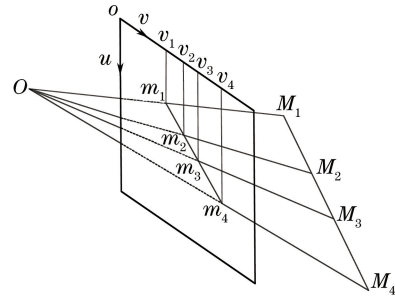


图 2 1D 单应下的交比不变性

Fig. 2 Cross ratio invariant of 1D homograph

文献[4]指出,因为存在交比不变性,所以当 1D 标定物上多于 3 个标定点时,并不能对内参数提供多余的约束。由(1)式得 1 组点对应可以得到关于  $\mathbf{H}$  的 2 个独立约束方程,而  $\mathbf{H}$  在相差 1 个尺度因子的条件下,具有 5 个未知量,因此计算  $\mathbf{H}$  最少需要 3 组对应点。当大于 3 组对应点时,由于数据冗余,可以提高  $\mathbf{H}$  的估计精度,但是只能得到一个独立的约束方程(2)式。这也从另一个角度反映了 1D 单应矩阵中隐含的交比不变性。

### 4 基于单应矩阵的 1D 平面运动标定

如图 3 所示,与文献[6]的空间虚拟平移方法不同,本文方法直接延长空间线段  $A_i B_i$  和  $A_j B_j$ 。由于直线  $A_i B_i$  和  $A_j B_j$  共面且不平行,因此相交于空间中的一点  $O_s$ ,如图 3(a)所示。在图像平面上,这两条直线对应的投影直线  $a_i b_i$  和  $a_j b_j$  相交于点  $o_m$ ,如图 3(b)所示。显然,点  $o_m$  是空间点  $O_s$  的投影点。假设  $A_i O_s$  的距离已知,那么以  $O_s$  为原点,  $O_s B_i$  为世界坐标系的  $X$  轴,计算 1D 标定物点与其投影点之间的 1D 单应矩阵  $\mathbf{H}^{(i)}$ ,由(2)式可得:

$$z_o^2 \mathbf{h}_1^{(i)T} \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_1^{(i)} = 1, \quad (9)$$

式中  $z_o$  为点  $O_s$  的投影深度,  $\mathbf{h}_1^{(i)}$  为  $\mathbf{H}^{(i)}$  的第一列向量。同理,若假设  $A_j O_s$  的距离已知,则有:

$$z_o^2 \mathbf{h}_1^{(j)T} \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_1^{(j)} = 1, \quad (10)$$

式中  $\mathbf{h}_1^{(i)}$  为  $\mathbf{H}^{(i)}$  的第一列向量,  $\mathbf{H}^{(i)}$  为以  $O_s$  为原点,  $O_s B_j$  为世界坐标系的  $X$  轴计算得到的 1D 单应矩阵。联立(9)式和(10)式可得两个共面 1D 标定物关于摄像机内参数的基本约束方程:

$$\mathbf{h}_1^{(i)T} \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_1^{(i)} - \mathbf{h}_1^{(j)T} \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_1^{(j)} = 0. \quad (11)$$

由摄像机的标定理论可知,一个平面中不论包含多少个 1D 标定物,都只能提供两个独立的约束方程,因此,最少需要三个平面才能完成摄像机的标定。

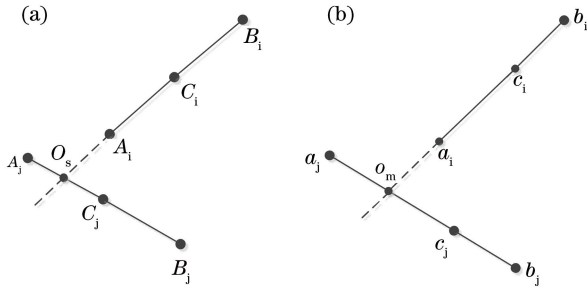


图 3 基于单应矩阵的 1D 平面运动标定。(a) 3D 空间运动平面;(b) 图像平面

Fig. 3 1D calibration with planar motion based on homography. (a) 3D space motion plane; (b) image plane

由以上分析可知,现在解决问题的核心转化为计算  $A_i O_s$  和  $A_j O_s$  的距离。以  $A_i$  为原点,  $A_i B_i$  为  $X$  轴建立世界坐标系,由 3 组对应点可计算 1D 单应矩阵  $\mathbf{H}_{old}^{(i)}$ 。因为  $O_s$  与  $o_m$  是一一对应点,由(1)式得:

$$s \tilde{\mathbf{o}}_m = \mathbf{H}_{old}^{(i)} \tilde{\mathbf{O}}_s, \quad (12)$$

式中  $\tilde{\mathbf{o}}_m$  为图像点  $o_m$  的齐次坐标,  $\tilde{\mathbf{O}}_s$  为 3D 空间点  $O_s$  的齐次坐标。令  $A_i O_s$  的距离为  $d_{A_i O_s}$ , 求解(12)式可得:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{O}}_s = (\mathbf{H}_{old}^{(i)T} \mathbf{H}_{old}^{(i)})^{-1} \mathbf{H}_{old}^{(i)T} \tilde{\mathbf{o}}_m \\ d_{A_i O_s} = \tilde{\mathbf{O}}_s(1) / \tilde{\mathbf{O}}_s(2) \end{cases}, \quad (13)$$

式中  $\tilde{\mathbf{O}}_s(k)$  ( $k=1, 2$ ) 为向量  $\tilde{\mathbf{O}}_s$  的第  $k$  个元素。同理,可计算得到  $A_j O_s$  的距离  $d_{A_j O_s}$ 。由此,可通过建立以点  $O_s$  为原点的坐标系,重新计算得到  $\mathbf{H}^{(i)}$  与  $\mathbf{H}^{(j)}$ , 获得内参数的约束方程(11)式,完成 1D 平面运动的摄像机标定。

$d_{A_i O_s}$  和  $d_{A_j O_s}$  也可以由交比不变性计算得到,但是当标定点的个数为  $N$  ( $N > 3$ ) 时,交比不变性给出了关于  $d_{A_i O_s}$  ( $d_{A_j O_s}$ ) 互不独立的  $C_N^3$  个约束方程,其求解较复杂,且互不独立,所以抗噪性能较差。而 1D 单应矩阵可以很容易地解决该问题,即只需在估算 1D 单应矩阵时增加点对应约束即可。因此,虽然 1D 单应矩阵与交比不变具有等价性,但在实际

计算中,1D 单应矩阵比交比不变性的应用更加灵活,其可计算性也更强。

## 5 仿真与实验

### 5.1 合成数据仿真

仿真时设置摄像机的内参数为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1500 & 0 & 1000 \\ 0 & 1500 & 1000 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

镜头畸变参数为 0, 摄像机分辨率为  $2000 \text{ pixel} \times 2000 \text{ pixel}$ 。1D 标定物的长度为 90 cm。在 1D 标定物上分布着用于标定的 3 个等距标记点。仿真数据通过如下步骤产生。

1) 选取 6 个仿真平面,其 Rodriguez 旋转矢量分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= [\pi/6 \quad 0 \quad 0]^T, \\ \mathbf{r}_2 &= [0 \quad \pi/6 \quad 0]^T, \\ \mathbf{r}_3 &= [\pi/12 \quad -\pi/12 \quad 0]^T, \\ \mathbf{r}_4 &= [\pi/12 \quad 0 \quad -\pi/12]^T, \\ \mathbf{r}_5 &= [0 \quad -\pi/6 \quad -\pi/12]^T, \\ \mathbf{r}_6 &= [\pi/12 \quad \pi/6 \quad -\pi/6]^T; \end{aligned}$$

平移矢量

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_4 = \mathbf{t}_5 = \mathbf{t}_6 = [-50 \quad -50 \quad 200]^T.$$

2) 在每个平面上,1D 标定物的运动次数定义为  $J$ 。 $J$  个 1D 标定物的方向由  $[0.2\pi, 0.6\pi]$  的均匀分布生成。平移矢量  $\mathbf{t}_{2D}$  在  $[10, 100] \text{ cm} \times [10, 100] \text{ cm}$  的范围内随机生成。

3) 将以上生成的 3D 点投影到图像平面上,生成与 1D 标定点对应的图像点。

#### 5.1.1 噪声水平对标定精度的影响

每一个平面中 1D 标定物的运动次数  $J = 15$ 。在生成的图像点上添加均值为 0, 方差  $\delta$  的高斯噪声。以  $\delta = 0.1 \text{ pixel}$  为步长,由 0 变化到 2 pixel。已有文献的实验结果表明<sup>[6,7,12]</sup>,线性估计结果是评价方法优劣的最有力手段,因此,在仿真标定实验中,仅评估算法的线性求解结果。针对每一个固定的方差  $\delta$ ,线性计算的标定结果为 250 次计算后平均值,标定结果如图 4(a)所示,其中  $f_u, f_v$  分别为摄像机  $x$  方向和  $y$  方向的等效焦距,  $(u_0, v_0)$  为主点坐标,  $\gamma$  为倾斜因子。为便于比较,将相同的仿真数据应用于文献[6]方法求解摄像机参数,其标定结果如图 4(b)所示。由图 4 可知,在相同噪声水平下,本文方法的标定精度明显优于文献[6]方法。

### 5.1.2 运动次数 $J$ 对标定精度的影响

实验中,噪声的方差  $\delta=0.5$  pixel。运动次数  $J$  由 3 变化到 20。对每一个  $J$ ,采用线性方法求解摄像机内参数,标定结果为 250 次独立实验的平均结果,采用本文方法和文献[6]方法标定结果如

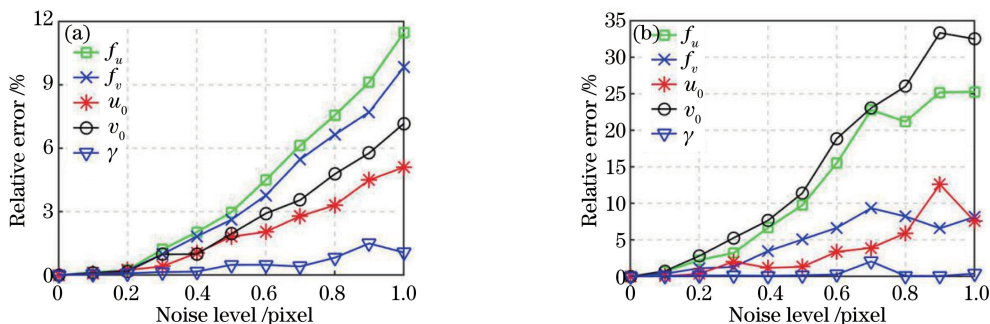


图 4 噪声水平对线性标定精度的影响。(a)本文算法;(b)文献[6]方法

Fig. 4 Effect of noise level on linear calibration precision. (a) Proposed method; (b) Ref. [6] method

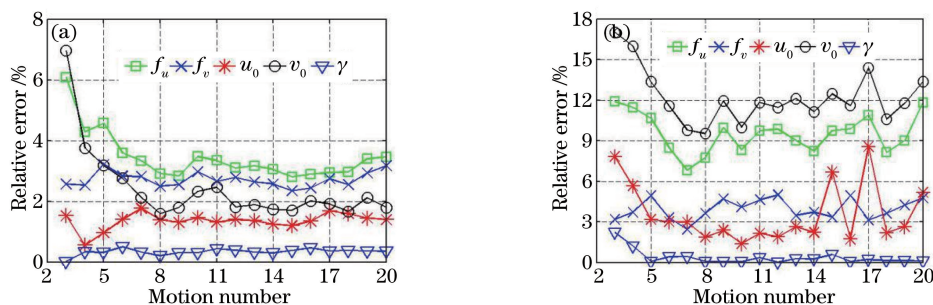


图 5 运动次数对标定精度的影响。(a)本文方法;(b)文献[6]方法

Fig. 5 Effect of motion number on calibration precision. (a) Proposed method; (b) Ref. [6] method

以上两个实验的结果表明,本文方法在标定精度和标定稳定性方面明显优于文献[6]方法,其主要原因是文献[6]方法的关键步骤是通过消隐点确定运动平面的消隐线,但是由于消隐点的计算对噪声比较敏感,所以随着噪声的增加,计算得到的消隐线方程误差会显著增大。虽然增加  $J$  的数量,可以增加计算消隐线的消隐点数量,从而提高消隐线的估计精度,但是由于消隐点的噪声敏感性导致计算结果的稳定性较差。

### 5.2 真实实验

实验采用分辨率为  $1224 \text{ pixel} \times 1024 \text{ pixel}$  的黑白相机。打印了 12 条包含 3 个圆环标记点的 1D 标定纸粘贴在平板上。相邻标记点的距离为 10 cm。移动摄像机获取 6 幅平板图像。其中一幅图像如图 6 所示,采用文献[16]方法提取图像中的圆环标记点。标定结果如表 1 所示,表 1 中的第一行数据是采用常规的 2D 棋盘<sup>[17-18]</sup>在 Matlab 标定工具箱<sup>[19]</sup>下获得的标定结果,作为摄像机内参数的真值。由实验数据可以看出,本文方法的标定精度

比文献[6]方法高,与仿真实验结果一致。

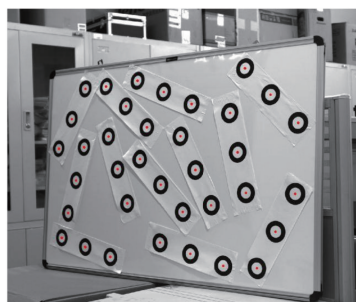


图 6 1D 平面运动标定图像样张

Fig. 6 Calibration image with 1D planar motion

## 6 结 论

在 1D 单应矩阵解决固定点运动 1D 标定问题的基础上,对 1D 单应矩阵的性质和应用进行了深入研究。由 1D 标定物与世界坐标系  $X$  轴重合的特点,结合 1D 单应矩阵标定的约束方程,给出了 1D 标定的几何解释。并在小孔成像模型下对投影几何中的交比不变性给出了简短的证明,分别从理

论和实验两个方面说明了 1D 单应矩阵与投影交比的等价性,但 1D 单应矩阵比交比不变性在计算上更加方便和灵活。最后,针对 1D 平面运动的标定问题,提出了一种简单的延长线相交法,采用 1D 单

应矩阵确定交点的位置,将平面运动转化为绕固定点运动,与传统的虚拟平移转换方法相比,本文方法无须计算消隐点和消隐线,标定精度和稳定性得到了显著提高。

表 1 真实实验图像的标定结果

Table 1 Calibration results of real image

$v_o$	Method	Parameter	$f_u$	$f_v$	$\gamma$	$u_o$
Proposed Method	Ground truth	2305.0	2301.5	0(90°)	637.0	514.4
	Closed-form	2578.9	2578.6	0(90°)	609.1	473.6
	Error /%	11.88	12.04	0	1.21	1.79
	Nonlinear	2383.1	2385.3	0(90°)	604.8	494.6
	Error /%	3.42	3.61	0	1.39	0.86
Method of Ref.[6]	Closed-form	2786.4	2788.5	0(90°)	610.5	570.6
	Error /%	20.88	21.16	0	1.15	2.43
	Nonlinear	2563.2	2565.7	0(90°)	501.2	530.5
	Error /%	11.20	11.48	0	5.50	0.70

参 考 文 献

[1] Zhang Z. A flexible new technique for camera calibration [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2000, 22(11): 1330-1334.

[2] Guo M, Hu L L, Li J. Local point cloud reconstruction of ceramic-bowl-surface defect based on multi-image sequences [J]. Acta Optica Sinica, 2017, 37(12): 1215002.  
郭萌, 胡辽林, 李捷. 基于多幅图像的陶瓷碗表面缺陷的局部点云重建 [J]. 光学学报, 2017, 37(12): 1215002.

[3] Zhao M, Zheng X C, Huang Q H, *et al.* Camera calibration with narrow field of view for deep space [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2017, 54(9): 091502.  
赵敏, 郑兴纯, 黄秋红, 等. 深度空间小视角摄像机标定 [J]. 激光与光电子学进展, 2017, 54(9): 091502.

[4] Zhang Z Y. Camera calibration with one-dimensional objects [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2004, 26(7): 892-899.

[5] Hammarstedt P, Sturm P, Heyden A. Degenerate cases and closed-form solutions for camera calibration with one-dimensional objects [C]. Tenth IEEE International Conference on Computer Vision, 2005, 1: 317-324.

[6] Wu F C, Hu Z Y, Zhu H J. Camera calibration with moving one-dimensional objects [J]. Pattern Recognition, 2005, 38(5): 755-765.

[7] de França J A, Stemmer M R., França M, *et al.* Revisiting Zhang's 1D calibration algorithm [J]. Pattern Recognition, 2010, 43(3): 1180-1187.

[8] Shi K F, Dong Q L, Wu F C. Weighted similarity-invariant linear algorithm for camera calibration with rotating 1D objects [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2012, 21(8): 3806-3812.

[9] Qi F, Li Q H, Luo Y P, *et al.* Constraints on general motions for camera calibration with one-dimensional objects [J]. Pattern Recognition, 2007, 40(6): 1785-1792.

[10] de França J A, Stemmer M R, França M, *et al.* A new robust algorithmic for multi-camera calibration with a 1D object under general motions without prior knowledge of any camera intrinsic parameter [J]. Pattern Recognition, 2012, 45(10): 3636-3647.

[11] He X J, Zhang H F, Hur N, *et al.* Complete Camera Calibration Using Line-Shape Objects [C]. IEEE Region 10 Conference, 2006: 1-4.

[12] Wang B, Sun F M. 1D camera calibration revisited [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2014, 26(3): 452-456.  
王波, 孙凤梅. 再论一维摄像机标定 [J]. 计算辅助设计与图形学学报, 2014, 26(3): 452-456.

[13] Lü Y W, Liu W, Xu X P, *et al.* A novel camera one-dimensional calibration method [J]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(12): 1215005.  
吕耀文, 刘维, 徐熙平, 等. 一种新的摄像机一维标定方法 [J]. 光学学报, 2016, 36(12): 1215005.

[14] Yang F, Liu W, Zhang Y, *et al.* Binocular camera calibration method combined with the four collinear constraints [J]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(7): 0715001.  
杨帆, 刘巍, 张洋, 等. 结合四角共线约束的大视场双目相机标定方法 [J]. 光学学报, 2016, 36(7): 0715001.

[15] Wu F C. Mathematical methods in computer vision

- [M]. Beijing: Science Press, 2011: 28-30.
- 吴福朝. 计算机视觉中的数学方法[M]. 北京: 科学出版社, 2011: 28-30.
- [16] Jiang G, Quan L. Detection of concentric circles for camera calibration [C]. Tenth IEEE International Conference on Computer Vision, 2005, 1: 333-340.
- [17] Zou P P, Zhang Z L, Wang P, *et al.* Binocular camera calibration based on collinear vector and plane homography[J]. Acta Optica Sinica, 2017, 37(11): 1115006.  
邹朋朋, 张滋黎, 王平, 等. 基于共线向量与平面单应性的双目相机标定方法[J]. 光学学报, 2017, 37(11): 1115006.
- [18] Su J D, Qi X H, Duan X S. Planepose measurement method based on monocular vision and checkerboard target [J]. Acta Optica Sinica, 2017, 37(8): 0815002.  
苏建东, 齐晓慧, 段修生. 基于单目视觉和棋盘靶标的平面姿态测量方法[J]. 光学学报, 2017, 37(8): 0815002.
- [19] Bouguet J Y. Camera calibration toolbox for Matlab [EB/OL]. (2015-10-14) [2017-12-26]. [http://vision.caltech.edu/~bouguetj/calib\\_doc/index.html](http://vision.caltech.edu/~bouguetj/calib_doc/index.html).